Recherche d'extremum

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n)a^{-x}$$

L'objet du problème est d'étudier le maximum de la fonction g_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

Première partie

Dans cette partie, on examine le cas particulier où $n = 1$.

1. (a) Etudier les variations de la fonction $\dfrac{g_1'}{g_1}$.
   On notera u et v les valeurs de x où cette fonction s'annule, avec $u < v$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g_1. Etudier la branche infinie du graphe de g_1.
2. Dans cette question, on prend $a = 2$.
   (a) Calculer les valeurs approchées à 10^{-5} près de $u, v, g_1(u), g_1(v)$.
   (b) Construire le graphe de g_1 (unités : $2,5$ cm sur Ox et 10 cm sur Oy).

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On désigne par M le maximum de $|f''(x)|$ sur $[-1, 1]$. Soit β un élément de $\mathbb{R}^+$.

On se propose d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ par la somme $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big)$.

On suppose que $n \geqslant \beta$. Pour tout nombre entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose :

$$R_1(k,n) = f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta}{n} f'\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

$$R_2(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2n^2} f'\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

1. (a) En utilisant Taylor-Lagrange montrer que $|R_1(k,n)| \leqslant \dfrac{A}{n^2}$, avec $A = \dfrac{\beta^2 M}{2}$.
   (b) Montrer également que $|R_2(k,n)| \leqslant \dfrac{B}{n^3}$, avec $B = \dfrac{M}{6}$.
2. (a) On pose $R_3(k,n) = \displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta-1/2}{n}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\Big)$.
   Prouver l'inégalité $|R_3(k,n)| \leqslant \dfrac{C}{n^3}$ où $C = A + B + \dfrac{M}{2}\Big|\beta - \dfrac{1}{2}\Big|$.
   (b) On pose $\Delta_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta-1/2}{n}(f(1) - f(0))$.
   Prouver que $|\Delta_n| \leqslant \dfrac{C}{n^2}$.

Troisième partie

On revient à l'étude de la fonction g_n dans le cas général.

1. Pour tout réel $x > n$, calculer $h_n(x) = \dfrac{g_n'(x)}{g_n(x)}$.

   Montrer que sur $]n, +\infty[$, la dérivée de g_n s'annule en un point x_n unique.

   Etudier le signe de $g_n'(x)$ sur $]n, +\infty[$. On pose $M_n = g_n(x_n)$.

2. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

   On considère la fonction f_α définie par $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha - x}$.

   (a) Déterminer en fonction de a la valeur de α pour laquelle on a :

   $$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

   Dans toute la suite, on pose $\alpha = \frac{a}{a-1}$.

   (b) Vérifier que $h_n(n\alpha + \beta) = \frac{1}{n\alpha+\beta} - \frac{\beta-1/2}{n}(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)) - \Delta_n$,
   où Δ_n a été défini dans la question II-2 (avec ici $f = f_\alpha$.)

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, h_n(n\alpha + \beta) = \frac{\alpha-\beta-1/2}{\alpha(\alpha-1)}$.

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $n\alpha \leqslant x_n \leqslant (n+1)\alpha$.

   A cet effet, on étudiera les signes de $h_n(n\alpha)$ et de $h_n((n+1)\alpha)$.

4. (a) On se propose de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, avec $y_n = \frac{1}{n}\ln\prod\limits_{k=0}^{n}\frac{x_n-k}{n}$.

   Pour celà, on utilisera l'encadrement précédent de x_n ; on utilisera le résultat de la question II-2-b avec $f(x) = \ln(\alpha - x)$, avec $\beta = 0$ puis $\beta = \alpha$.

   On en déduira que la limite cherchée est : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha - x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Calculer cette intégrale.

   (c) Montrer finalement que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sqrt[n]{M_n}$ converge vers $\frac{1}{\mathrm{e}(a-1)}$.

© Jean-Michel Ferrard

Corrigé

Première partie

1. (a) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $g_1(x) = x(x-1)a^{-x}$.

L'application g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et elle s'annule en 0 et 1.

Sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$: $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \ln a = \dfrac{-x^2 \ln a + (2+\ln a)x - 1}{x(x-1)}$

L'application $\dfrac{g_1'}{g_1}$ s'annule en même temps que $P(x) = x^2 \ln a - (2+\ln a)x + 1$.

Le discriminant est $\Delta = 4 + \ln^2 a > 0$. Les deux zéros réels et distincts de P sont :

$$u = \frac{2+\ln a - \sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{2+\ln a + \sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a}$$

On remarque que $u + v = \dfrac{2+\ln a}{\ln a} > 0$ et $uv = \dfrac{1}{\ln a} > 0$, ce qui prouve $0 < u < v$.

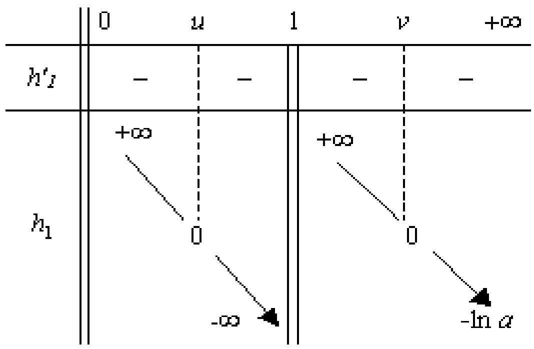
D'autre part, $P(1) = -1 < 0$ ce qui implique $0 < u < 1 < v$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\left(\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)}\right)' = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$.

Voici le tableau de variations de l'application $h_1 = \dfrac{g_1'}{g_1}$:

On trouve facilement

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{0^+} \frac{g_1'}{g_1} = +\infty$,
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{1^-} \frac{g_1'}{g_1} = -\infty$,
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{1^+} \frac{g_1'}{g_1} = +\infty$,
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{g_1'}{g_1} = -\ln a$.



(b) Comme $g_1 < 0$ sur $]0,1[$ et $g_1 > 0$ sur $]1,+\infty[$, la question a) donne le signe de g_1' :

- $\diamond$ L'application g_1' s'annule en u et v.
- $\diamond$ Pour tout x de $]0,u[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) < 0$.
- $\diamond$ Pour tout x de $]u,1[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} < 0$ donc $g_1'(x) > 0$.
- $\diamond$ Pour tout x de $]1,v[$, on a $g_1(x) > 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) > 0$.
- $\diamond$ Pour tout x de $]v,+\infty[$, on a $g_1(x) > 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} < 0$ donc $g_1'(x) < 0$.

Au voisinage de 0, on a $g_1(x) = (x^2 - x)(1 - x\ln a + \mathrm{o}(x)) = -x + (1 + \ln a)x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

On en déduit que g_1 est dérivable à droite en 0 (sa dérivée à droite valant -1.)

La courbe est localement au-dessus de sa tangente $(g_1(x) + x \sim (1 + \ln a)x^2 > 0)$

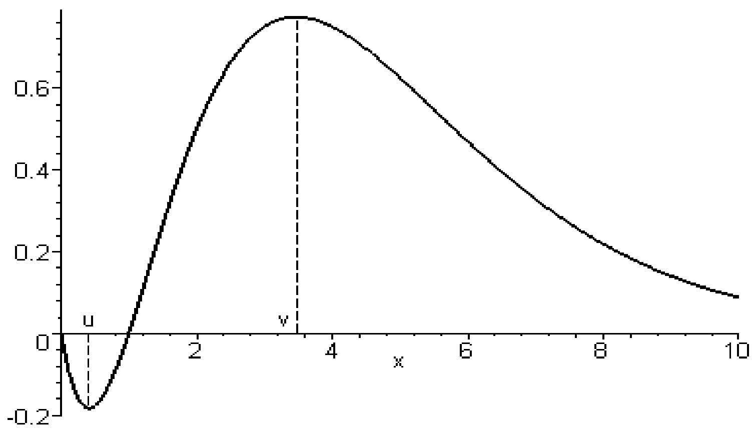
Enfin $\lim\limits_{+\infty} g_1(x) = 0^+$ (car $a > 1$).
La courbe $y = g_1(x)$ admet donc l'asymptote horizontale $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
Voici le tableau de variations de g_1 :

	0		u		1		v		$+\infty$
g_1'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
g_1	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

2. (a) On trouve sans se fatiguer :

$$\begin{cases} u = \dfrac{2 + \ln 2 - \sqrt{4 + \ln^2 2}}{2\ln 2} \approx 0.41581 \\ g_1(u) \approx -0.18209 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v = \dfrac{2 + \ln 2 + \sqrt{4 + \ln^2 2}}{2\ln 2} \approx 3.46958 \\ g_1(v) \approx 0.77349 \end{cases}$$

(b) Voici la courbe représentative de g_1, quand $a = 2$:



Deuxième partie

1. (a) Rappel : soit h une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. Soit $M = \sup\limits_{[a,b]} |h''|$.

Alors on a : $|h(b) - h(a) - (b - a)h'(a)| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2!} M$.

On applique ce résultat à f sur $I_k = \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k-\beta}{n}\right]$ (inclus dans $[-1, 1]$.)

On obtient : $\left| f\left(\dfrac{k-\beta}{n}\right) - f\left(\dfrac{k}{n}\right) + \dfrac{\beta}{n} f'\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| \leqslant \dfrac{\beta^2}{2n^2} \sup\limits_{I_k} |f''| \leqslant \dfrac{\beta^2 M}{2n^2}$

Autrement dit : $|R_1(k, n)| \leqslant \dfrac{A}{n^2}$, avec $A = \dfrac{\beta^2 M}{2}$.

(b) Rappel : soit h une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$. Soit $M = \sup\limits_{[a,b]} \left|h^{(3)}\right|$.

Alors $\left| h(b) - h(a) - (b - a)h'(a) - \dfrac{(b-a)^2}{2} h''(a) \right| \leqslant \dfrac{|b-a|^3}{3!} M$.

© Jean-Michel Ferrard

Considérons l'application $h : x \mapsto h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ définie sur $[-1,1]$.

Puisque f est continue, h est dérivable sur $[-1,1]$ et $h' = f$.

f étant de classe $\mathcal{C}^2$, h est de classe $\mathcal{C}^3$, et $h^{(3)} = f''$.

On applique le résultat précédent à h sur $J_k = \Big[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k-1}{n}\Big]$ (inclus dans $[-1,1]$.)

On trouve $\Big|h\Big(\dfrac{k-1}{n}\Big) - h\Big(\dfrac{k}{n}\Big) + \dfrac{1}{n}h'\Big(\dfrac{k}{n}\Big) - \dfrac{1}{2n^2}h''\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \dfrac{M}{6n^3}$

Mais $h\Big(\dfrac{k-1}{n}\Big) - h\Big(\dfrac{k}{n}\Big) = \displaystyle\int_0^{(k-1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Compte tenu de $h'\Big(\dfrac{k}{n}\Big) = f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$ et de $h''\Big(\dfrac{k}{n}\Big) = f'\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$ on trouve :

$$\Big|-\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{M}{6n^3}$$

Autrement dit $|R_2(k,n)| \leqslant \dfrac{B}{n^3}$, avec $B = \dfrac{M}{6}$.

2. (a) On constate successivement que

$$R_2(k,n) + \frac{1}{n}R_1(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big(\frac{1}{2} - \beta\Big) - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big)$$

$$R_3(k,n) = R_2(k,n) + \frac{1}{n}R_1(k,n) - \frac{1}{n}\Big(\beta - \frac{1}{2}\Big)\overbrace{\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k-1}{n}\Big) - \frac{1}{n}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)}^{\text{noté provisoirement } \overline{R}_1(k,n)}$$

Appliquée à R_1 avec $\beta = 1$, la question 1-a donne $\big|\overline{R}_1(k,n)\big| \leqslant \dfrac{\overline{A}}{n^2}$, avec $\overline{A} = \dfrac{M}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{On en déduit : } |R_3(k,n)| &= \Big|R_2(k,n) + \frac{1}{n}R_1(k,n) - \frac{1}{n}\Big(\beta - \frac{1}{2}\Big)\overline{R}_1(k,n)\Big| \\ &\leqslant |R_2(k,n)| + \frac{1}{n}\,|R_1(k,n)| + \frac{1}{n}\Big|\beta - \frac{1}{2}\Big|\,|R_1(k,n)| \\ &\leqslant \frac{C}{n^3}, \quad \text{avec } C = B + A + \Big|\beta - \frac{1}{2}\Big|\,\frac{M}{2}\end{aligned}$$

(b) On voit que $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n R_3(k,n)$, et pour tout k on a $|R_3(k,n)| \leqslant \dfrac{C}{n^3}$.

On en déduit $|\Delta_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^n |R_3(k,n)| \leqslant \dfrac{C}{n^2}$.

Troisième partie

1. Sur $\mathbb{R}^+$, l'application $x \mapsto g_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n)a^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x > n$, on a $h_n(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \cdots + \dfrac{1}{x-n} - \ln a$.

Comme chaque $x \mapsto \dfrac{1}{x-k}$, l'application h_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to n^+} h_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = -\ln a > 0$.

L'application h_n est donc une bijection de $]n,+\infty[$ sur $]-\ln a,+\infty[$.

En particulier, puisque 0 est dans $]-\ln a,+\infty[$, $\exists\,!x_n > n$ tel que $h_n(x_n) = 0$.

Autrement dit, il existe un unique x_n de $]n,+\infty[$ tel que $g'_n(x_n) = 0$.

Sur $]n,+\infty[$ l'application g_n est strictement positive : g'_n a donc le signe de h_n.

Par conséquent : $\begin{cases} \forall\, x \in]\,n, x_n[,\ g'_n(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\,x_n, +\infty\,[,\ g'_n(x) < 0 \end{cases}$

2. (a) Pour tout $\alpha > 1$, on a les égalités :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\Big(\frac{k}{n}\Big) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha - \frac{k}{n}} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\alpha - t}\\ = \frac{1}{n\alpha} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\alpha - k} + \Big[\ln|\alpha - t|\Big]_0^1 &= \frac{1}{n\alpha} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\alpha - k} + \ln\frac{\alpha - 1}{\alpha}\end{aligned}$$

D'autre part $h_n(n\alpha) = \dfrac{1}{n\alpha} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\alpha - k} - \ln a$.

La valeur de α qui convient est déterminée par $\dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = \dfrac{1}{a}$. Ainsi $\alpha = \dfrac{a}{a-1}$.

On vérifie bien que si $a = 2$ alors $\alpha = 2$.

(b) D'après la question précédente, : $-\ln a = \ln\dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = -\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

On en déduit : $$\begin{aligned} h_n(n\alpha + \beta) &= \frac{1}{n\alpha + \beta} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\alpha + \beta - k} - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\Big(\frac{k - \beta}{n}\Big) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\Big(\frac{k - \beta}{n}\Big) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\Big(\beta - \frac{1}{2}\Big)(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)) - \Delta_n$.

On en tire finalement : $h_n(n\alpha + \beta) = \dfrac{1}{n\alpha + \beta} - \dfrac{1}{n}\Big(\beta - \dfrac{1}{2}\Big)(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)) - \Delta_n$

(c) D'après II-2-b, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Delta_n = 0$. De plus $f_\alpha(1) - f_\alpha(0) = \dfrac{1}{\alpha - 1} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha(\alpha - 1)}$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} nh_n(n\alpha + \beta) = \dfrac{1}{\alpha} - \Big(\beta - \dfrac{1}{2}\Big)(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)) = \dfrac{\alpha - \beta - 1/2}{\alpha(\alpha - 1)}$

3. Le résultat précédent a été obtenu pour un élément quelconque β de $\mathbb{R}^+$.

En particulier avec $\beta = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} nh_n(n\alpha) = \dfrac{\alpha - 1/2}{\alpha(\alpha - 1)} > 0$ (car $\alpha > 1$.)

De même, avec $\beta = \alpha$, on trouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} nh_n((n+1)\alpha) = \dfrac{-1}{2\alpha(\alpha - 1)} < 0$.

Pour n assez grand on a donc $h_n((n+1)\alpha) < 0 < h_n(n\alpha)$.

Or sur l'intervalle $]n,+\infty[$, g'_n et h_n ont le même signe.

On en déduit que pour n assez grand on a $g'_n((n+1)\alpha) < 0 < g'_n(n\alpha)$.

© Jean-Michel Ferrard

Compte tenu de la continuité de g_n', l'unique zéro x_n de g_n' sur $]n,+\infty[$ est donc compris entre $n\alpha$ et $(n+1)\alpha$ quand n est assez grand.

Conclusion : il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N \Rightarrow n\alpha \leqslant x_n \leqslant (n+1)\alpha$.

4. (a) Avec les notations précédentes, on suppose $n \geqslant N$ (ce qui ne change rien à $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.)

Compte tenu de la croissance de $x \to \ln x$, et de $n\alpha \leqslant x_n \leqslant (n+1)\alpha$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\Big(\frac{n\alpha-k}{n}\Big) \leqslant y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\Big(\frac{x_n-k}{n}\Big) \leqslant v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\Big(\frac{(n+1)\alpha-k}{n}\Big)$$

Le résultat de II-2-b, appliqué à $f : x \mapsto \ln(\alpha - x)$ (qui est $\mathcal{C}^2$) donne :

– Avec $\beta = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(\alpha-\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2n}\ln\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big)\\ &= \int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x - u_n + \frac{1}{n}\ln\alpha + \frac{1}{2n}\ln\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big)\end{aligned}$$

On en déduit : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2n}\ln(\alpha(\alpha-1)) - \Delta_n$.

Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n = 0$, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x$.

– Avec $\beta = \alpha$:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(\alpha-\frac{k-\alpha}{n}\Big) - \frac{2\alpha-1}{2n}\ln\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big)\\ &= \int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x - v_n + \frac{1}{n}\ln\Big(\alpha+\frac{\alpha}{n}\Big) - \frac{2\alpha-1}{2n}\ln\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big)\end{aligned}$$

On en déduit : $v_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big) - \frac{2\alpha-1}{2n}\ln\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big) - \Delta_n$.

On fait tendre n vers $+\infty$ et on trouve : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x$.

Pour $n \geqslant N$, on connait l'encadrement : $u_n \leqslant y_n \leqslant v_n$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x$.

(b) On pose $\ln(\alpha-x) = u'(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 & u(x) = x-\alpha \\ v(x) = \ln(\alpha-x) & v'(x) = \dfrac{1}{x-\alpha}\end{cases}$

L'intégration par partie s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(x-\alpha)\ln(\alpha-x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x\\ &= (1-\alpha)\ln(\alpha-1) + \alpha\ln\alpha - 1 = \ln\frac{(\alpha-1)^{1-\alpha}\alpha^\alpha}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

(c) On a $M_n = g_n(x_n) = a^{-x_n}\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x_n-k) = n^{n+1}a^{-x_n}\prod_{k=0}^{n}\frac{x_n-k}{n}$.

On en déduit $\dfrac{1}{n}M_n^{1/n} = \Bigl(\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\dfrac{x_n-k}{n}\Bigr)^{1/n} n^{1/n}\,a^{-x_n/n} = \mathrm{e}^{\,y_n}\,n^{1/n}\,a^{-x_n/n}$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\exp\dfrac{\ln n}{n} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\,y_n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}(\alpha-1)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}$.

Pour n assez grand, on sait que $\alpha \leqslant \dfrac{x_n}{n} \leqslant \Bigl(1+\dfrac{1}{n}\Bigr)\alpha$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^{-x_n/n} = a^{-\alpha}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}M_n^{1/n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}(\alpha-1)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}\,a^{-\alpha}$.

On peut exprimer cette limite en fonction de a car $a = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

On trouve $(\alpha-1)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}\,a^{-\alpha} = (\alpha-1)\Bigl(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\Bigr)^{\alpha}a^{-\alpha} = \alpha-1 = \dfrac{1}{a-1}$.

On obtient donc finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}M_n^{1/n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,(a-1)}$.