Étude d'une famille de fonctions

Pour tout réel λ, on note f_λ l'application définie par $f_\lambda(x) = \dfrac{4x}{\lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|}$.
On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ.

1. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_\lambda$ de f_λ.
   Placer soigneusement, les uns par rapport aux autres, les réels de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_\lambda$.

   (b) Montrer qu'on peut prolonger f_λ par continuité aux points 0 et 4.
   Dans la suite, on supposera que f_λ est ainsi prolongée.

2. (a) Étudier la dérivabilité de f_λ en 0 et en 4 (on donnera l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$.)

   (b) Étudier les asymptotes verticales de la courbe $\mathcal{C}_\lambda$.

   (c) Étudier l'application f_λ au voisinage de $\pm\infty$. On vérifiera notamment que $\mathcal{C}_\lambda$ est asymptote à une parabole quand $\lambda = 0$, et à une droite quand $\lambda \neq 0$. On précisera l'équation de l'asymptote et le placement de la courbe par rapport à celle-ci.

3. (a) Etudier les variations de l'application g_λ définie par $4g_\lambda(x) = \left(\lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|\right)^2 f'_\lambda(x)$.

   (b) En discutant suivant λ, déterminer le signe de f'_λ par intervalles.
   En déduire les tableaux de variation de f_λ dans les cas suivants :
   $\lambda > 2$, $\lambda = 2$, $0 < \lambda < 2$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

   (c) Construire les courbes pour $\lambda = 3$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda = -2$.

Corrigé du problème

Problème 1

1. (a) L'ensemble $\mathcal{D}_\lambda$ est $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ privé des solutions de l'équation $(E) : \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| + \lambda = 0$.

   Or $(E) \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-4}{x}\right| = \mathrm{e}^\lambda \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{x} = \varepsilon\,\mathrm{e}^\lambda \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{1-\varepsilon\,\mathrm{e}^\lambda}$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

   On en déduit : $\mathcal{D}_\lambda = \mathbb{R} \setminus \{0, 4, a_\lambda, b_\lambda\}$, en notant $a_\lambda = \dfrac{4}{1-\mathrm{e}^\lambda}$ et $b_\lambda = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^\lambda}$.

   On doit maintenant placer a_λ et b_λ par rapport à 0 et 4.

   – Si $\lambda = 0$, alors a_λ n'est pas défini et $b_\lambda = 2$. Dans ce cas $\mathcal{D}_\lambda = \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 4\}$.

   – Si $\lambda \neq 0$, alors $0, 4, a_\lambda, b_\lambda$ sont deux à deux distincts.

   Si $\lambda < 0$, on a $0 < b_\lambda < 4 < a_\lambda$; si $\lambda > 0$, et $a_\lambda < 0 < b_\lambda < 4$.

   (b) On a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lambda + \ln\left|\frac{x}{x-4}\right|\right) = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f_\lambda(x) = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = 0^-$.

   De même, $\displaystyle\lim_{x\to 4}\left(\lambda + \ln\left|\frac{x}{x-4}\right|\right) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 4} f_\lambda(x) = 0^+$.

   On peut ainsi prolonger f_λ par continuité en posant $f_\lambda(0) = f_\lambda(4) = 0$.

2. (a) On a $\dfrac{f_\lambda(x)}{x} = \dfrac{4}{\lambda + \ln|x| - \ln|x-4|} \underset{0}{\sim} \dfrac{4}{\ln|x|}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f_\lambda(x)}{x} = 0^-$.

   On en déduit que f_λ est dérivable en 0, avec $f'_\lambda(0) = 0$.

   La courbe $y = f_\lambda(x)$ présente donc une tangente horizontale à l'origine.

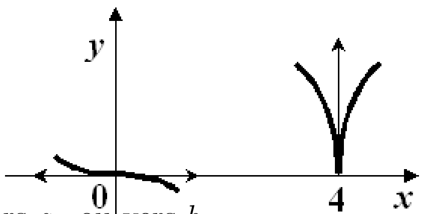
   En fait c'est une tangente d'inflexion car $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f_\lambda(x) = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = 0^-$.

   On a $\dfrac{f_\lambda(x)}{x-4} = \dfrac{4x}{(\lambda + \ln|x| - \ln|x-4|)(x-4)} \underset{4}{\sim} \dfrac{16}{(4-x)\ln|x-4|}$

   On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{f_\lambda(x)}{x-4} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{f_\lambda(x)}{x-4} = +\infty$.

   On en déduit que f_λ n'est pas dérivable en $x = 4$.

   Plus précisément, la courbe $y = f_\lambda(x)$ présente au point $(4, 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. Voici l'allure de la courbe au voisinage des points d'abscisses 0 et 4.



   (b) Il n'y a d'asymptote verticale que lorsque x tend vers a_λ ou vers b_λ.

   Notons $d_\lambda(x) = \lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|$. On a $d'_\lambda(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{4}{x(4-x)}$.

   d_λ est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]4, +\infty[$, et croissante sur $]0, 4[$.

   Or d_λ s'annule en a_λ et en b_λ. On en déduit les résultats suivants :

   – Si $\lambda < 0$, on a $0 < b_\lambda < 4 < a_\lambda$.

   Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to b_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^-$, $\displaystyle\lim_{x\to b_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^+$, $\displaystyle\lim_{x\to a_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^+$, $\displaystyle\lim_{x\to a_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^-$.

   Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to b_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to b_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a_\lambda^-} f_\lambda = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a_\lambda^+} f_\lambda(x) = -\infty$.

– Si $\lambda > 0$, on a $a_\lambda < 0 < b_\lambda < 4$ (attention au signe de a_λ...)

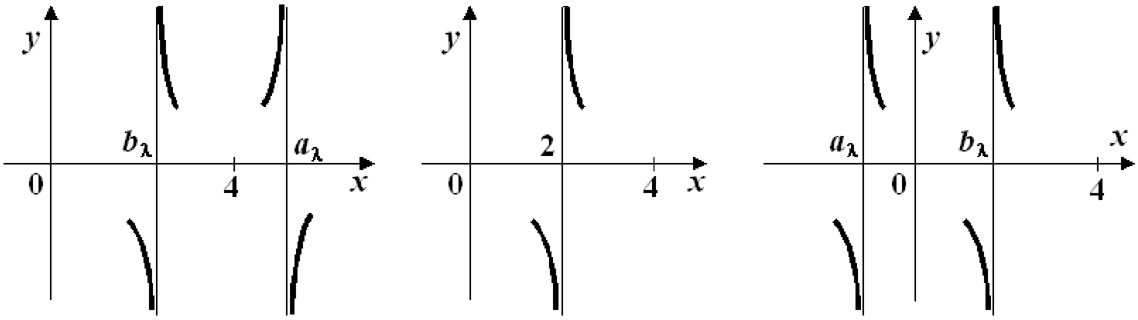
Ainsi $\lim\limits_{x\to a_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to a_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to b_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to b_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^+$.

Donc $\lim\limits_{x\to a_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty$.

– Si $\lambda = 0$, on a $0 < b_\lambda = 2 < 4$, et a_λ n'est pas défini.

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} d_\lambda(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to 2^+} d_\lambda(x) = 0^+$ puis $\lim\limits_{x\to 2^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f_\lambda(x) = +\infty$

On voit maintenant l'allure des asymptotes verticales, dans les différents cas.



$\lambda < 0$ $\quad$ $\lambda = 0$ $\quad$ $\lambda > 0$

(c) • *On commence par traiter le cas $\lambda = 0$.*

D'après l'énoncé, il faut arriver à $f_\lambda(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Il est plus simple de développer en 0. On pose $x = \dfrac{1}{X}$ et on trouve :

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{4x}{\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|} = \frac{-4}{X\ln(1-4X)} = \frac{4}{X\left(4X + 8X^2 + \dfrac{64}{3}X^3 + 64X^4 + \mathrm{o}(X^4)\right)}\\
&= \frac{1}{X^2}\left(1 + 2X + \frac{16}{3}X^2 + 16X^3 + \mathrm{o}(X^3)\right)^{-1}\\
&= \frac{1}{X^2}\left[1 - \left(2X + \frac{16}{3}X^2 + 16X^3\right) + \left(4X^2 + \frac{64}{3}X^3\right) - \left(8X^3\right) + \mathrm{o}(X^3)\right]\\
&= \frac{1}{X^2}\left(1 - 2X - \frac{4}{3}X^2 - \frac{8}{3}X^3 + \mathrm{o}(X^3)\right)\\
&= \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} - \frac{4}{3} - \frac{8X}{3} + \mathrm{o}(X)
\end{aligned}$$

On obtient $f_0(x) = x^2 - 2x - \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en revenant à la variable x.

Ainsi $\mathcal{C}_0$ est asymptote à la parabole $\mathcal{P}$: $y(x) = x^2 - 2x - \dfrac{4}{3}$ quand $x \to \pm\infty$.

Le placement est donné par le signe de la quantité $f_0(x) - y(x) \underset{\infty}{\sim} -\dfrac{8}{3x}$.

Ainsi $\mathcal{C}_0$ est au-dessus de $\mathcal{P}$ quand $x \to -\infty$ et en-dessous quand $x \to +\infty$.

Plus modestement, on a $f_0(x) \sim x^2$ au voisinage de $\pm\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\infty} = +\infty$.

La branche infinie est bien sûr une "branche parabolique" de direction Oy.

- *On va maintenant traiter le cas général* $\lambda \neq 0$. On pose toujours $X = 1/x$.

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x) &= \frac{4}{X(\alpha - \ln(1-4X))} = \frac{4}{\alpha X\Big(1 + \dfrac{4}{\alpha}\,X + \dfrac{8}{\alpha}\,X^2 + \dfrac{64}{3\alpha}\,X^3 + \mathrm{o}(X^3)\Big)} \\
&= \frac{4}{\alpha X}\left[1 - \Big(\frac{4}{\alpha}\,X + \frac{8}{\alpha}\,X^2 + \frac{64}{3\alpha}\,X^3\Big) + \Big(\frac{16}{\alpha^2}\,X^2 + \frac{64}{\alpha^2}\,X^3\Big) - \frac{64}{\alpha^3}\,X^3 + \mathrm{o}(X^3)\right] \\
&= \frac{4}{\alpha X}\left[1 - \frac{4}{\alpha}\,X + \frac{8(2-\alpha)}{\alpha^2}\,X^2 - \frac{64(\alpha^2 - 3\alpha + 3)}{3\alpha^3}\,X^3 + \mathrm{o}(X^3)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi : $f_\lambda(x) = \dfrac{4}{\alpha}\,x - \dfrac{16}{\alpha^2} + \dfrac{32(2-\alpha)}{\alpha^3}\,\dfrac{1}{x} - \dfrac{256(\alpha^2 - 3\alpha + 3)}{3\alpha^4}\,\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$

Cela traduit l'existence de l'asymptote oblique $y = \dfrac{4}{\alpha}\,x - \dfrac{16}{\alpha^2}$ quand $x \to \pm\infty$.

- Si $\alpha = 2$, on a $f_2(x) = 2x - 4 - \dfrac{16}{x^2} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$.

  Dans ce cas, la courbe est en-dessous de son asymptote quand $x \to \pm\infty$.

- Si $\alpha \neq 2$, le placement est donné par le signe de $\dfrac{2-\alpha}{\alpha\, x}$.

  Si $\alpha < 0$ ou $\alpha > 2$, la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$, et en-dessous au voisinage de $+\infty$.

  Si $0 < \alpha < 2$, la courbe est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$, et au-dessus au voisinage de $+\infty$.

S'il n'y avait pas eu le cas particulier $\alpha = 2$, on aurait pu se contenter de pousser le développement généralisé de $f_\lambda(x)$ à l'ordre immédiatement inférieur.

3. (a) On trouve $g_\lambda(x) = \lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| - x\Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4}\Big) = \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| + \lambda + \dfrac{4}{x-4}$.

L'application g_λ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

On observe que $\lim\limits_{x \to \infty} g_\lambda(x) = \lambda$ et que $\lim\limits_{x \to 0} g_\lambda(x) = -\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x \to 4}(x-4)\ln|x-4| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 4}(x-4)g_\lambda(x) = 4 \Rightarrow g_\lambda(x) \underset{4}{\sim} \dfrac{4}{x-4}$.

On en déduit $\lim\limits_{x \to 4^-} g_\lambda(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 4^+} g_\lambda(x) = +\infty$.

Enfin, pour $x \notin \{0, 4\}$, on trouve : $g_\lambda'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{4}{(x-4)^2} = \dfrac{8(2-x)}{x(x-4)^2}$.

On constate que $g_\lambda(2) = \lambda - 2$.

Voici le tableau des variations de g_λ.

$f_\lambda'(x)$ a le signe de $g_\lambda(x)$ sur $\mathcal{D}_\lambda$.

On voit que le nombre de solutions de $g_\lambda(x) = 0$ dépend du placement de λ par rapport à 0 et à 2.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
g'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
g	λ	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	λ-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	λ

On remarque qu'aux points $x \in \{a_\lambda, b_\lambda\}$, on a $g_\lambda(x) = \dfrac{4}{x-4} \neq 0$.

Autrement dit, les points éventuels où g_λ s'annule sont distincts de a_λ et de b_λ.

(b) On a vu que le nombre et la position des points où g_λ s'annule (donc où f'_λ s'annule) dépendent du placement de λ par rapport à 0 et à 2.

– $\boxed{\lambda > 2}$

g_λ (et donc f'_λ) s'annule en trois points x_0, x_1, x_2 tels que $x_0 < 0 < x_1 < 2 < x_2 < 4$.

On a alors $\begin{cases} g_\lambda(x) > 0 \text{ sur }]-\infty, x_0\,[\cup]\,x_1, x_2\,[\cup]\,4, +\infty\,[\\ g_\lambda(x) < 0 \text{ sur }]\,x_0, 0\,[\cup]\,0, x_1\,[\cup]\,x_2, 4\,[\end{cases}$

Soit $x \in \{a_\lambda, b_\lambda\}$. On a $\lambda > 0$ donc $x < 4$ (cf question 1a) donc $g_\lambda(x) = \dfrac{4}{x-4} < 0$.

On en déduit finalement : $x_0 < a_\lambda < 0 < b_\lambda < x_1 < 2 < x_2 < 4$.

On en déduit le signe de g_λ (donc de f'_λ), puis le tableau des variations de f_λ :

x	$-\infty$		x_0		a_λ		0		b_λ		x_1		2		x_2		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0		$+$		0	$-$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(x_0)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	$8/\lambda$	↗	$f(x_2)$	↘	0 ‖	↗	$+\infty$

– $\boxed{\lambda = 2}$

g_2 (et donc f'_2) s'annule en un point $x_0 < 0$ et en 2.

On a alors $\begin{cases} g_\lambda(x) > 0 \text{ sur }]-\infty, x_0\,[\cup]\,4, +\infty\,[\\ g_\lambda(x) < 0 \text{ sur }]\,x_0, 0\,[\cup]\,0, 2\,[\cup]\,2, 4\,[\end{cases}$

Soit $x \in \{a_\lambda, b_\lambda\}$. On a $\lambda > 0$ donc $x < 4$ (cf question 1a) donc $g_2(x) = \dfrac{4}{x-4} < 0$.

On en déduit finalement : $x_0 < a_\lambda < 0 < b_\lambda < 2$.

On en déduit le signe de g_2 (donc de f'_2), puis le tableau des variations de f_2 :

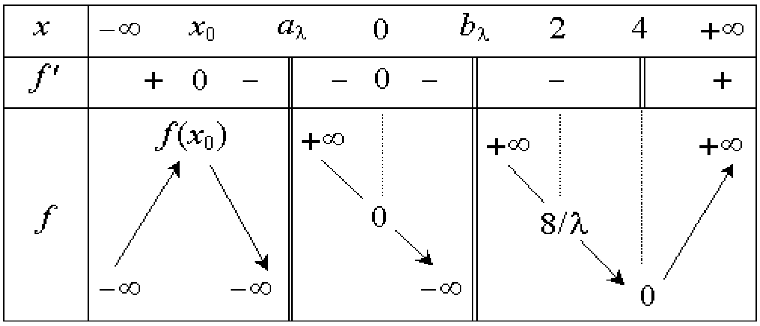
x	$-\infty$		x_0		a_λ		0		b_λ		2		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(x_0)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↘	0 ‖	↗	$+\infty$

– $\boxed{0 < \lambda < 2}$

g_λ (et donc f'_λ) s'annule en un seul point $x_0 < 0$.

On a alors $\begin{cases} g_\lambda(x) > 0 \text{ sur }]-\infty, x_0[\cup]4, +\infty[\\ g_\lambda(x) < 0 \text{ sur }]x_0, 0[\cup]0, ,4[\end{cases}$, et $x_0 < a_\lambda < 0 < b_\lambda < 2$.

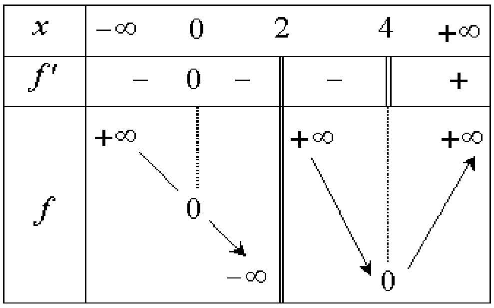
On en déduit le signe de g_λ (donc de f'_λ), puis le tableau des variations de f_λ :



– $\boxed{\lambda = 0}$

g_2 (et donc f'_2) ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_0$. Rappel : a_0 n'est pas défini et $b_0 = 2$.

On en déduit le signe de g_0 (donc de f'_0), puis le tableau des variations de f_0 :



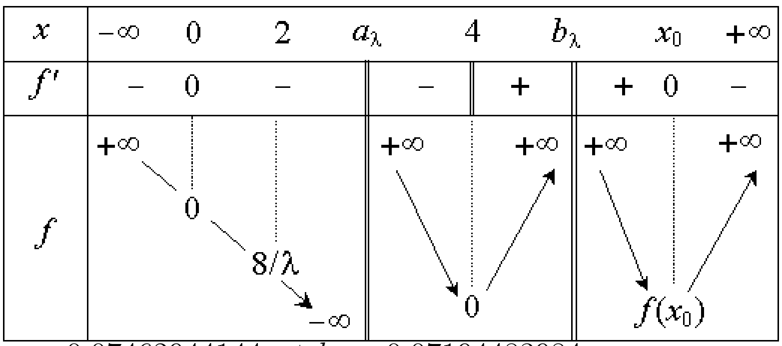
– $\boxed{\lambda < 0}$

g_λ (et donc f'_λ) s'annule en un seul point $x_0 > 0$.

Puisque $\lambda < 0$, on a $a_\lambda > 4$, donc $g_\lambda(a_\lambda) = \dfrac{4}{a_\lambda - 4} > 0$.

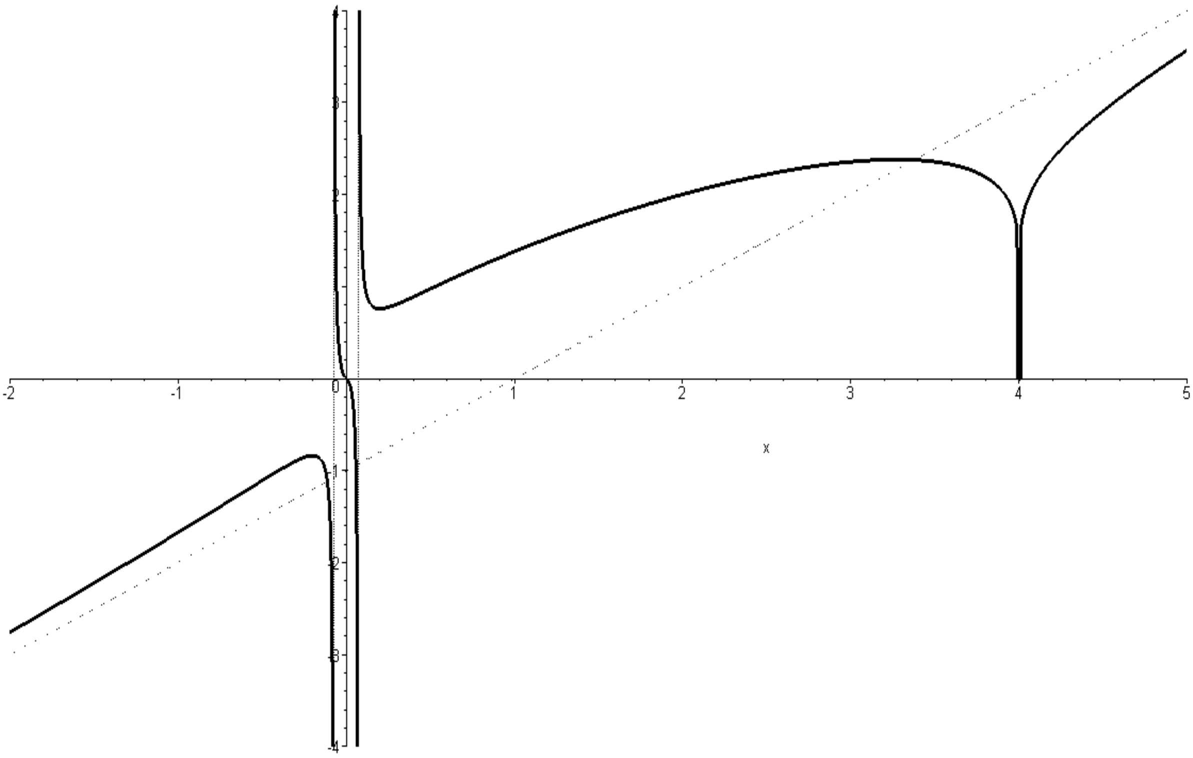
On en déduit finalement : $0 < 2 < b_\lambda < 4 < a_\lambda < x_0$.

Voici le tableau donnant le signe de g_λ (donc le signe de f'_λ) par intervalles :

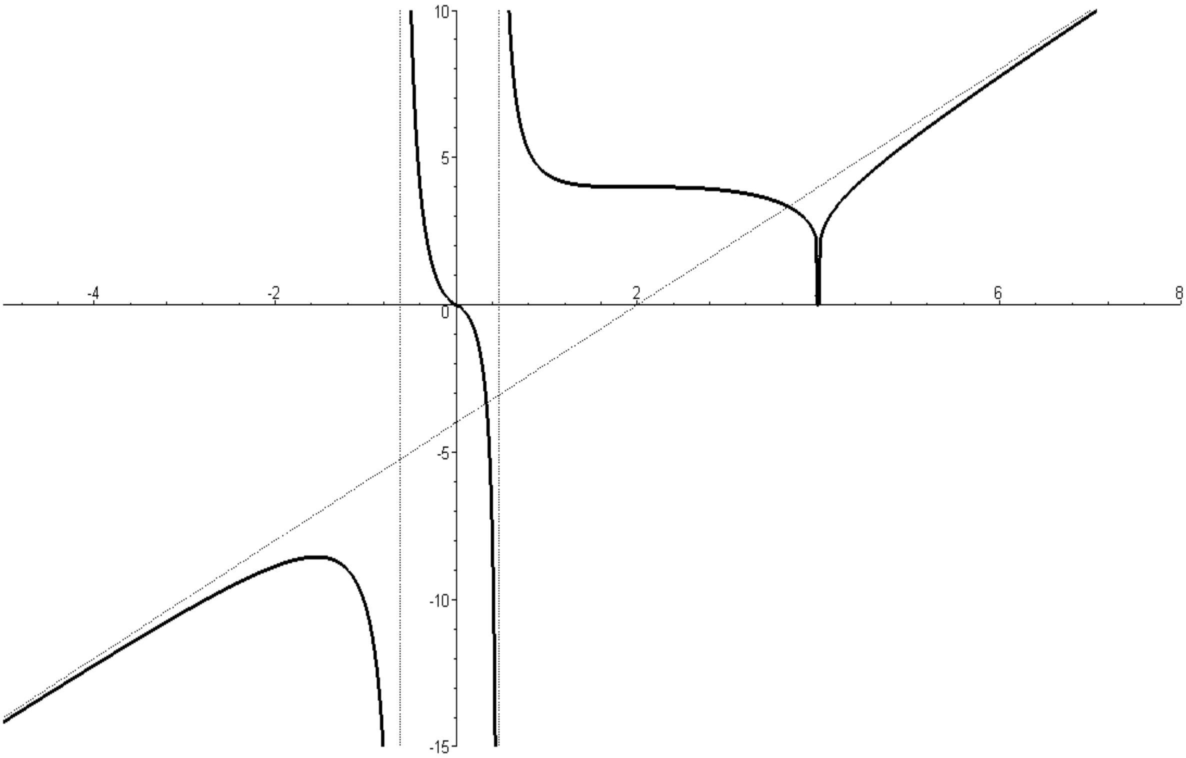


(c) $\boxed{\lambda = 4}$: On a $a_4 \approx -0.07462944144$, et $b_4 \approx 0.07194483984$.

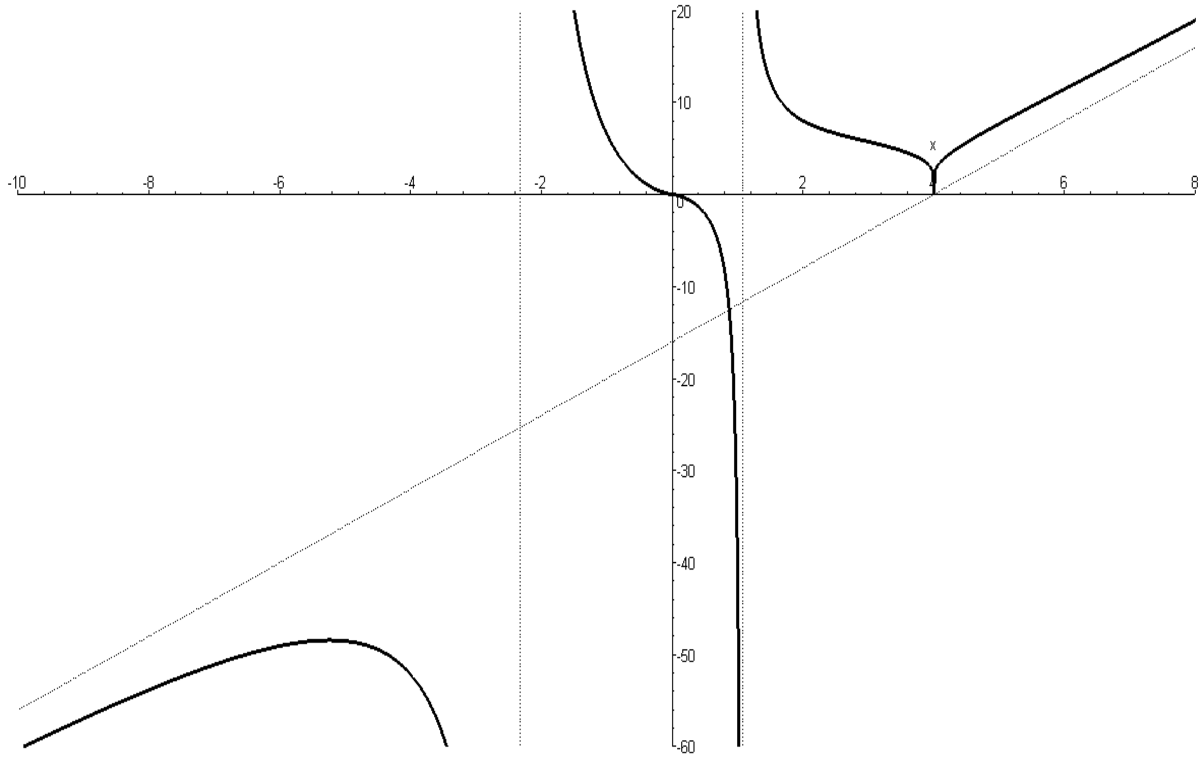
De même $\begin{cases} x_0 \approx -0.1993802369 \\ f(x_0) \approx -0.8372734264 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 \approx 0.1994133514 \\ f(x_1) \approx 0.7578877204 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 \approx 3.273419703 \\ f(x_2) \approx 2.378402260 \end{cases}$



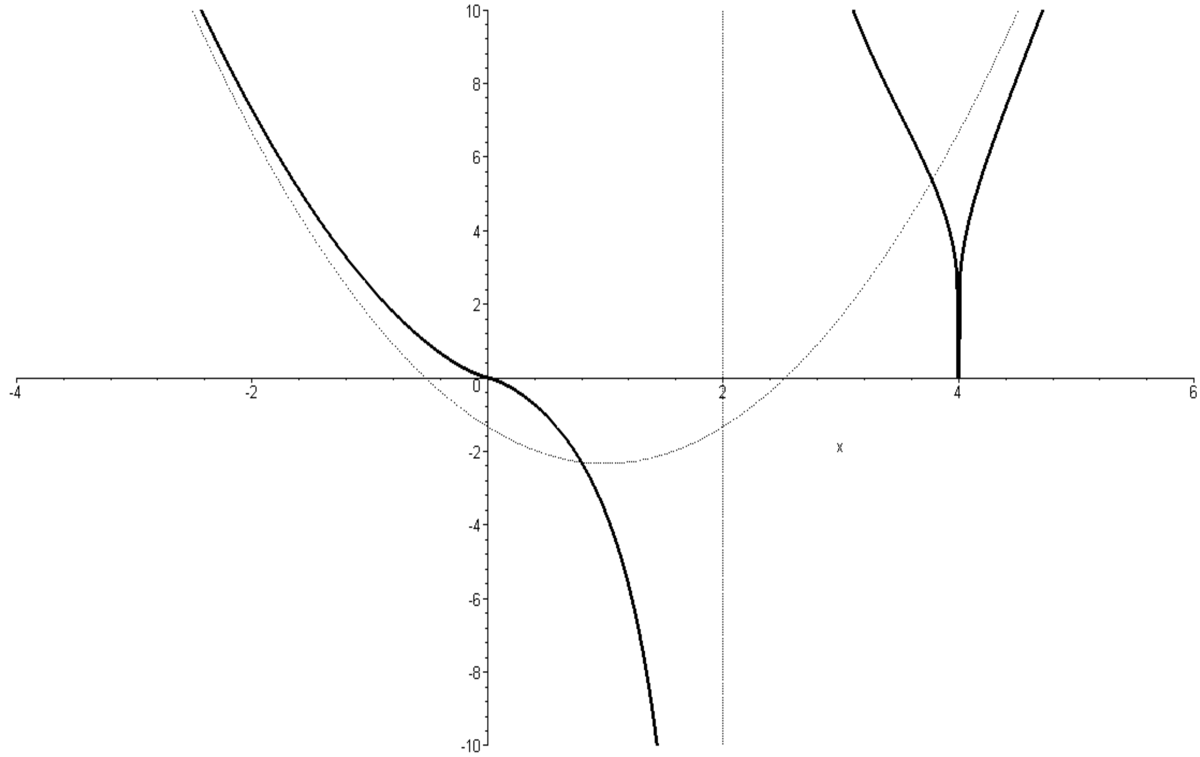
$\boxed{\lambda = 2}$: On a $a_2 \approx -.6260705708$, $b_2 \approx 0.4768116880$, et $\begin{cases} x_0 \approx -1.543733104 \\ f(x_0) \approx -8.558044316 \end{cases}$



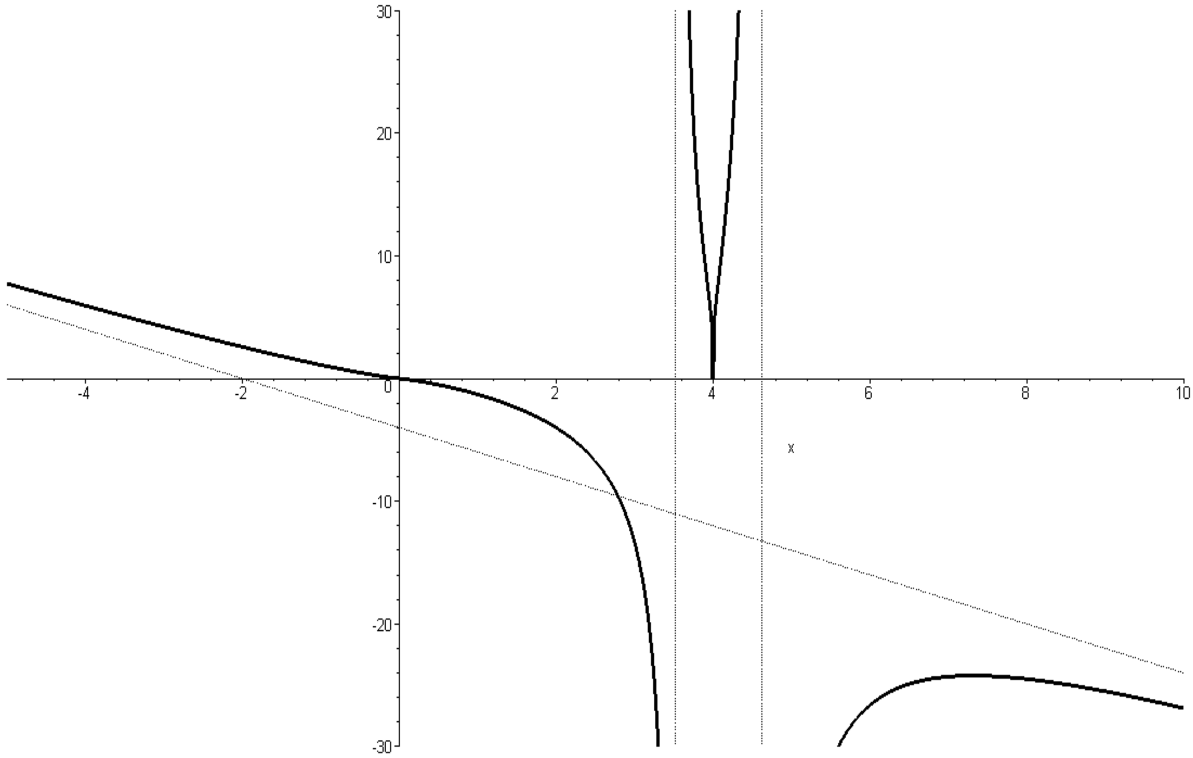
$\boxed{\lambda = 1}$: On a $a_2 \approx -2.327906828$, $b_2 \approx 1.075765686$, et $\begin{cases} x_0 \approx -5.240933340 \\ f(x_0) \approx -48.43111568 \end{cases}$



$\boxed{\lambda = 0}$



$\boxed{\lambda = -2}$: On a $a_2 \approx 4.626070572$, $b_2 \approx 3.523188313$, et $\begin{cases} x_0 \approx 7.311422664 \\ f(x_0) \approx -24.21121074 \end{cases}$



Problème 2

1. Puisque $f_\lambda(x) = \exp(x \ln(x-\lambda))$, on a $\mathcal{D}_\lambda =]\,\lambda, +\infty\,[$. Sur ce domaine f_λ est $\mathcal{C}^\infty$.
   - Si $\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{x \to \lambda^+} x \ln(x-\lambda) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \lambda^+} f_\lambda(x) = 0^+$.
   - Si $\lambda = 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_0(x) = 1^-$.
   - Si $\lambda < 0$, on a $\lim\limits_{x \to \lambda^+} x \ln(x-\lambda) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty$.
2. Pour $\lambda \geqslant 0$, on prolonge f_λ par continuité en λ en posant $f_\lambda(\lambda) = \ell_\lambda$.

   Posons $T_\lambda(x) = \dfrac{f_\lambda(x) - f_\lambda(\lambda)}{x - \lambda}$ quand $\lambda \in \mathbb{R}$, donc quand $\lambda \geqslant 0$.
   - Si $\lambda > 0$, donc si $f_\lambda(\lambda) = 0$, on a $T_\lambda(x) = \dfrac{f_\lambda(x)}{x-\lambda} = \exp((x-1)\ln(x-\lambda))$.
     - ◇ Si $\lambda > 1$, alors $\lim\limits_{x \to \lambda^+} (x-1)\ln(x-\lambda) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \lambda^+} T_\lambda(x) = 0^+$.
     - ◇ Si $\lambda = 1$, alors $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)\ln(x-1) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} T_1(x) = 1^-$.
     - ◇ Si $0 < \lambda < 1$, alors $\lim\limits_{x \to \lambda^+} (x-1)\ln(x-\lambda) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \lambda^+} T_\lambda(x) = +\infty$.
   - Si $\lambda = 0$, on a posé $f_0(0) = 1$. On a $T_0(x) = \dfrac{f_0(x) - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x \ln x} - 1}{x} \underset{0}{\sim} \ln x$.

     On en déduit $\lim\limits_{x \to 0^+} T_0(x) = -\infty$.

Les résultats précédents peuvent être résumés de la manière suivante :

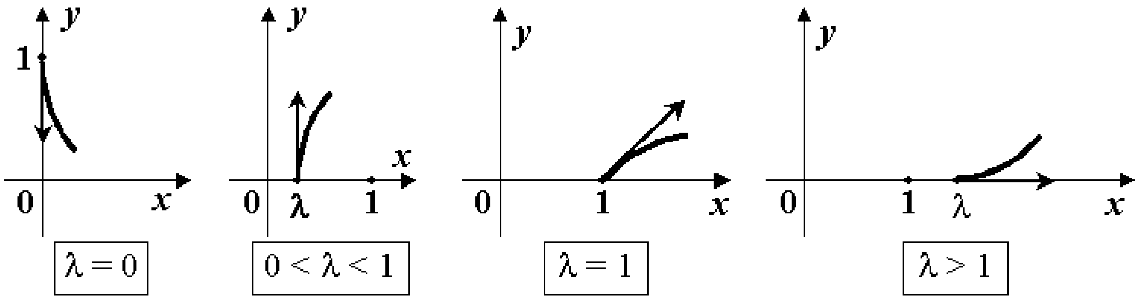
– Si $\lambda = 0$: il y a en $(0, 1)$ une demi-tangente verticale, dirigée vers les $y < 0$.

– Si $0 < \lambda < 1$: il y a en $(\lambda, 0)$ une demi-tangente verticale, dirigée vers les $y > 0$.

– Si $\lambda = 1$: il y a en $(1, 0)$ une demi-tangente de coefficient directeur 1, et la courbe est située en-dessous de cette demi-tangente.

– Si $\lambda > 1$: il y a en $(\lambda, 0)$ une demi-tangente horizontale.

Voici une illustration graphique des résultats obtenus :



3. Pour tout $x > \lambda$, $f'_\lambda(x) = [x\ln(x-\lambda)]' f_\lambda(x) = \Big(\ln(x-\lambda) + \dfrac{x}{x-\lambda}\Big) f_\lambda(x)$.

Donc $u_\lambda(x) = \ln(x-\lambda) + \dfrac{x}{x-\lambda}$; les applications $f_\lambda(x)$ et $u_\lambda(x)$ ont même signe sur $\mathcal{D}_\lambda$.

(a) On suppose $\lambda < 0$. Pour tout $x > \lambda$, on a $u'_\lambda(x) = \dfrac{1}{x-\lambda} - \dfrac{\lambda}{(x-\lambda)^2} > 0$.

L'application u_λ est strictement croissante sur $\mathcal{D}_\lambda$.

On a $\lim\limits_{x\to\lambda^+} u_\lambda(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_\lambda(x) = +\infty$.

On en déduit l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha > \lambda$ tel que :

$\forall x \in]\,\lambda, \alpha\,[,\ f'_\lambda(x) < 0\,;\quad f'_\lambda(\alpha) = 0\,;\quad \forall x \in]\,\alpha, +\infty\,[,\ f'_\lambda(x) < 0\,;$

On en déduit le tableau de variations de f_λ.

Remarque : pour tout λ, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$.

Remarque : on a $u_\lambda(0) = \ln(-a)$.

On en déduit :

– Si $a < -1$, $u_\lambda(0) > 0$ donc $\alpha < 0$.

– Si $a = -1$, $u_\lambda(0) = 0$ donc $\alpha = 0$.

– Si $-1 < a < 0$, $u_\lambda(0) < 0$ donc $\alpha > 0$.

x	λ		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Pour tout $x > 0$, on $f'_0(x) = (\,\mathrm{e}^{x\ln x})' = (\ln x + 1) f_0(x)$.

On en déduit le tableau de variations de f_0.

– $\forall x \in]\,0, 1/\mathrm{e}\,[,\ f'_\lambda(x) < 0$

– $f'_\lambda(1/\mathrm{e}) = 0$

– $\forall x \in]\,1/\mathrm{e}, +\infty\,[,\ f'_\lambda(x) < 0$

On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.3679$ et $f_0(\dfrac{1}{\mathrm{e}}) = (\dfrac{1}{\mathrm{e}})^{1/\mathrm{e}} \approx 0.6922$

x	0		$1/\mathrm{e}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$f(1/\mathrm{e})$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) Pour tout $x > \lambda$, on a $u'_\lambda(x) = \dfrac{1}{x-\lambda} - \dfrac{\lambda}{(x-\lambda)^2} = \dfrac{x-2\lambda}{(x-\lambda)^2}$.

On a $u_\lambda(x) = \dfrac{(x-\lambda)\ln(x-\lambda)+x}{x-\lambda} \underset{\lambda}{\sim} \dfrac{\lambda}{x-\lambda}$.

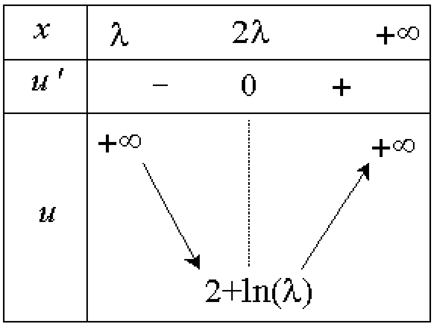
Il en découle $\lim\limits_{x\to\lambda^+} u_\lambda(x) = +\infty$.

L'application u'_λ a la signe de $x - 2\lambda$.

L'application u_λ atteint son minimum en $x = 2\lambda$.

Ce minimum est $u_\lambda(2\lambda) = 2 + \ln\lambda = \ln(\lambda\,\mathrm{e}^2)$.

Voici le tableau de variations de u_λ.



Le signe du minimum de u_λ dépend de la position de λ par rapport à e^{-2}.

On en déduit les résultats suivants :

– Si $\lambda > \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(2\lambda) > 0$. Donc $u_\lambda(x) > 0$ pour tout x de $\mathcal{D}_\lambda$.

– Si $\lambda = \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(2\lambda) = 0$ et $u_\lambda(x) > 0$ pour tout x de $\mathcal{D}_\lambda \setminus \{2\lambda\}$.

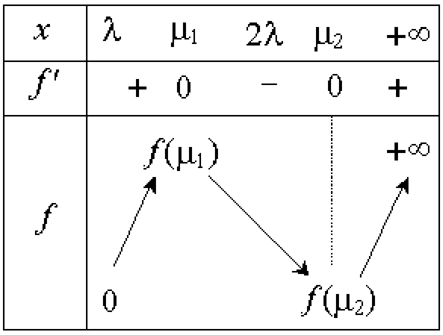
– Si $0 < \lambda < \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(2\lambda) < 0$.

Alors $u_\lambda(x)$ s'annule en un unique μ_1 de $]\,\lambda, 2\lambda\,[$, et en un unique μ_2 de $]\,2\lambda, +\infty\,[$.

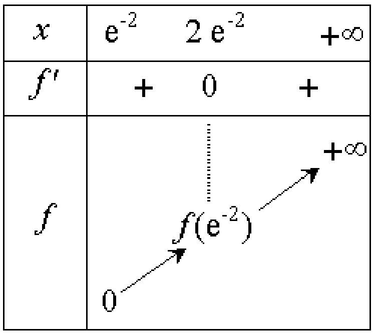
On a alors $u_\lambda(x) > 0$ sur $]\,\lambda, \mu_1\,[\,\cup\,]\,\mu_2, +\infty[$, et $u_\lambda(x) < 0$ sur $]\,\mu_1, \mu_2\,[$.

L'application f'_λ a le signe de u_λ. Les résultats précédents permettent donc de préciser le sens de variation de f_λ par intervalles.

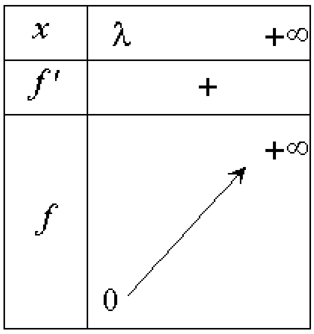
(b) Voici les tableaux de variations de f_λ dans les trois cas étudiés ci-dessus :



$0 < \lambda < \mathrm{e}^{-2}$



$\lambda = \mathrm{e}^{-2}$



$\lambda > \mathrm{e}^{-2}$

5. On se donne $\lambda_1 < \lambda_2$. Soit $x > \lambda_2$ (donc x est dans $\mathcal{D}_{\lambda_1} \cap \mathcal{D}_{\lambda_2}$.)

On a évidemment $\ln(x - \lambda_2) < \ln(x - \lambda_1)$.

– Si $x > 0$, alors $x\ln(x-\lambda_2) < x\ln(x-\lambda_1)$ donc $f_{\lambda_2}(x) < f_{\lambda_1(x)}$.

– Si $x < 0$, alors $x\ln(x-\lambda_2) > x\ln(x-\lambda_1)$ donc $f_{\lambda_2}(x) > f_{\lambda_1(x)}$ (à condition que $\lambda_2 \leqslant 0$.)

– Si $x = 0$, alors $f_{\lambda_1}(x) = f_{\lambda_2}(x) = 1$ (à condition que $\lambda_2 \leqslant 0$.)

Ainsi les courbes $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ sont dans l'ordre de leurs indices sur $\mathbb{R}^{-*}$, et dans l'ordre contraire sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elles se croisent au point $(0, 1)$ (remarque : le placement sur $\mathbb{R}^{-*}$ et le "croisement" en $(0, 1)$ n'ont de sens que si $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant 0$.)

6. Pour le tracé des courbes, on trouve neuf cas particuliers :

   $\lambda < -1$ (par exemple $\lambda = -2$), $\lambda = -1$, $-1 < \lambda < 0$ (par exemple $\lambda = -1/2$), $\lambda = 0$, $0 < \lambda < \mathrm{e}^{-2}$ (par exemple $\lambda = 0.07$), $\lambda = \mathrm{e}^{-2}$, $\mathrm{e}^{-2} < \lambda < 1$ (par exemple $\lambda = 1/2$), $\lambda = 1$, et $\lambda > 1$ (par exemple $\lambda = 2$.)