Polynômes de Legendre

On définit les suites de polynômes (U_n) et (P_n) de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \qquad \forall\, n \geqslant 1,\ U_n = \frac{X^n(X-1)^n}{n!} \qquad \forall\, n \geqslant 0,\ P_n = U_n^{(n)}$$

1. *Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n*
   (a) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.
   Qu'en déduit-on concernant la courbe représentative de P_n ?
   (c) Montrer que P_n est un polynôme de degré n, à coefficients entiers relatifs.
   Préciser les coefficients dominant et constant de P_n, ainsi que $P_n(1)$.
2. *Deux relations vérifiées par les polynômes P_n.*
   (a) Vérifier la relation $(X^2 - X)U_n' = n(2X-1)U_n$.
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(X^2 - X)P_n'' + (2X-1)P_n' - n(n+1)P_n = 0$.
   (b) Vérifier les relations $U_{n+1}' = (2X-1)U_n$ et $U_{n+1}'' = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$.
   En dérivant n fois la première et $n-1$ fois la seconde, prouver que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0.$$
3. *Propriété intégrale des polynômes P_n.*
   (a) Soit n un entier naturel, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
   En intégrant par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 U_n(t) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 P_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, Q \in \mathbb{R}[X],\ \deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   (b) Par des intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)^m\,\mathrm{d}t$, avec $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$
   (c) Prouver que pour tous entiers m et n :
   $$\int_0^1 P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ si } m \neq n, \quad \text{et } \int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}.$$
4. *Propriété génératrice des polynômes P_n.*
   (a) Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.
   Indication : raisonner par récurrence sur n.
   (b) Avec ces notations, montrer que $\forall\, k \in \{0, \ldots, n\},\ \lambda_k = (2k+1)\displaystyle\int_0^1 P(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t$
5. *Racines des polynômes P_n.*
   Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Dans cette question, on montre par deux méthodes différentes que le polynôme P_n possède n racines distinctes, et que ces racines appartiennent à l'intervalle $]0,1[$.
   (a) *Première méthode :* Soit $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n dans $]0,1[$ et qui ont une multiplicité impaire, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.
   Supposer $p < n$ et utiliser (3a) avec $Q = \prod\limits_{k=1}^{p}(X - x_k)$ (et $Q = 1$ si $\mathcal{S} = \emptyset$.)

(b) *Seconde méthode :* Revenir à la définition de P_n utiliser le théorème de Rolle.

6. *Minoration de P_n pour $x \notin [0,1]$*

Dans la suite de ce problème, n est fixé et strictement positif.

On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de P_n, rangées dans l'ordre croissant.

(a) Montrer que pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ on a $x_{n+1-k} = 1 - x_k$.

En déduire que $P_n^2 = (\binom{2n}{n})^2 \prod_{k=1}^{n} (x(x-1) + x_k(1-x_k))$.

(b) Prouver l'inégalité $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.

En déduire que si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$ alors $|P_n(x)| \geqslant \frac{1}{2n+1}\left(4\sqrt{x(x-1)}\right)^n$.

7. *Interpolation polynomiale*

(a) Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ montrer qu'il existe un unique polynôme L_k tel que :

$$\deg(L_k) \leqslant n-1 \qquad L_k(x_k) = 1 \qquad \forall\, j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\},\ L_k(x_j) = 0$$

On donnera l'expression factorisée du polynôme L_k.

(b) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k$.

(c) Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on pose $\ell_k = \int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Prouver l'égalité $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k P(x_k)$.

Indication : utiliser la division de P par P_n, ainsi que les questions (3b) et (7b).

(d) Pour tout j de $\{1,\ldots,n\}$, prouver que $\ell_j > 0$.

Indication : utiliser la question précédente avec le polynôme $P = L_j^2$.

8. *Quadratures de Gauss*

On reprend les notations de la question précédente.

On considère l'approximation $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)$, où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

On sait que cette approximation est en fait une égalité si f est un polynôme de degré $\leqslant 2n-1$.

On se propose d'étudier la qualité de cette approximation quand f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$.

(a) Montrer que : $\exists\,!P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$, $\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

Indication : poser $P = QP_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Utiliser (7b).

(b) Pour tout t de $[0,1]$, montrer qu'il existe c dans $]0,1[$ tel que $f(t) - P(t) = \dfrac{n!^4\, f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3} P_n^2(t)$.

Indication : si $t \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$ utiliser $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda P_n(x)^2$ avec $\varphi(t) = 0$.

(c) On note M_{2n} la borne supérieure de $\left|f^{(2n)}\right|$ sur $[0,1]$.

Déduire de ce qui précède que $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)\right| \leqslant \dfrac{M_{2n}\,(n!)^4}{(2n)!^3\,(2n+1)}$

(d) Application numérique. Que devient le majorant précédent si $n = 5$?

9. Illustrer librement les résultats précédents avec Maple, quand $n = 5$.

Corrigé du problème

1. *Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n*

   (a) On trouve sucessivement :

   ◇ $U_0 = 1$ donc $P_0 = U_0^{(0)} = U_0 = 1$.

   ◇ $U_1 = X^2 - X$ donc $P_1 = U_1' = 2X - 1$.

   ◇ $U_2 = \frac{1}{2}(X^4 - 2X^3 + X^2)$ donc $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.

   ◇ $U_3 = \frac{1}{6}(X^6 - 3X^5 + 3X^4 - X^3)$ donc $P_3 = 20X^3 - 30X^2 + 12X - 1$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n(1-X) = \frac{1}{n!}(1-X)^n(-X)^n = \frac{1}{n!}(X-1)^n X^n = U_n(X)$.

   Si on dérive n fois, on trouve $(-1)^n U_n^{(n)}(1-X) = U_n^{(n)}(X)$.

   Autrement dit, pour tout entier n, on a $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

   On en déduit que la courbe représentative de P_n est :

   ◇ symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$ si n est pair.

   ◇ symétrique par rapport au point $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$ si n est impair.

   (c) Par définition, U_n est un polynôme de degré $2n$.

   Le polynôme P_n, qui en est la dérivée n-ième, est donc de degré n.

   Pour tout entier n, on obtient en utilisant la formule du binôme :

$$U_n = \frac{1}{n!}X^n(X-1)^n = \frac{1}{n!}X^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^{k+n}$$

   On dérive n fois et on obtient l'expression développée de P_n :

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{(k+n)!}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{n}X^k$$

   Cette expression montre que P_n s'écrit $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les a_k sont dans $\mathbb{Z}$.

   Le coefficient dominant est $a_n = (-1)^0\binom{n}{n}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

   Le coefficient constant de P_n est $P(0) = a_0 = (-1)^n\binom{n}{0}\binom{n}{n} = (-1)^n$.

   Enfin, la question (1b) donne : $P_n(1) = (-1)^n P_n(0) = 1$.

2. *Deux relations vérifiées par les polynômes P_n.*

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $U_n = \frac{(X^2-X)^n}{n!}$, donc $U_n' = (2X-1)\frac{(X^2-X)^{n-1}}{(n-1)!}$.

   On en déduit $(X^2 - X)U_n' = n(2X-1)\frac{(X^2-X)^n}{n!} = n(2X-1)U_n$.

   Enfin, cette égalité est vérifiée de façon évidente si $n = 0$.

   On dérive $n+1$ fois avec la formule de Leibniz. On trouve :

$$(X^2-X)U_n^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}(2X-1)U_n^{(n+1)} + 2\binom{n+1}{2}U_n^{(n)} = n(2X-1)U_n^{(n+1)} + 2n\binom{n+1}{1}U_n^{(n)}$$

   Autrement dit

$$(X^2-X)P_n'' + (n+1)(2X-1)P_n' + n(n+1)P_n = n(2X-1)P_n' + 2n(n+1)P_n$$

   Finalement, on a obtenu : $(X^2-X)P_n'' + (2X-1)P_n' - n(n+1)P_n = 0$

(b) On a $U_{n+1} = \frac{(X^2-X)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $U'_{n+1} = (2X-1)\frac{(X^2-X)^n}{n!} = (2X-1)U_n$.

Si on dérive cette égalité, on trouve : $U''_{n+1} = 2U_n + (2X-1)U'_n$.

Si $n \geqslant 1$, on a $U'_n = (2X-1)U_{n-1}$ donc $U''_{n+1} = 2U_n + (2X-1)^2 U_{n-1}$.

Par ailleurs $(2X-1)^2 U_{n-1} = 4(X^2-X)U_{n-1} + U_{n-1} = 4nU_n + U_{n-1}$.

On a donc obtenu l'égalité $U''_{n+1} = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$, pour tout $n \geqslant 1$.

– Si on dérive n fois $U'_{n+1} = (2X-1)U_n$ on trouve $U_{n+1}^{(n+1)} = (2X-1)U_n^{(n)} + 2nU_n^{(n-1)}$.

  Autrement dit : $P_{n+1} = (2X-1)P_n + 2nU_n^{(n-1)}$.

– On dérive maintenant $n-1$ fois la relation $U''_{n+1} = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$.

  On trouve $U_{n+1}^{(n+1)} = 2(2n+1)U_n^{(n-1)} + U_{n-1}^{(n-1)}$.

  Autrement dit $P_{n+1} = P_{n-1} + 2(2n+1)U_n^{(n-1)}$.

– Il suffit d'éliminer $U_n^{(n-1)}$ entre les deux égalités obtenues.

  On trouve : $((2n+1)-n)P_{n+1} = (2n+1)(2X-1)P_n - nP_{n-1}$.

On a donc obtenu : $\forall n \geqslant 1,\ (n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0$.

3. *Propriété intégrale des polynômes* P_n.

(a) On utilise la formule d'intégration par parties répétées :

$$\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k U_n^{(k)}(t)f^{(n-k-1)}(t)\Big]_0^1 + (-1)^n\int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition, les réels 0 et 1 sont des racines de multiplicité n de U_n.

On en déduit que $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$ pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$.

Il en découle l'égalité $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si Q appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on applique ce qui précède à $f = Q$.

Puisque $Q^{(n)} = 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1 U_n(t)Q^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(b) Posons $I_{n,m} = \displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)^m\,\mathrm{d}t$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.

En intégrant par parties, on trouve, si $m \geqslant 1$:

$$I_{n,m} = \frac{1}{n+1}\Big[t^{n+1}(t-1)^m\Big]_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(t-1)^{m-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$$

Un récurrence évidente donne alors :

$$I_{n,m} = -\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1} = \ldots = (-1)^m\frac{m}{n+1}\,\frac{m-1}{n+2}\,\cdots\,\frac{1}{n+m}I_{n+m,0}$$

Autrement dit $I_{n,m} = \dfrac{(-1)^m\,m!\,n!}{(m+n)!}\displaystyle\int_0^1 t^{n+m}\,\mathrm{d}t = \dfrac{(-1)^m\,m!\,n!}{(m+n+1)!}$

On en déduit immédiatement $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}I_{n,n} = \frac{(-1)^n\,n!}{(2n+1)!}$.

(c) Si $m \neq n$, l'un des entiers est strictement inférieur à l'autre.

La question (3b) donne alors immédiatement $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Si $m = n$, on a $\displaystyle\int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t)U_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1 P_n^{(n)}(t)U_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais $P_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}X^n + \cdots \Rightarrow P_n^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{n!}\,\frac{n!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}$.

4. *Propriété génératrice des polynômes P_n.*

(a) La propriété est vraie si $n = 0$, car tout polynôme constant $P = a_0$ s'écrit $P = a_0P_0$.

Supposons qu'elle le soit au rang $n-1$, avec $n \geqslant 1$. Soit $P = a_nX^n + \cdots$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

On sait que le coefficient dominant de P_n est $b_n = \binom{2n}{n}$. Posons $\lambda_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Le polynôme $Q = P - \lambda_nP_n$ est donc de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Il en résulte qu'on peut écrire $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_kP_k$ (hypothèse de récurrence.)

Ainsi $P = \sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_kP_k$ ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

(b) Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$, écrit sous la forme $P = \sum\limits_{j=0}^{n}\lambda_jP_j$. Soit $k \in \{0,\ldots,n\}$.

On connait l'égalité $\displaystyle\int_0^1 P_j(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si $j \neq k$.

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 P(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\int_0^1 P_j(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_k\int_0^1 P_k^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 P(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda_k}{2k+1}$ ce qui est le résultat attendu.

5. *Racines des polynômes P_n.*

(a) Avec les indications de l'énoncé, on suppose donc $p < n$.

Il découle alors de la question (3a) que $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Or le polynôme P_nQ est de degré $n+p \geqslant n \geqslant 1$, et toutes ses racines qui pourraient appartenir à $]0,1[$ sont maintenant de multiplicité paire (on a en effet ajouté 1 aux multiplicités qui étaient impaires, et uniquement à celles-là.)

La fonction continue $t \mapsto P_n(t)Q(t)$ garde donc un signe constant sur $]0,1[$.

L'égalité $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donne alors $P_n(t)Q(t) = 0$ pour tout t de $]0,1[$.

C'est absurde car le polynôme non nul P_nQ ne peut avoir une infinité de racines.

Il en découle $p = n$. Autrement dit, on compte n réels x_k distincts dans $]0,1[$ qui sont des racines de P_n avec des multiplicités m_k impaires.

Puisque $\deg P_n = n$, les m_k valent nécessairement 1 (les x_k sont des racines simples) et on a ainsi obtenu *toutes* les racines (réelles ou complexes) de P_n.

(b) Montrons que $U_n^{(k)}$ a (au moins) k racines distinctes sur $]0,1[$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$.

D'après Rolle, la propriété est vraie si $k = 1$, car $U - n(0) = U_n(1) = 0$.

On suppose que la propriété est vraie au rang k, avec $k \leqslant n-1$.

Ainsi $U_n^{(k)}$ s'annule en $c_1,\ldots,c_k$, avec $0 < c_1 < \cdots < c_k < 1$.

Or $c_0 = 0$ et $c_{k+1} = 1$ sont des racines de U_n avec la multiplicité $n > k$.

Il en découle qu'on a encore $U_n^{(k)}(c_0) = U_n^{(k)}(c_{k+1}) = 0$.

Autrement dit, $U_n^{(k)}$ s'annule en $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_k < c_{k+1} = 1$.

Le théorème de Rolle permet donc d'affirmer que $U_n^{(k+1)}$ s'annule en $k+1$ point distincts (un au moins dans chaque intervalle ouvert $]c_j, c_{j+1}[$.)

Cela prouve la propriété au rang $k+1$ et achève cette récurrence finie.

Ainsi $P_n = U_n^{(n)}$ s'annule en n points distincts de $]0,1[$. Comme $\deg P_n = n$, on a trouvé toutes ses racines (réelles ou complexes), et elles sont simples.

6. *Minoration de P_n pour $x \notin [0,1]$*

   (a) On sait que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$. Il en découle $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow P_n(1-x) = 0$.

   Ainsi l'ensemble des racines de P_n est symétrique par rapport à la valeur $\frac{1}{2}$.

   Or $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, il en découle : $x_{n+1-k} = 1 - x_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

   D'autre part, on sait que $P_n = \binom{2n}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} (X - x_k)$.

   Le changement $k \leftarrow n+1-k$ donne : $P_n = \binom{2n}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} (X - x_{n+1-k}) = \binom{2n}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} (X-1+x_k)$.

   En multipliant les deux expressions obtenues pour P_n, on trouve :

   $$\begin{aligned} P_n^2 &= \Big[\binom{2n}{n} \prod_{k=1}^{n} (X-x_k)\Big] \Big[\binom{2n}{n} \prod_{k=1}^{n} (X-1+x_k)\Big] \\ &= \Big(\binom{2n}{n}\Big)^2 \prod_{k=1}^{n} [(X-x_k)(X-1+x_k)] = \Big(\binom{2n}{n}\Big)^2 \prod_{k=1}^{n} [X(X-1)+x_k(1-x_k)] \end{aligned}$$

   (b) C'est évident si $n = 0$ car alors $\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1} = 1$.

   On suppose donc que la propriété est vraie au rang $n \geqslant 0$.

   Alors $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} \geqslant 2\frac{4^n}{n+1}$ c'est-à-dire $\binom{2n+2}{n+1} \geqslant \frac{4^{n+1}}{2(n+1)} \geqslant \frac{4^{n+1}}{2n+3}$.

   Cela prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

   Supposons $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$. Alors $x(x-1)+x_k(1-x_k) \geqslant x(x-1) \geqslant 0$.

   On en déduit $P_n^2(x) = \Big(\binom{2n}{n}\Big)^2 \prod\limits_{k=1}^{n} [x(x-1)+x_k(1-x_k)] \geqslant \Big(\binom{2n}{n}\Big)^2 (x(x-1))^n$.

   Donc si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$, $|P_n(x)| \geqslant \binom{2n}{n}\sqrt{x(x-1)}^{\,n} \geqslant \frac{1}{2n+1}\Big(4\sqrt{x(x-1)}\Big)^n$.

7. *Interpolation polynomiale*

   (a) Si L_k existe, il est divisible par les $(X - x_j)$, avec $j \neq k$, donc par leur produit.

   Puisqu'on impose $\deg L_k \leqslant n-1$, il existe un scalaire α_k tel que $L_k = \alpha_k \prod\limits_{j \neq k} (X - x_j)$.

   Mais $L_k(x_k) = 1$ impose $1 = \alpha_k \prod\limits_{j \neq k} (x_k - x_j)$ donc $L_k = \prod\limits_{j \neq k} \dfrac{X - x_j}{x_k - x_j}$.

   Réciproquement, ce polynôme satisfait aux conditions imposées.

   (b) Soit P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} P(x_k)L_k$, également dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   Pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, on a $Q(x_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(x_k) \overbrace{L_k(x_j)}^{0 \text{ si } k \neq j} = P(x_j)L_j(x_j) = P(x_j)$.

   Les polynômes P et Q, de degré $\leqslant n-1$, ont la même valeur en n points distincts.

   Il en résulte que ces polynômes sont égaux. Ainsi : $P = \sum\limits_{k=1}^{n} P(x_k)L_k$.

(c) Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Soit $P = QP_n + R$ sa division par P_n.

On a $\deg P \leqslant 2n-1$ donc $\deg Q \leqslant n-1$. Il en résulte $\displaystyle\int_0^1 Q(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (cf 3a.)

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t$. Or $\deg R \leqslant n-1 \Rightarrow R = \sum_{k=1}^{n} R(x_k)L_k$ (cf 7b.)

Il en résulte l'égalité $\displaystyle\int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} R(x_k)\int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k R(x_k)$.

Enfin, pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on a $P(x_k) = Q(x_k)P_n(x_k) + R(x_k) = R(x_k)$.

On a donc bien obtenu l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k P(x_k)$.

(d) On peut appliquer ce qui précède à $P = L_j^2$, car $\deg L_j^2 = 2n-2 \leqslant 2n-1$.

On obtient $\displaystyle\int_0^1 L_j^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k\, L_j(x_k) = \ell_j\, L_j(x_j) = \ell_j$.

Puisque L_j^2 est continue positive non nulle, on a $\displaystyle\ell_j = \int_0^1 L_j^2(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

8. *Quadratures de Gauss*

(a) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Soit $P = QP_n + R$ sa division par P_n (Q, R sont donc $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.)

D'après (7b), on a $Q = \sum_{k=1}^{n} q_k L_k$ et $R = \sum_{k=1}^{n} r_k L_k$, avec $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$, $\begin{cases} q_k = Q(x_k) \\ r_k = R(x_k) \end{cases}$

Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, $P(x_k) = Q(x_k)P_n(x_k) + R(x_k) = R(x_k) = r_k$.

De même $P' = Q'P_n + QP_n' + R' \Rightarrow P'(x_k) = Q(x_k)P_n'(x_k) + R'(x_k) = q_k P_n'(x_k) + R'(x_k)$.

Notons qu'on a toujours $P_n'(x_k) \neq 0$ car les x_k sont racines simples de P_n.

Les conditions $P(x_k) = f(x_k)$ s'écrivent $r_k = f(x_k)$, ce qui détermine R de manière unique.

Les conditions $P'(x_k) = f'(x_k)$ s'écrivent $q_k P_n'(x_k) + R'(x_k) = f'(x_k)$.

Elles deviennent $q_k = \dfrac{f'(x_k) - R'(x_k)}{P_n'(x_k)}$ et elles déterminent Q de façon unique.

Q et R étant uniquement déterminés, il en est de même de P.

Conclusion : $\exists!\, P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$, $\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

(b) L'égalité demandée est évidente (avec c quelconque) si t est l'un des x_k.

On suppose donc $t \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$, et on définit φ comme indiqué dans l'énoncé.

On peut choisir λ de telle sorte que $\varphi(t) = 0$, car $P_n(t) \neq 0$.

Tout comme f, l'application φ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[0,1]$.

Par construction on $\varphi(x_k) = 0$ pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, et $\varphi(t) = 0$.

Ainsi l'application φ s'annule en $n+1$ points distincts.

Le théorème de Rolle permet d'affirmer que φ' s'annule en n points distincts (un dans chacun des n intervalles *ouverts* définis par t et par les x_k.)

Or $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}, \varphi'(x) = f'(x) - P'(x) - 2\lambda P_n(x)P_n'(x) \Rightarrow \varphi'(x_k) = f'(x_k) - P'(x_k) = 0$.

Ainsi φ' s'annule en $2n$ points distincts de $[0,1]$ (les x_k et les n points obtenus précédemment.)

Une application répétée du théorème de Rolle montre que φ'' s'annule en $2n-1$ points distincts de $]0,1[$, puis que $\varphi^{(3)}$ s'annule en $2n-2$ points distincts de $]0,1[$, etc.

Au final, $\varphi^{(2n)}$ s'annule en un point c de $]0,1[$.

Mais P est de degré $2n-1$ donc $P^{(2n)}=0$.
De même $P_n^2=(\binom{2n}{n})^2X^{2n}+\cdots$, ce qui conduit à $(P_n^2)^{(2n)}=(\binom{2n}{n})^2(2n)!=\dfrac{(2n)!^3}{n!^4}$

On en déduit $\varphi^{(2n)}(x)=f^{(2n)}(x)-\lambda\,\dfrac{(2n)!^3}{n!^4}$, et il en découle $\lambda=\dfrac{n!^4}{(2n)!^3}\,f^{(2n)}(c)$.

L'égalité $\varphi(t)=0$ devient alors $f(t)-P(t)=\dfrac{n!^4\,f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3}P_n^2(t)$

(c) On a successivement $\sum\limits_{k=1}^{n}\ell_kf(x_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ell_kP(x_k)=\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ (voir question 7c.)

On en déduit : $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\ell_kf(x_k)\right|=\left|\int_0^1(f(t)-P(t))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f(t)-P(t)|\,\mathrm{d}t$

Or $|f(t)-P(t)|\leqslant\dfrac{n!^4\,M_{2n}}{(2n)!^3}P_n^2(t)$ sur $[0,1]$.

On en déduit $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\ell_kf(x_k)\right|\leqslant\dfrac{n!^4\,M_{2n}}{(2n)!^3}\displaystyle\int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t$.

La résultat de (3c) donne alors $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\ell_kf(x_k)\right|\leqslant\dfrac{n!^4\,M_{2n}}{(2n)!^3\,(2n+1)}$

(d) Si $n=5$, on trouve $\dfrac{n!^4}{(2n)!^3\,(2n+1)}=\dfrac{1}{2534876467200}\approx 4\cdot10^{-13}$.

9. On commence par définir une fonction permettant de calculer les polynômes P_n.

```
> restart: P:=n->expand(diff((X^2-X)^n/n!,X$ n)):
```

Voici en particulier le polynôme P_5.

```
> P5:=P(5);
```

$$P5:=252X^5-630X^4+560X^3-210X^2+30X-1$$

On vérifie que ce polynôme s'annule en $1/2$.

```
> factor(P5);
```

$$(2X-1)(126X^4-252X^3+154X^2-28X+1).$$

Dans le quotient de P par $(2X-1)$ on effectue le changement de variable $X=1/2+Y$.
Le polynôme obtenu est bicarré (logique, compte tenu de la relation $P_5(1-X)=-P(X)$) ce qui permettrait de trouver les racines de P_5 "à la main".

```
> Q5:=quo(P5,2*X-1,X); Q5:=expand(subs(X=1/2+Y,Q5));
```

$$Q5:=126X^4-252X^3+154X^2-28X+1$$
$$Q5:=\frac{15}{8}-35Y^2+126Y^4$$

D'une façon plus brutale, voici les racines de P_5 calculées par Maple.

```
> x:=sort([solve(P(5))]);
```

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{42}\sqrt{245-14\sqrt{70}}, \frac{1}{2}+\frac{1}{42}\sqrt{245-14\sqrt{70}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{42}\sqrt{245+14\sqrt{70}}, \frac{1}{2}+\frac{1}{42}\sqrt{245+14\sqrt{70}}\right]$$

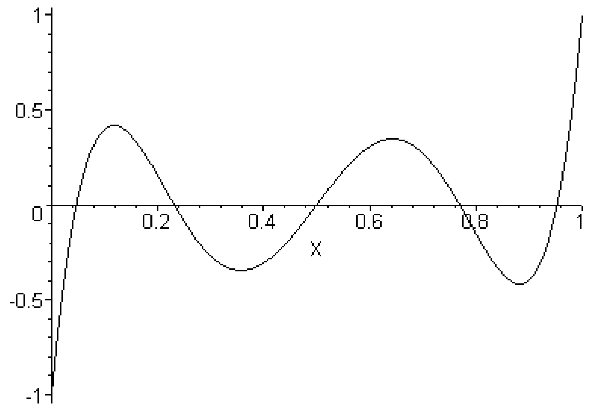
L'instruction suivante ordonne la liste x dans le sens des valeurs croissantes.
On le vérifie en donnant la valeur approchées des x_k.

```
> x:=sort(x,(x,y)->evalb(evalf(x)<evalf(y))): evalf(x);
```

$$[.0469100771, .2307653450, .5000000000, .7692346550, .9530899229]$$

Voici la représentation graphique de P_5.

```
> plot(P5,X=0..1);
```



Voici comment on peut définir les polynômes L_1 à L_5.

```
> L:=k->mul((X-xj)/(x[k]-xj),xj=subsop(k=NULL,x)):
```

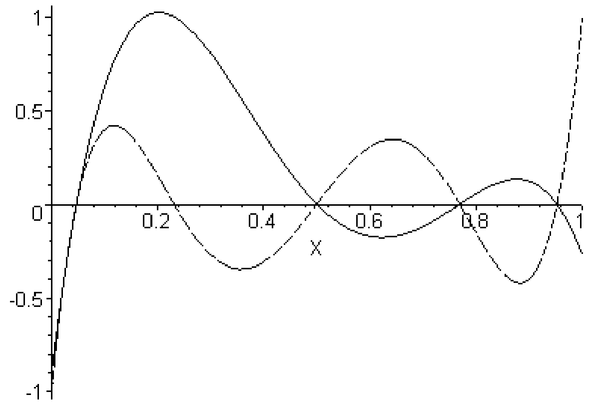
Voici par exemple le polynôme L_2 (ses coefficients écrits en virgule flottante.)

```
> L2:=map(evalf,expand(L(2)));
```

$$L2 := 22.92433354X - .8931583930 - 88.22281084X^2 + 117.8634151X^3 - 51.93972112X^4$$

On vérifie que le polynôme L_2 (tracé ici en continu) prend la valeur 1 en x_2 et la valeur 0 aux points x_1, x_3, x_4, x_5 (on a tracé P_5 en pointillé.)

```
> plot([P5,L2],X=0..1,linestyle=[3,1]);
```



On place dans la variable ℓ la liste $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5]$. Pour chaque k, $\ell_k = \displaystyle\int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t$.

```
> l:=map(expand@rationalize,[seq(int(L(k),X=0..1),k=1..5)]);
```

$$\left[\frac{161}{900} - \frac{13}{1800}\sqrt{70}, \frac{161}{900} + \frac{13}{1800}\sqrt{70}, \frac{64}{225}, \frac{161}{900} + \frac{13}{1800}\sqrt{70}, \frac{161}{900} - \frac{13}{1800}\sqrt{70}\right]$$

La fonction suivante calcule la quadrature de Gauss : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^{5} \ell_k f(x_k)$.

```
> gauss:=f->add(l[k]*f(x[k]),k=1..5):
```

On va vérifier que cette approximation est en fait une égalité pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $\leqslant 2n-1$ (et ici $2n-1=9$.)
Par linéarité, il suffit de le vérifier pour les monômes $t \mapsto t^k$, avec $0 \leqslant k \leqslant 9$.

```
> monomes:=[(t->t^k) $k=0..10];
```

$$[1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3, t \mapsto t^4, t \mapsto t^5, t \mapsto t^6, t \mapsto t^7, t \mapsto t^8, t \mapsto t^9, t \mapsto t^{10}]$$

L'instruction suivante confirme les résultats théoriques : pour chaque indice k de 0 à 9 la formule de Gauss donne le résultat exact $\displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}$. En revanche, il n'y a pas égalité pour $k=10$.

```
> map(expand@gauss,monomes);
```

$$\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{5773}{63504}\right]$$

L'instruction suivante permet de mesurer l'erreur commise dans la quadrature de Gauss.

```
> erreur:=f->evalf(int(f(t),t=0..1)-gauss(f)):
```

Voici une expression du majorant de l'erreur commise dans la formule.
Ici M_{10} représente la borne supérieure de $\left|f^{(10)}\right|$ sur $[0,1]$.

```
> k:=n->M[10]*(n!)^4/(2*n)!^3/(2*n+1);
```

$$k := n \mapsto \frac{M_{10}\,(n!)^4}{((2\,n)!)^3\,(2\,n+1)}$$

A titre d'exemple, on considère la fonction $f : x \mapsto e^x$.
On voit que l'erreur commise est de l'ordre de 0.65 E$-$12.
La théorie prévoyait ici une erreur majorée par 1 E$-$12 (ici $M_{10} = \mathrm{e}$.)

```
> Digits:=20: erreur(exp); evalf(subs(M[10]=exp(1),k(5)));
```

$$.65378153\ 10^{-12}$$
$$.10723527807497589898\ 10^{-11}$$

La qualité de l'approximation est très dépendante de la régularité de f (et la majoration de l'erreur n'est bien sûr valable que pour des applications de classe $\mathcal{C}^{2n}$.)
On voit ici que l'erreur est beaucoup plus importante avec l'application $x \mapsto \sqrt{x}$, qui est peut-être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$ mais qui n'est que continue sur $[0,1]$.

```
> Digits:=10: erreur(sqrt);
```

$$-.0006301231$$