Étude asymptotique d'une suite

Le but du problème est de déterminer un équivalent de la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) = \binom{2n}{n}^{-\alpha} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^{\alpha}, \text{ où } \alpha > 0.$$

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp\Bigl(-\alpha\frac{k^2}{n}\Bigr)$.

Dans tout le problème, r est un réel de $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\int_1^{n+1} \exp\Bigl(-\alpha\frac{x^2}{n}\Bigr)\,\mathrm{d}x \leqslant v_n(\alpha) \leqslant \int_0^{n} \exp\Bigl(-\alpha\frac{x^2}{n}\Bigr)\,\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire $v_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

2. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n^r \leqslant k \leqslant n} \exp\Bigl(-\alpha\frac{k^2}{n}\Bigr) \leqslant n\exp(-\alpha\, n^{2r-1})$.

   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k < n^r} \exp\Bigl(-\alpha\frac{k^2}{n}\Bigr) \underset{\infty}{\sim} v_n(\alpha)$

   On pose $p_n(1) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ si $n \geqslant 1$, et $p_n(k) = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}\Bigl(1-\frac{j}{n}\Bigr)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\Bigl(1+\frac{j}{n}\Bigr)}$ si $2 \leqslant k \leqslant n$.

3. (a) Montrer que $u_n(\alpha) = 1 + 2\dbinom{2n}{n}^{-\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha}$.

   (b) Établir que pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ on a $\dbinom{2n}{n+k} = \dbinom{2n}{n} p_n(k)$.

4. (a) Soit t dans $[0,1[$. Montrer que pour tout x de $[0,t]$ on a :

   (i) : $2x \leqslant \ln(1+x) - \ln(1-x) \leqslant \dfrac{2x}{1-t^2}$.

   (ii) : $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) En déduire que $p_n(k)\exp\Bigl(\dfrac{k^2}{n}\Bigr) \leqslant \exp\Bigl(\dfrac{k^2}{2n^2}\Bigr)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n^r \leqslant k \leqslant n} p_n^{\alpha}(k)$ est négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n \to \infty$.

5. (a) Montrer que $u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) = 2\displaystyle\sum_{1 \leqslant k < n^r} \exp\Bigl(-\alpha\frac{k^2}{n}\Bigr)\Bigl(p_n^{\alpha}(k)\exp\Bigl(\alpha\frac{k^2}{n}\Bigr) - 1\Bigr) + \mathrm{o}(v_n(\alpha))$

   (b) Avec (4.a) montrer que $p_n(k)\exp\Bigl(\dfrac{k^2}{n}\Bigr) \geqslant \exp\Bigl(-\dfrac{n^{4r-3}}{1-n^{2r-2}}\Bigr)$ si $1 \leqslant k < n^r$.

   (c) En déduire : $\ 2\displaystyle\sum_{1 \leqslant k < n^r} \exp\Bigl(-\alpha\frac{k^2}{n}\Bigr)\Bigl(p_n^{\alpha}(k)\exp\Bigl(\alpha\frac{k^2}{n}\Bigr) - 1\Bigr) = \mathrm{o}(v_n)$ si $r < \dfrac{3}{4}$.

   (d) Montrer finalement que $u_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

   (e) Cas particulier : donner un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$ quand $n \to \infty$.

Corrigé du problème

1. (a) L'application $x \mapsto \exp\Big(-\alpha\dfrac{x^2}{n}\Big)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   On en déduit l'encadrement, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:
   $$\int_k^{k+1}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx \leqslant \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \leqslant \int_{k-1}^{k}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx$$
   En sommant de $k=1$ à $k=n$ on obtient :
   $$\int_1^{n+1}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx \leqslant v_n(\alpha) \leqslant \int_0^{n}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx.$$

   (b) Posons $I_n = \displaystyle\int_0^n \exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   Le changement de variable $t = x\sqrt{\dfrac{\alpha}{n}}$ donne $I_n = \sqrt{\dfrac{n}{\alpha}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{n\alpha}}\exp(-t^2)\,dt$.

   On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n\alpha}}\exp(-t^2)\,dt = \int_0^{+\infty}\exp(-t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   On en déduit alors l'équivalent : $I_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

   L'encadrement de $v_n(\alpha)$ obtenu à la question précédente s'écrit :
   $$\int_n^{n+1}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx - \int_0^{1}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx + I_n \leqslant v_n(\alpha) \leqslant I_n.$$
   Mais $\displaystyle\int_n^{n+1}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{1}\exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,dx \leqslant \int_0^1 dx \leqslant 1$.

   On en déduit $I_n - 1 \leqslant v_n(\alpha) \leqslant I_n$ donc $|v_n(\alpha) - I_n| \leqslant 1$.

   Ainsi $v_n(\alpha) - I_n = \mathrm{o}(I_n)$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$, c'est-à-dire $v_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} I_n$.

   On trouve finalement : $v_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} I_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

2. (a) Pour tout $k \leqslant n^r$, on a $\exp\Big(-\alpha\dfrac{k^2}{n}\Big) \leqslant \exp\Big(-\alpha\dfrac{(n^r)^2}{n}\Big) = \exp(-\alpha n^{2r-1})$.

   Ainsi $\displaystyle\sum_{n^r\leqslant k\leqslant n}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \leqslant (n - n^r + 1)\exp(-\alpha\, n^{2r-1}) \leqslant n\exp(-\alpha\, n^{2r-1})$.

   (b) On a $v_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) = \sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) + \sum_{n^r\leqslant k\leqslant n}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)$.

   Compte tenu de la question précédente, on a donc l'encadrement :
   $$0 \leqslant v_n(\alpha) - \sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \leqslant n\exp(-\alpha\, n^{2r-1}).$$
   Mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\exp(-\alpha\, n^{2r-1}) = 0$ (croissance comparée, car $2r > 1$).

   D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n(\alpha) = +\infty$ car $v_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

   Ainsi $v_n(\alpha) - \displaystyle\sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)$ est négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n \to +\infty$.

   On a donc obtenu l'équivalent : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \underset{\infty}{\sim} v_n(\alpha)$.

3. (a) On sait que $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$ pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}^\alpha = \binom{2n}{n}^\alpha + \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}^\alpha + \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}^\alpha = \binom{2n}{n}^\alpha + 2\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}^\alpha$

Donc $u_n(\alpha) = \binom{2n}{n}^{-\alpha}\Bigl(\binom{2n}{n}^\alpha + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}^\alpha\Bigr) = 1 + 2\binom{2n}{n}^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}^\alpha.$

(b) On distingue $k = 1$ et $k >= 2$.

Si $k = 1$, $\binom{2n}{n}p_n(1) = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n+1}$.

Si $2 \leqslant k \leqslant n$, on trouve successivement :

$$p_n(k) = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}\Bigl(1-\frac{j}{n}\Bigr)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\Bigl(1+\frac{j}{n}\Bigr)} = \frac{\dfrac{1}{n^{k-1}}\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}(n-j)}{\dfrac{1}{n^k}\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(n+j)} = n\,\frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!}}{\dfrac{(n+k)!}{n!}} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}$$

On en déduit $\binom{2n}{n}p_n(k) = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} = \dfrac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} = \binom{2n}{n+k}$.

4. (a) Pour tout x de $[0, t]$, posons $\begin{cases} f_1(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x \\ f_2(x) = \dfrac{2x}{1-t^2} - \ln(1+x) + \ln(1-x) \\ f_3(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Les applications f_1, f_2, f_3 sont dérivables sur $[0, t]$ et on a, pour tout x de $[0, t]$:

$$\begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} - 2 = \dfrac{2x^2}{1-x^2} \geqslant 0 \\ f_2'(x) = \dfrac{2}{1-t^2} - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2(t^2-x^2)}{(1-t^2)(1-x^2)} \geqslant 0 \\ f_3'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0 \end{cases} \text{. De plus } \begin{cases} f_1(0) = 0 \\ f_2(0) = 0 \\ f_3(0) = 0 \end{cases}$$

Les applications f_1, f_2, f_3 sont croissantes sur $[0, t]$ et nulles en 0.

Elles sont donc poisitives ou nulles sur $[0, t]$ ce qui permet d'écrire :

$$\forall\, t \in [0, 1],\ \forall\, x \in [0, t],\ \begin{cases} 2x \leqslant \ln(1+x) - \ln(1-x) \leqslant \dfrac{2x}{1-t^2} \\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \end{cases}$$

L'inégalité restante $\ln(1+x) \leqslant x$ est bien connue, et elle est vraie sur $]-1, +\infty[$.

On aurait pu la retrouver comme ci-dessus avec $f_4 : x \mapsto x - \ln(1+x)$.

(b) Commençons par traiter le cas particulier $k = 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, d'après (4a) : $\ln\Bigl(p_n(1)\exp\Bigl(\dfrac{1}{n}\Bigr)\Bigr) = \dfrac{1}{n} - \ln\Bigl(1+\dfrac{1}{n}\Bigr) \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

Autrement dit : $p_n(1)\exp\Bigl(\dfrac{1}{n}\Bigr) \leqslant \exp\Bigl(\dfrac{1}{2n^2}\Bigr)$ pour tout $n \geqslant 1$.

On passe maintenant au cas général $2 \leqslant k \leqslant n$.

Tout d'abord $\ln\Big(p_n(k)\exp\Big(\dfrac{k^2}{n}\Big)\Big) = \ln p_n(k) + \dfrac{k}{n^2}$.

Mais $\ln p_n(k) = -\ln\Big(1+\dfrac{k}{n}\Big) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\Big(\ln\Big(1-\dfrac{j}{n}\Big) - \ln\Big(1+\dfrac{j}{n}\Big)\Big)$.

En vertu de (4ai), chaque terme de la somme précédente est majoré par $-\dfrac{2j}{n}$.

Ainsi $\ln p_n(k) \leqslant -\ln\Big(1+\dfrac{k}{n}\Big) - \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j = -\ln\Big(1+\dfrac{k}{n}\Big) - \dfrac{k(k-1)}{n}$.

On en déduit $\ln\Big(p_n(k)\exp\Big(\dfrac{k^2}{n}\Big)\Big) \leqslant -\ln\Big(1+\dfrac{k}{n}\Big) + \dfrac{k}{n} \leqslant \dfrac{k^2}{2n^2}$ (d'après 4a ii).

On a donc obtenu l'inégalité $p_n(k)\exp\Big(\dfrac{k^2}{n}\Big) \leqslant \exp\Big(\dfrac{k^2}{2n^2}\Big)$.

(c) De ce qui précède on tire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout k de $\{1,\ldots,n\}$:

$p_n(k)\exp\Big(\dfrac{k^2}{n}\Big) \leqslant \exp\Big(\dfrac{k^2}{2n^2}\Big) \leqslant \mathrm{e}^{1/2}$ donc $p_n^\alpha(k) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha/2}\exp\Big(-\alpha\dfrac{k^2}{n}\Big)$.

Il en découle, en utilisant le résultat de (2a) :

$$0 \leqslant \sum_{n^r\leqslant k\leqslant n} p_n^\alpha(k) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha/2}\sum_{n^r\leqslant k\leqslant n}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \leqslant n\,\mathrm{e}^{\alpha/2}\exp(-\alpha\, n^{2r-1}).$$

Mais $\dfrac{n\ \exp(-\alpha\, n^{2r-1})}{v_n(\alpha)} \underset{\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{n\alpha}{\pi}}\exp(-\alpha\, n^{2r-1}) \to 0$ quand $n\to\infty$ (car $2r>1$).

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n(\alpha)}\sum_{n^r\leqslant k\leqslant n} p_n^\alpha(k) = 0$, donc $\displaystyle\sum_{n^r\leqslant k\leqslant n} p_n^\alpha(k) = \mathrm{o}(v_n(\alpha))$.

5. (a) D'après (3a) et (3b) on a :

$$u_n(\alpha) = 1 + 2\binom{2n}{n}^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}^{\alpha} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} p_n^\alpha(k) = 2\sum_{k=1}^{n^r-1} p_n^\alpha(k) + 1 + \sum_{k=n^r}^{n} p_n^\alpha(k).$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=n^r}^{n} p_n^\alpha(k) = \mathrm{o}(v_n(\alpha))$ et $1 = \mathrm{o}(v_n(\alpha))$.

On en déduit $u_n(\alpha) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n^r-1} p_n^\alpha(k) + \mathrm{o}(v_n(\alpha))$.

De même, d'après 2(b), on a $v_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^r-1}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) + \mathrm{o}(v_n(\alpha))$.

Finalement, on trouve bien :

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) &= 2\sum_{1\leqslant k<n^r}\Big(p_n^\alpha(k) - \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)\Big) + \mathrm{o}(v_n(\alpha)) \\ &= 2\sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)\Big(p_n^\alpha(k)\exp\Big(\alpha\frac{k^2}{n}\Big) - 1\Big) + \mathrm{o}(v_n(\alpha)) \end{aligned}$$

(b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $\{1,\ldots,n^r-1\}$.

$$\begin{aligned} \ln\Big(p_n(k)\exp\Big(\frac{k^2}{n}\Big)\Big) &= \ln p_n(k) + \frac{k}{n^2} \\ &= -\ln\Big(1-\frac{k}{n}\Big) + \sum_{j=1}^{k}\Big(\ln\Big(1-\frac{j}{n}\Big) - \ln\Big(1+\frac{j}{n}\Big)\Big) + \frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

Pour k dans $\{1, \ldots, n^r - 1\}$, on a $0 \leqslant \dfrac{j}{n} < \dfrac{1}{n^{1-r}} < 1$, pour $n \geqslant 2$.

En utilisant (4ai) avec $t = \dfrac{1}{n^{1-r}}$, on trouve :

$$\ln\Big(1-\frac{j}{n}\Big) - \ln\Big(1+\frac{j}{n}\Big) \geqslant \frac{-2j}{n\Big(1-\dfrac{1}{n^{2-2r}}\Big)} = \frac{-2j\, n^{1-2r}}{n^{2-2r}-1}.$$

D'autre part $-\ln\Big(1-\dfrac{k}{n}\Big) \geqslant \dfrac{k}{n}$ (grâce à 4aii), et $2\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j = k(k+1)$:

$$\ln\Big(p_n(k)\exp\Big(\frac{k^2}{n}\Big)\Big) \geqslant \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n} - \frac{n^{1-2r}}{n^{2-2r}-1}k(k+1).$$

Or $\dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n} - \dfrac{n^{1-2r}}{n^{2-2r}-1}k(k+1) = k(k+1)\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{n^{1-2r}}{n^{2-2r}-1}\Big) = \dfrac{-k(k+1)}{n(n^{2-2r}-1)}$.

Comme $k(k+1) \leqslant (n^r-1)n^r \leqslant n^{2r}$ on trouve :

$$\ln\Big(p_n(k)\exp\Big(\frac{k^2}{n}\Big)\Big) \geqslant \frac{-n^{2r}}{n(n^{2-2r}-1)} = \frac{-n^{2r-1}}{n^{2-2r}-1} = \frac{-n^{4r-3}}{(1-n^{2r-2})}.$$

Ainsi, pour tout k de $\{1, \ldots, n^r - 1\}$, on a : $p_n(k)\exp\Big(\dfrac{k^2}{n}\Big) \geqslant \exp\Big(\dfrac{-n^{4r-3}}{1-n^{2r-2}}\Big)$.

(c) Posons $w_n(\alpha) = 2\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n^r} \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)\Big(p_n^\alpha(k)\exp\Big(\alpha\frac{k^2}{n}\Big) - 1\Big)$.

D'après ce qui précède, on a : $w_n(\alpha) \geqslant 2\left(\exp\Big(\dfrac{-n^{4r-3}\alpha}{1-n^{2r-2}}\Big) - 1\right)\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)$.

Notons $\varphi_n(\alpha)$ cette dernière quantité.

On sait que $\dfrac{1}{2} < r < 1$ donc $2r-2<0$. Si on choisit $r < \dfrac{3}{4}$ alors $3-4r>0$.

Avec ce choix de r, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{4r-3}\alpha}{1-n^{2r-2}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\exp\Big(\frac{-n^{4r-3}\alpha}{1-n^{2r-2}}\Big) - 1\right) = 0$.

Donc sachant que $\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \underset{\infty}{\sim} v_n(\alpha)$, on trouve $\varphi_n(\alpha) = \mathrm{o}(v_n(\alpha))$.

D'autre part, d'après 4aii : $w_n(\alpha) \leqslant 2\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)\Big(\exp\Big(\alpha\frac{k^2}{2n^2}\Big) - 1\Big)$.

Grâce à $k \leqslant n^r$ on obtient : $w_n(\alpha) \leqslant 2\Big(\exp\Big(\dfrac{\alpha}{2}n^{2r-2}\Big) - 1\Big)\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n^r}\exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)$.

Notons $\psi_n(\alpha)$ cette dernière expression.

On constate que $\psi_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} 2\Big(\dfrac{\alpha}{2}n^{2r-2}\Big)v_n(\alpha) = \mathrm{o}(v_n(\alpha)$ (on a utilisé $2r-2<0$).

L'encadrement $\varphi_n(\alpha) \leqslant w_n(\alpha) \leqslant \psi_n(\alpha)$ montre donc que $w_n(\alpha) = \mathrm{o}(v_n(\alpha))$.

(d) On a $u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) = \mathrm{o}(v_n(\alpha))$ donc $u_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} 2v_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

(e) On écrit $u_n(1) = \dbinom{2n}{n}^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n+k} = 2^{2n}\binom{2n}{n}^{-1} = \frac{4^n}{u_n(1)}$.

On en déduit $\dbinom{2n}{n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.