Questions d'irrationalité

On notera $\mathscr{I}$ l'ensemble des nombres réels qui sont irrationnels.

1. (a) Soit $A(t) = t^m - c_{m-1}t^{m-1} - \cdots - c_1 t - c_0$, avec $(c_0, \ldots, c_{m-1})$ dans $\mathbb{Z}^m$ et m dans $\mathbb{N}^*$.
   Soit t une racine réelle de A. Montrer que t est ou bien dans $\mathbb{Z}$ ou bien dans $\mathscr{I}$.
   (b) Soit (n, m) dans $\mathbb{N}^2$, avec $m \geqslant 2$. Montrer que $\sqrt[m]{n}$ est dans $\mathbb{N}$, sinon dans $\mathscr{I}$.
   (c) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ puis $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont dans $\mathscr{I}$.
2. Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme $A_n(t) = \dfrac{t^n(1-t)^n}{n!}$.
   (a) Montrer que pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$, on a l'encadrement : $0 \leqslant A_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4^n n!}$.
   (b) Montrer que pout tout m de $\mathbb{N}$, $A_n^{(m)}(0)$ est dans $\mathbb{Z}$.
   (c) En remarquant que $A_n(t) = A_n(1-t)$, montrer qu'il en est de même pour $A_n^{(m)}(1)$.
3. Soit p un entier strictement positif. On va montrer que e^p est un irrationnel.
   Par l'absurde, on pose $\mathrm{e}^p = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\varphi_n(t) = b\mathrm{e}^{pt} \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k p^{2n-k} A_n^{(k)}(t)$.
   (a) Vérifier que $\varphi_n(0)$ et $\varphi_n(1)$ sont des entiers relatifs.
   (b) Montrer que $\varphi_n'(t) = b\mathrm{e}^{pt} p^{2n+1} A_n(t)$.
   (c) En déduire l'égalité : $\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = b\, p^{2n+1} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{pt} A_n(t)\,\mathrm{d}t$
   (d) Majorer $|\varphi_n(1) - \varphi_n(0)|$ en utilisant (2a).
   Aboutir à une contradiction si on choisit n assez grand. Conclusion ?
4. On généralise ici les résultats de la question précédente.
   (a) Montrer que si r est dans $\mathbb{Q}^*$, alors e^r est dans $\mathscr{I}$.
   (b) En déduire que pour tout r de $\mathbb{Q}^{+*}$ (avec $r \neq 1$) le réel $\ln r$ est irrrationnel.
5. Dans cette question, on va montrer que π^2 est irrationnel (il en découle que π est irrationnel.)
   Par l'absurde, on pose $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, où a, b sont dans $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel n, on pose $\psi_n(t) = b^n \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} A_n^{(2k)}(t)$.
   (a) Vérifier que $\psi_n(0), \psi_n(1)$ sont entiers.
   (b) On pose $\xi(t) = \psi_n'(t) \sin \pi t - \pi\psi_n(t) \cos \pi t$. Montrer que $\xi'(t) = \pi^2 a^n A_n(t) \sin \pi t$.
   (c) En déduire que $\psi_n(0) + \psi_n(1) = \pi a^n \displaystyle\int_0^1 A_n(t) \sin \pi t\,\mathrm{d}t$.
   (d) Majorer $|\psi_n(1) + \psi_n(0)|$ et aboutir à une contradiction. Conclusion ?
6. On établit ici que le seul rationnel r de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos \pi r$ soit rationnel est $r = \frac{1}{3}$.
   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme T_n de degré n, à coefficients entiers (de coefficient dominant 2^{n-1}) tel que $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$.
   (b) On pose $r = \dfrac{m}{n}$, et on suppose que $\cos \pi r = \dfrac{p}{q}$, avec $\begin{cases} m \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2,\ m \wedge n = 1 \\ p, q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1 \end{cases}$
   En considérant $\cos n\theta$ avec $\theta = \pi r$ montrer : $\exists\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ q = 2^k$, et que p est impair.
   (c) Par l'absurde, on suppose que l'entier k est strictement supérieur à 1.
   Appliquer ce qui précède à l'angle $\theta_1 = 2\theta$ et prouver que $k < k_1 < n$, avec $k_1 = 2k - 1$.
   Rien n'empêche alors de considérer les angles $\theta_2 = 2\theta_1$, $\theta_3 = 2\theta_2$, etc.
   Conclure à une absurdité, et en déduire que $\cos \pi r = \dfrac{1}{2}$, donc que $r = \dfrac{1}{3}$.

Corrigé du problème

1. (a) On suppose que t soit une racine rationnelle de A.

   Il existe donc a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}^*$, avec $a \wedge b = 1$ tels que $t = \frac{a}{b}$.

   L'égalité $A(t) = 0$ s'écrit $\frac{a^m}{b^m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k \frac{a^k}{b^k}$ ou encore $a^m = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k a^k b^{m-k}$.

   Cette égalité s'écrit $a^m = br$, en posant $r = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k a^k b^{m-k-1}$.

   Puisque r est un entier, il en découle que b divisie a^m.

   Mais b étant premier avec a (donc avec a^m) cela n'est possible que si $b = 1$.

   Ainsi $t = a$ est dans $\mathbb{Z}$: les seules racines possibles de $A(t)$ dans $\mathscr{I}$ sont des entiers.

   Conclusion : une racine réelle de A est soit entière, soit irrationnelle.

   (b) Le réel $\sqrt[m]{n}$ est racine du polynôme $A(t) = t^m - n$ (unitaire à coefficients entiers...)

   On est donc dans les conditions d'application de la question précédente.

   Si n n'est pas la puissance m-ième d'un entier (si $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{N}$) on en déduit que $\sqrt[m]{n}$ est dans $\mathscr{I}$.

   (c) Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. On a $(x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$.

   On en déduit $x^2 - 1 = 2\sqrt{2}x$ puis $(x^2 - 1)^2 = 8x^2$ donc $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

   $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est non entier ($3 < x < 4$) et racine de $A(t) = t^4 - 10t^2 + 1$.

   On peut donc appliquer le résultat de la question (a) : le réel x est un irrationnel.

   Posons $y = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = x + \sqrt{5}$.

   En utilisant ce qui précède, on peut écrire :

   $0 = x^4 - 10x^2 + 1 = (y - \sqrt{5})^4 - 10(y - \sqrt{5})^2 + 1 = y^4 - 4\sqrt{5}y^3 + 20y^2 - 24$.

   Ainsi $(y^4 + 20y^2 - 24)^2 = 80y^6$, donc $B(y) = 0$, avec $B(t) = (t^4 + 20t^2 - 24)^2 - 80t^6$.

   Le polynôme B est unitaire à coefficients entiers.

   Comme y n'est pas entier ($5 < y < 6$), on en déduit que y est irrationnel.

2. (a) On sait que $0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$ sur $]0, 1[$. Le résultat en découle immédiatement.

   (b) A_n est un polynôme de degré $2n$.

   On développe $A_n(t)$ et on trouve : $A_n(t) = \dfrac{t^n}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^k t^k = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^k t^{n+k}$

   — La dérivée m-ième de t^{n+k} est nulle si $m > n + k$.

   — Elle vaut $\dfrac{(n+k)!\, t^{n+k-m}}{(n+k-m)!}$ si $m \leqslant n + k$.

   Dans ce cas sa valeur en zéro est nulle si $m < n + k$ et vaut $m!$ si $m = n + k$.

   On en déduit que la valeur en 0 de la dérivée m-ième de A_n est nulle (donc est élément de $\mathbb{Z}$) sauf s'il existe un entier k de $\{0, \ldots, n\}$ tel que $m = n + k$, c'est-à-dire sauf si m appartient à $\{n, \ldots, 2n\}$.

   Dans ce cas, la dérivée en 0 du polynôme A_n est égale à celle de son terme de degré $n + k = m$, c'est-à-dire celle du monôme $\dfrac{(-1)^{m-n}}{n!} \dbinom{n}{m-n} t^m$.

   Donc si $n \leqslant m \leqslant 2n$, : $P_n^{(m)}(0) = (-1)^{m-n} \dfrac{m!}{n!} \dbinom{n}{m-n}$, qui est dans $\mathbb{Z}$.

   Dans tous les cas, $P_n^{(m)}(0)$ est donc un entier relatif.

   (c) Pour tout réel t, on a $A_n(t) = A_n(1-t)$, et par dérivation : $P_n'(t) = -P_n'(1-t)$.

   Un récurrence évidente donne alors : $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A_n^{(m)}(t) = (-1)^m A_n(t)$.

   En particulier : $\forall m \in \mathbb{N},\ P^{(m)}(1) = (-1)^n P^{(m)}(0)$ est élément de $\mathbb{Z}$.

3. (a) On $\varphi_n(0) = b\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k p^{2n-k}A_n^{(k)}(0)$ et $\varphi_n(1) = a\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k p^{2n-k}A_n^{(k)}(1)$.

   On sait que les $A_n^{(k)}(0)$ et $A_n^{(k)}(1)$ sont des entiers relatifs.

   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on en déduit que $\varphi_n(0)$ et $\varphi_n(1)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

   (b) On trouve $\varphi_n'(t) = b\mathrm{e}^{pt}\Big(p\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k p^{2n-k}A_n^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k p^{2n-k}A_n^{(k+1)}(t)\Big)$.

   Après changement d'indice dans la deuxième somme, on obtient :

   $\varphi_n'(t) = b\mathrm{e}^{pt}\Big(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k p^{2n-k+1}A_n^{(k)}(t) - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k p^{2n-k+1}A_n^{(k)}(t)\Big)$

   Après télescopage, il reste : $\varphi_n'(t) = b\mathrm{e}^{pt}\Big(p^{2n+1}A_n^{(0)}(t) + A_n^{(2n+1)}(t)\Big) = b\mathrm{e}^{pt}p^{2n+1}A_n(t)$.

   (c) Si on intègre cette égalité de $t = 0$ à $t = 1$, on obtient :

   $\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n'(t)\,\mathrm{d}t = bp^{2n+1}\int_0^1 \mathrm{e}^{pt}A_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   (d) Sur $[0,1]$ on a les encadrements $0 \leqslant A_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4^n n!}$ et $0 \leqslant \mathrm{e}^{pt} \leqslant \mathrm{e}^p$.

   Par majoration dans l'intégrale, on en déduit l'inégalité : $|\varphi_n(1) - \varphi_n(0)| \leqslant \dfrac{p^{2n+1}}{4^n n!}\,b\mathrm{e}^p$.

   Mais pour tout $\lambda > 0$, $\dfrac{\lambda^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   On en déduit que la suite de terme général $u_n = \varphi_n(1) - \varphi_n(0)$ converge vers 0.

   Mais c'est un suite d'entiers. Il existe donc un entier m tel que $\varphi_m(1) = \varphi_m(0)$.

   Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{pt}A_m(t)\,\mathrm{d}t = 0$, puis $A_m(t) \equiv 0$ sur $[0,1]$ (positivité et continuité.)

   Ce résultat est absurde car A_m est un polynôme de degré $2m$.

   Il découle de ce qui précède que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, e^p est irrationnel.

4. (a) Soit $r = \dfrac{p}{q}$ dans $\mathbb{Q}^{+*}$, avec p, q dans $\mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

   Posons $y = \mathrm{e}^r$. Puisque $y^q = \mathrm{e}^p$ n'est pas rationnel, il en est de même de y.

   Si r est dans $\mathbb{Q}^{-*}$: e^{-r} n'est pas rationnel donc son inverse e^r n'est pas rationnel.

   Concluion : pour tout rationnel r non nul, e^r est un irrationnel.

   (b) Soit r dans $\mathbb{Q}^{+*}$, avec $r \neq 1$. Le réel $s = \ln r$ est non nul.

   Puisque e^s est rationnel, il découle de la question précédente que s est dans $\mathscr{I}$.

5. (a) Pour tout entier k de $\{0, \ldots, n\}$, le réel $b^n\pi^{2n-2k} = b^k a^{n-k}$ est un entier.

   Les $A_n^{(2k)}(0), A_n^{(2k)}(1)$ étant dans $\mathbb{Z}$, on en déduit que $\psi_n(0), \psi_n(1)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

   (b) On trouve tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\xi'(t) &= \psi_n''(t)\sin\pi t + \pi\psi_n'(t)\cos\pi t - \pi\psi_n'(t)\cos\pi t + \pi^2\psi_n(t)\sin\pi t\\
&= (\pi^2\psi_n(t) + \psi_n''(t))\sin\pi t\\
&= b^n\Big(\pi^2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}A_n^{(2k)}(t) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}A_n^{(2k+2)}(t)\Big)\sin\pi t
\end{aligned}$$

   On effectue un changement d'indice dans la deuxième somme :

   $\xi'(t) = b^n\pi^2\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}A_n^{(2k)}(t) - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\pi^{2n-2k}A_n^{(2k)}(t)\Big)\sin\pi t$

   Après télescopage, et compte tenu de ce que A_n est de degré $2n$, on trouve :

   $\xi'(t) = b^n\pi^2(\pi^{2n}A_n(t) + (-1)^n\pi^{-2}A_n^{(2n+2)}(t))\sin\pi t = b^n\pi^{2n+2}A_n(t)\sin\pi t$

   Sachant que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, cela se réduit à $\xi'(t) = a^n\pi^2 A_n(t)\sin\pi t$.

(c) On intègre l'égalité précédente entre $t = 0$ et $t = 1$. On trouve :

$\xi(1) - \xi(0) = \displaystyle\int_0^1 \xi'(t)\,\mathrm{d}t = a^n \pi^2 \int_0^1 A_n(t)\sin \pi t\,\mathrm{d}t$. Mais $\begin{cases} \xi(1) = \pi\psi_n(1) \\ \xi(0) = -\pi\psi_n(0) \end{cases}$

On trouve donc : $\psi_n(0) + \psi_n(1) = \pi a^n \displaystyle\int_0^1 A_n(t)\sin \pi t\,\mathrm{d}t$.

(d) Sur le segment $[0,1]$ on a $0 \leqslant A_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4^n n!}$ et $0 \leqslant \sin \pi t \leqslant 1$.

Par majoration dans l'intégrale, on en déduit l'inégalité : $|\psi_n(0) + \psi_n(1)| \leqslant \dfrac{\pi a^n}{4^n n!}$.

On en déduit comme dans que la suite $v_n = \psi_n(0) + \psi_n(1)$ converge vers 0.

Mais c'est un suite d'entiers. Il existe donc un entier m tel que $\psi_m(0) + \psi_m(1)$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 A_m(t)\sin \pi t\,\mathrm{d}t = 0$, puis $A_m(t) \equiv 0$ sur $[0,1]$ (positivité et continuité.)

Ce résultat est absurde car A_m est un polynôme de degré $2m$.

Il découle de ce qui précède que π^2 donc π sont irrationnels.

6. (a) La propriété est vraie si $\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$ avec $\begin{cases} T_0(t) = 1 \\ T_1(t) = 2t^2 - 1 \end{cases}$ $(\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1.)$

Soit un entier $n \neq 2$, tel que la propriété soit vraie aux rangs $n-2$ et $n-1$.

On peut donc écrire $\begin{cases} \cos(n-2)\theta = T_{n-2}(\cos\theta) \\ \cos(n-1)\theta = T_{n-1}(\cos\theta) \end{cases}$ avec $\begin{cases} \deg T_{n-2} = 2^{n-2} \\ \deg T_{n-1} = 2^{n-1} \end{cases}$

On note que $\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$.

On en déduit $\cos n\theta = 2\cos\theta\, T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta)$.

Cette égalité s'écrit : $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, avec $T_n(t) = 2t\,T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t)$.

T_{n-2} et T_{n-1} étant des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, il en est de même de T_n.

Puisque $\deg T_{n-1} = n-1$ et $\deg T_{n-2} = n-2$, on voit que $\deg T_n = n$.

Enfin le coefficient dominant de T_n est le double de celui de T_{n-1}, c'est-à-dire 2^{n-1}.

Tout cela prouve que la propriété est vraie au rang n et achève la récurrence.

(b) Posons $\theta = \pi r$. On constate que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta = \cos m\pi = (-1)^m$.

Mais le polynôme T_n peut s'écrire $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j t^j$, où les a_j sont dans $\mathbb{Z}$.

Avec $t = \cos\theta = \dfrac{p}{q}$, on trouve $2^{n-1}\dfrac{p^n}{q^n} + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j \dfrac{p^j}{q^j} - (-1)^n = 0$.

Après multiplication par q^n, cela peut s'écrire : $2^{n-1}p^n = -\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j p^j q^{n-j} + (-1)^n q^n$.

Mais le second membre est un entier multiple de q.

On en déduit que q divise $2^{n-1}p^n$, donc qu'il divise 2^{n-1}, car $q \wedge p^n = 1$.

Il existe un entier k de $\{1, \ldots, n-1\}$ tel que $q = 2^k$ (on a $k \geqslant 1$ car $q \neq 0$.)

Puisque les entiers p et q sont premiers entre eux, il en découle que p est impair.

(c) Avec $\theta_1 = 2\theta$, on a $\cos\theta_1 = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2p^2}{q^2} - 1 = \dfrac{p^2 - 2^{2k-1}}{2^{2k-1}}$.

Cela s'écrit $\cos\theta_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$, où $\begin{cases} q_1 = 2^{2k-1} \\ p_1 = p^2 - 2^{2k-1} \end{cases}$ avec $p_1 \wedge q_1 = 1$ (en effet p est impair.)

D'autre part $\cos n\theta_1 = \cos 2m\pi = 1$. On peut donc reprendre (a) avec θ_1 à la place de θ.

Il en résulte que q_1 s'écrit 2^{k_1} (on le savait déjà) avec $1 \leqslant k_1 \leqslant n-1$.

Or $q = 2^{2k-1}$ donc $k_1 = 2k-1$ et on trouve $1 \leqslant k \leqslant k_1 \leqslant n-1$. Supposons $k > 1$ par l'absurde.

On obtient $1 \leqslant k < k_1 \leqslant n-1$. On peut alors considérer $\theta_2 = 2\theta_1$, $\theta_3 = 2\theta_2$, etc.

On en déduit une suite d'entiers $k < k_1 < k_2 < \cdots$ strictement croissante et majorée par n : absurde.

Ainsi $k = 1$, donc $q = 2$, puis $p = 1$ car $\frac{p}{q} = \cos \pi r \in]0,1[$. Donc $\cos\pi r = \frac{1}{2}$.

Il en résulte $\pi r = \frac{\pi}{3}$, donc $r = \frac{1}{3}$: c'est le seul rationnel r de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos\pi r \in \mathbb{Q}$.