Quatre études de fonctions

Exercice 1

On définit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. Préciser le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f.
2. Indiquer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

   Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = -2$ et au voisinage de $x = 0$.
3. Étudier le sens de variations de f, et dresser son tableau de variations.
4. Étudier l'existence d'une asymptote oblique quand $x \to -\infty$ ou quand $x \to +\infty$.

   Donner le placement de la courbe par rapport à cette asymptote.
5. Étudier la concavité de f et préciser les points d'inflexion.
6. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = |\tan x|^{\cos x}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?

   Montrer qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $]0, \pi[$.

   Pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que l'application f peut être prolongée par continuité en $x = 0$ et en $x = \frac{\pi}{2}$.
3. Étudier le sens de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et dresser son tableau de variations.

   On donnera une valeur approchée de l'abscisse x_0 pour laquelle $f'(x_0) = 0$.

   Procéder à une étude analogue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4. Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = \frac{\pi}{2}$.
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f sur un intervalle contenant $[0, \pi]$.

Exercice 3

On considère l'application f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?

   Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$, de $x = 1$, et de $+\infty$.
4. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x > -1$ (et $x \neq 0$) : $\exists!\theta_x \in]0, 1[$ tel que $\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1 + \theta_x x}$.
2. On définit l'application f par $f(x) = \theta_x$.

   Préciser la dérivabilité de f, et donner les limites de f aux bornes de son domaine.
3. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -1$.
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.

Corrigé

Exercice 1

1. f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, comme produit et composée d'applications continues.

   Elle est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,-2\,[\cup]-2,0\,[\cup]\,0,+\infty[$.

2. – Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x)\sim|x|$ donc $\lim\limits_{\infty} f=+\infty$.

   – L'application f est continue en -2, avec $f(-2)=0$.

   – Au voisinage de 0, on a $f(x)\sim\sqrt{2}\sqrt{|x|}\,\mathrm{e}^{1/x}$.

   ◇ A droite de 0 on a donc $\lim\limits_{0+} f=\lim\limits_{+\infty}\sqrt{2}\frac{\mathrm{e}^X}{\sqrt{X}}=+\infty$.

   Ainsi la droite $x=0$ est asymptote verticale.

   ◇ A gauche de 0 on a $\lim\limits_{0-} f=0$.

   On peut donc prolonger f par continuité en 0 à gauche en posant $f(0)=0$.

   – On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de -2.

   Posons $x=-2+h$. Alors $f(x)=\exp(\frac{1}{-2+h})\sqrt{|h(-2+h)|}\sim\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\sqrt{|h|}$.

   On en déduit $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\,\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\begin{cases}+\infty & \text{si } h\to0^+\\ -\infty & \text{si } h\to0^-\end{cases}$

   L'application f n'est donc pas dérivable en -2. Plus précisément, la courbe $y=f(x)$ admet au point $(-2,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers les $y>0$.

   – On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de 0 (après le prolongement $f(0)=0$.)

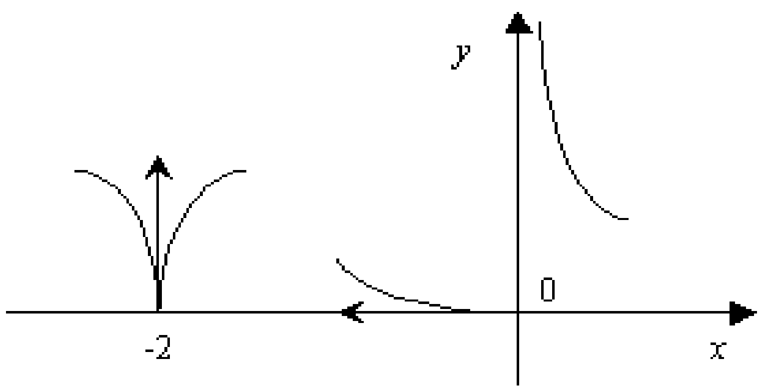
   On sait déja que $\lim\limits_{0+} f=+\infty$ (asymptote verticale $x=0$ à droite de 0.)

   Quand $x\to0^-$, $f(x)\sim\sqrt{2}\,\sqrt{|x|}\,\mathrm{e}^{1/x}$ donc $\frac{f(x)}{x}\sim-\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{1/x}$.

   On en déduit $\lim\limits_{0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{-\infty}-\sqrt{2}\,\sqrt{|X|}\,\mathrm{e}^X=0^-$.

   Il en découle que la courbe $y=f(x)$ présente à l'origine une demi-tangente horizontale (la courbe étant située au-dessus car $f\geqslant0$ sur son domaine.)

   En résumé, voici l'allure de la courbe $y=f(x)$ au voisinage de $x=0$ et de $x=-2$:



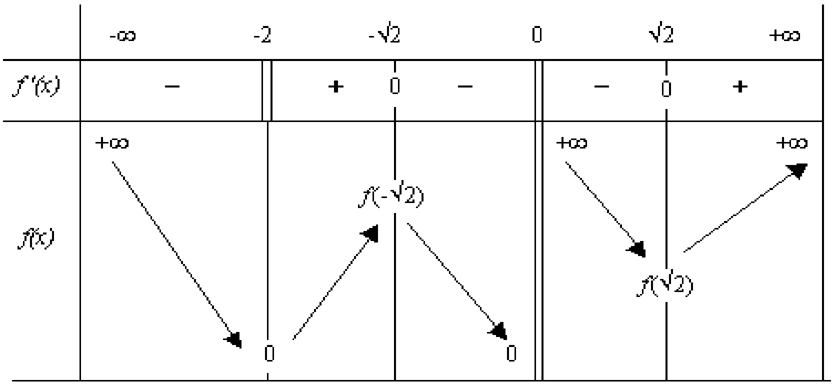
3. On remarque que pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ on a $f(x)>0$ et $\ln f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x(x+2)|$.

   On dérive et on trouve : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2,0\},\ \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\,\frac{2(x+1)}{x(x+2)}=\frac{-(x+2)+x(x+1)}{x^2(x+2)}$.

   On en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2,0\},\ f'(x)=\frac{x^2-2}{x^2(x+2)}f(x)$.

   L'application f' est donc du signe de $\frac{x^2-2}{x+2}$ donc du signe de $(x+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

   On en déduit le tableau de variations de f :



   On remarque les points $(-\sqrt{2},f(-\sqrt{2}))$ et $(\sqrt{2},f(\sqrt{2}))$ en lesquels la courbe $y=f(x)$ présente une tangente horizontale. On a $f(\sqrt{2})\approx 4,46$ et $f(-\sqrt{2})\approx 0,45$.

4. On effectue un développement généralisé par rapport à l'infiniment petit $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{1/x}\sqrt{|x(x+2)|}=|x|\ e^{1/x}\sqrt{1+\tfrac{2}{x}} \qquad (\text{quand } x\to\infty,\ 1+\tfrac{2}{x}>0)\\ &= |x|\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{2x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right)\left(1+\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{2x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right)\\ &= |x|\left(1+\tfrac{2}{x}+\tfrac{1}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right)\end{aligned}$$

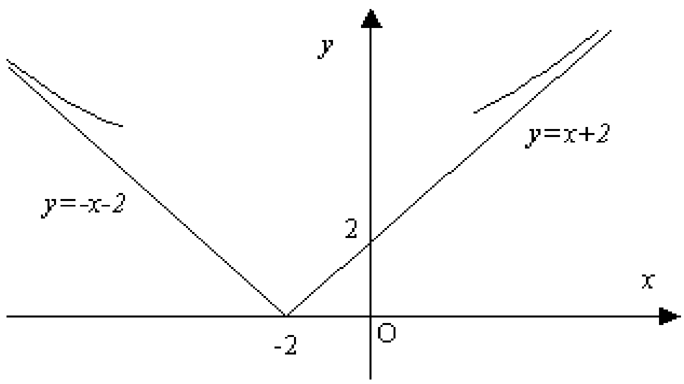
   ◇ On en déduit que quand $x\to+\infty$ alors $f(x)=x+2+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$.

   La courbe présente donc l'asymptote $y=x+2$ (la courbe est localement au-dessus.)

   ◇ De même, quand $x\to-\infty$ alors $f(x)=-x-2-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$.

   La courbe présente donc l'asymptote $y=-x-2$ (la courbe est localement au-dessus.)

   En résumé, voici l'allure de la courbe au voisinage de $\pm\infty$.



5. On sait que pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2,0\}$, on a : $f'(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)}f(x)$.

On en déduit pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Big(\frac{x^2-2}{x^2(x+2)}\Big)' f(x) + \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) \\ &= \frac{2x^3(x+2) - (x^2-2)(3x^2+4x) + (x^2-2)^2}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x) \end{aligned}$$

L'application f étant > 0 sur $\mathbb{R} - \{0, -2\}$, $f''(x)$ a le signe de $x^2 + 4x + 2$.

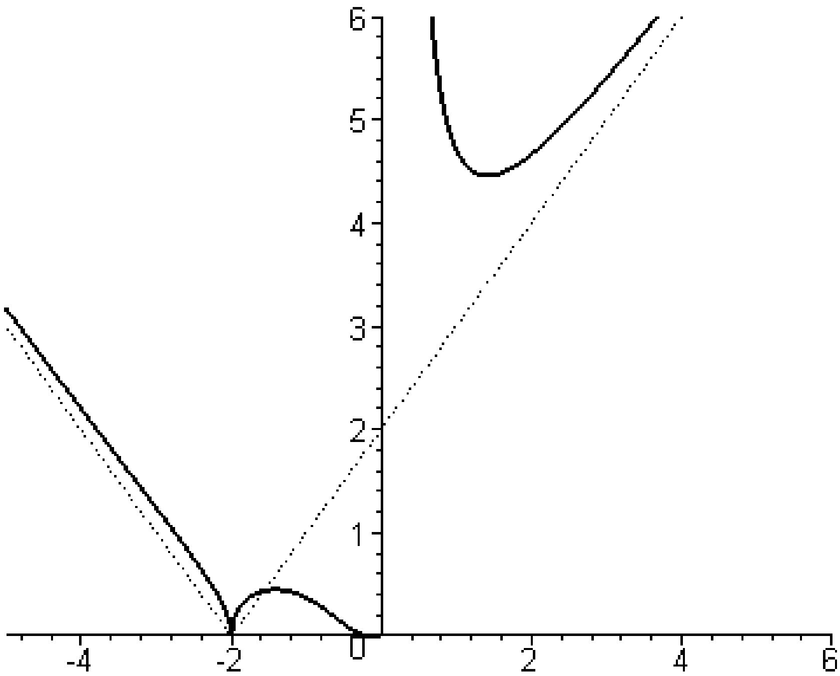
Mais $(x^2 + 4x + 2) = (x - \alpha)(x - \beta)$ avec $\alpha = -2 - \sqrt{2}$ et $\beta = -2 + \sqrt{2}$.

On en déduit le signe de f'' et la concavité de f.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f		convexe		concave		concave		convexe		convexe	

Il y a deux points d'inflexion : $\begin{cases} I_1 = (\alpha, f(\alpha)) \approx (-3.41, 1.64) \\ I_2 = (\beta, f(\beta)) \approx (-0.59, 0.17) \end{cases}$

6. Voici la courbe représentative de f :



Exercice 2

1. – $f(x)$ est défini$\Leftrightarrow\begin{cases}\tan x \text{ est défini}\\ \tan x \neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

   Pour $x\neq k\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbb{Z}$), f est continue, dérivable et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions ayant ces propriétés.

   – On remarque que f est 2π-périodique. On peut donc limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π, puis procéder à des translations de vecteur $2k\pi\overrightarrow{\imath}$ (avec $k\in\mathbb{Z}$) sur la portion de courbe obtenue.

   D'autre part, f est paire. On peut donc limiter l'étude à $]0,\pi[$ (avant d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe Oy.)

   – Sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $f(\pi-x)=|\tan(\pi-x)|^{\cos(\pi-x)}=|\tan x|^{-\cos x}=\frac{1}{f(x)}$.

   On peut déduire les variations de f sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$ de ses variations sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.

   En effet si I est un intervalle de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur lequel f possède une certaine monotonie, alors f a la même monotonie sur l'intervalle J se déduisant de I par la transformation $x\mapsto\pi-x$ (la symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$.)

   Cela vient du fait que $x\mapsto f(x)$ est la composée de $x\mapsto\pi-x$ (décroissante), de $x\mapsto f(x)$ et de $x\mapsto\frac{1}{x}$ (décroissante.)

2. Pour tout x de $]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos x>0$ et $\sin x>0$.

   $f(x)=(\tan x)^{\cos x}\Rightarrow \ln f(x)=\cos x\ln\tan x=\cos x\ln\sin x-\cos x\ln\cos x.$

   On en déduit :

   ◇ $\lim\limits_{0^+} f(x)=0^+$. En effet $\ln f(x)=\cos x\ln\tan x\sim\ln\tan x\sim\ln x\to-\infty$.

   On peut donc prolonger f par continuité en 0 à droite en posant $f(0)=0$.

   Mais la parité de f fait qu'elle est alors continue à l'origine.

   Par périodicité, elle est alors continue en tous les $x=2k\pi$.

   ◇ $\lim\limits_{(\pi/2)^-} f(x)=1^+$. En effet $\ln f(x)=\cos x(\ln\sin x-\ln\cos x)\sim-\cos x(\ln\cos x)\to0^+$

   Cela résulte de ce que $(-t\ln t)\to0^+$ quand $t\to0^+$, et ici $t=\cos x\to0^+$.

   On peut donc prolonger f par continuité en $\frac{\pi}{2}$ à gauche en posant $f(\frac{\pi}{2})=1$.

   Mais la relation $f(x)=\frac{1}{f(\pi-x)}$ prouve alors que $\lim\limits_{(\pi/2)^+} f(x)=1$.

   Ainsi prolongée, f est donc continue en $\frac{\pi}{2}$ (et par périodicité en tous les $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.)

3. Pour tout x de $]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $\ln f(x)=\cos x\ln\tan x$.

   On en déduit, pour tout x de $]0,\frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=-\sin x\,\ln\tan x+\cos x\,\frac{1}{\cos^2 x\,\tan x}\\&=-\sin x\,\ln\tan x+\frac{1}{\sin x}=\sin\Big(\frac{1}{\sin^2 x}-\ln\tan x\Big)\end{aligned}$$

   Sens de variation sur l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$:

   – $x\mapsto\sin^2 x$ est strictement croissante >0. Donc $x\mapsto\frac{1}{\sin^2 x}$ est strictement décroissante.

   – $x\mapsto\tan x$ est strictement croissante. Donc $x\mapsto-\ln\tan x$ est strictement décroissante.

On en déduit que $g : x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} - \ln\tan x$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Or $\lim\limits_{0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{(\pi/2)^-} g(x) = -\infty$: g (continue) est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier $\exists\, x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $g(x) > 0$ sur $]0, x_0[$, $g(x_0) = 0$ et $g(x) < 0$ sur $]x_0, \frac{\pi}{2}[$.

Remarque : on observe que $g(\frac{\pi}{4}) = 2$. On en déduit $\frac{\pi}{4} < x_0 < \frac{\pi}{2}$.

Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = (\sin x) f(x) g(x)$ a le signe de $g(x)$.

On en déduit le sens de variation de f :

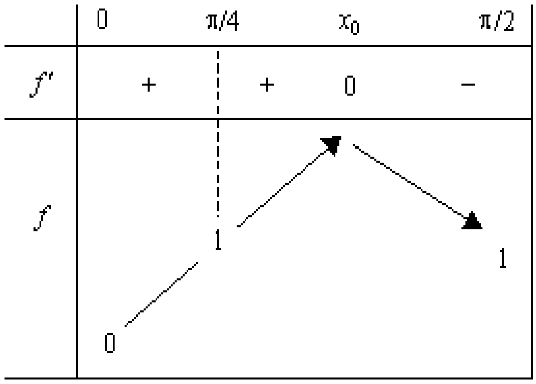
On remarque que $f(\frac{\pi}{4}) = 1$.

On vérifie que $\begin{cases} g(1.25) \approx 0.009 > 0 \\ g(1.26) \approx -0.03 < 0 \end{cases}$

On en déduit $1.25 < x_0 < 1.26[$

D'autre part $\begin{cases} f(1.25 \approx 1.4154 \\ f(1.26) \approx 1.4153 \end{cases}$

Donc $f(x_0) \approx 1.415$



Sens de variation sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$:

Sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a $f(x) = \frac{1}{f(\pi - x)}$ donc $f'(x) = \frac{f'(\pi-x)}{f^2(\pi-x)}$, avec $\pi - x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

On en déduit que f est :

◇ strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2}, \pi - x_0[$

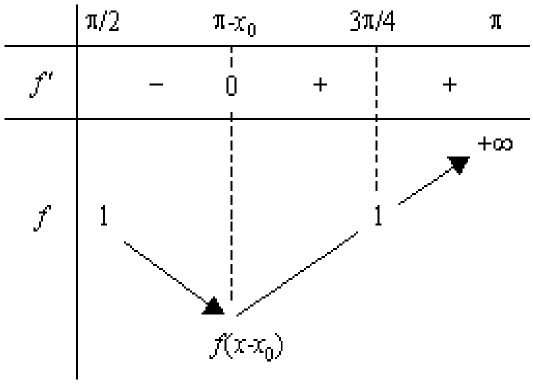
◇ strictement croissante sur $]\pi - x_0, \pi[$

On a $\lim\limits_{\pi^-} f(x) = \frac{1}{\lim_{0^+} f} = +\infty$.

On a $\pi - x_0 \in]1.88, 1.89[$

$f(\pi - x_0) = \frac{1}{f(x_0)} \approx 0.71$

On voit que $f(\frac{3\pi}{4}) = 1$



4. – *Au voisinage de* 0

Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\ln \frac{f(x)}{x} = \cos x \ln\tan x - \ln x = (\cos x - 1)\ln\tan x + \ln\frac{\tan x}{x}$.

Quand $x \to 0^+$, $(\cos x - 1)\ln\tan x \sim -\frac{x^2}{2}\ln x \to 0^+$, et $\frac{\tan x}{x} \to 1^+ \Rightarrow \ln\frac{\tan x}{x} \to 0^+$.

On en déduit que $\lim\limits_{0^+} \ln\frac{f(x)}{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{0^+} \frac{f(x)}{x} = 1^+$.

Ainsi f est dérivable à droite à l'origine, avec $f'_d(0) = 1$.

La courbe $y = f(x)$ admet la demi-tangente $y = x$ en $(0, 0)$ (courbe au-dessus).

L'application f étant paire, elle admet une dérivée à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

Il y a donc la demi-tangente $y = -x$ en 0 à gauche (courbe au-dessus).

– *Au voisinage de* $\frac{\pi}{2}$

Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $f'(x) = (\sin x) f(x) g(x)$, avec $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \ln\tan x$.

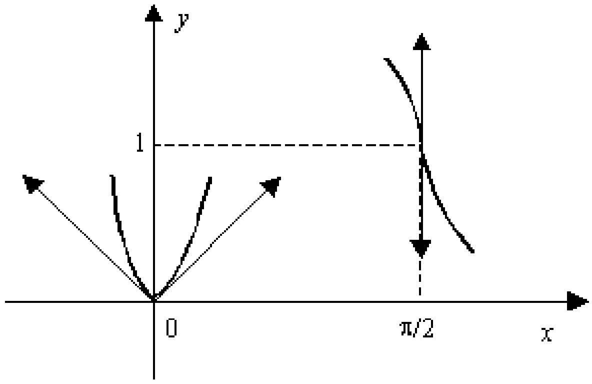
Or $\lim\limits_{\pi/2} \sin x = \lim\limits_{\pi/2} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{(\pi/2)^-} g = -\infty$. On en déduit $\lim\limits_{(\pi/2)^-} f'(x) = -\infty$.

De même, l'égalité $f'(x) = \frac{f'(\pi-x)}{f^2(\pi-x)}$ donne $\lim\limits_{(\pi/2)^+} f'(x) = -\infty$.

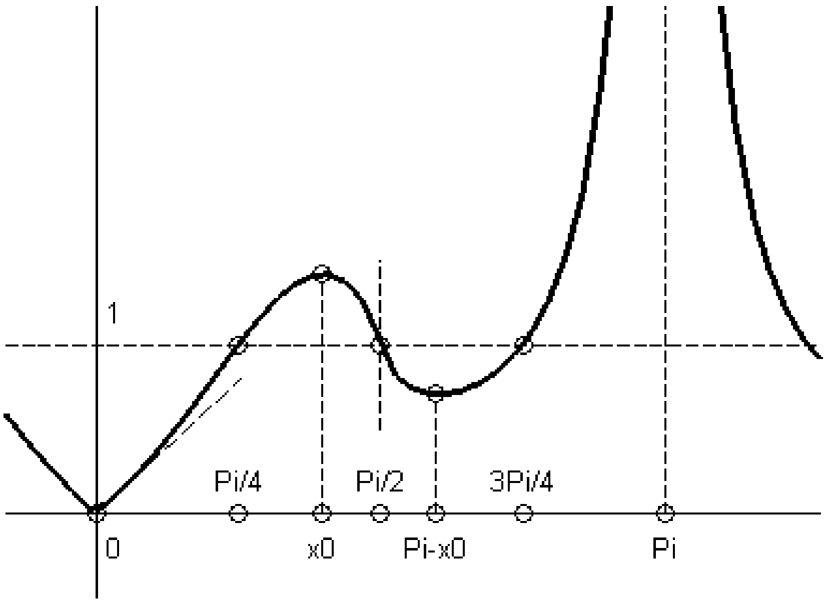
Ainsi f n'est pas dérivable en $x = \frac{\pi}{2}$.

Plus précisément, la courbe $y = f(x)$ présente en $(\frac{\pi}{2}, 1)$ une tangente verticale.

En résumé, voici l'allure de la courbe au voisinage de $x = 0$ et de $x = \frac{\pi}{2}$.



5. Courbe représentative :



Exercice 3

1. L'application f est définie, continue, dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$, comme composée de fonctions ayant ces propriétés.

   Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$, $\ln f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} \ln x$.

   Puisque $\lim\limits_{0^+} x^2 \ln x = 0^-$, on a $\lim\limits_{0^+} \ln f(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{0^+} f(x) = 1^+$.

   Au voisinage de 1, on a $\dfrac{\ln x}{x-1} \sim 1$ donc $\dfrac{x^2 \ln x}{x^2-1} = \dfrac{x^2}{x+1} \dfrac{\ln x}{x-1} \sim \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit $\lim\limits_{1} f(x) = \exp \frac{1}{2} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

   On peut donc prolonger f par continuité en 0 et en 1 en posant $f(0) = 1$ et $f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(\frac{x^2 \ln x}{x^2-1}\Big)' f(x) = \Big(\frac{2x(x^2-1) - 2x^3}{(x^2-1)^2} \ln x + \frac{x}{x^2-1}\Big) f(x) \\ &= \Big(\frac{-2x \ln x}{(x^2-1)^2} + \frac{x}{x^2-1}\Big) f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} \Big(-2\ln x + x^2 - 1\Big) f(x) \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$, $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)=-2\ln x+x^2-1$.

Or, pour tout $x>0$, $g'(x)=-\dfrac{2}{x}+2x=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$.

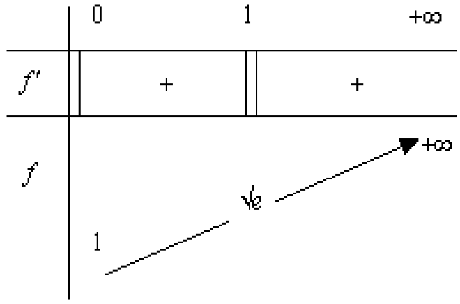
L'application g est strictement décroissante sur $]0,1[$, et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

Or $g(1)=0$. Il en résulte que $g(x)$ donc $f'(x)$ sont strictement positives sur $\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Le tableau de variation de f est très simple.



3. – *Etude au voisinage de* 0

On a $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{x}\Big(\exp\dfrac{x^2\ln x}{x^2-1}-1\Big)\sim\dfrac{x\ln x}{x^2-1}\to 0^+$.

L'application f est donc dérivable en 0, avec $f'(0)=0$.

la courbe $y=f(x)$ a en $(0,1)$ une demi-tangente horizontale (courbe au-dessus).

– *Etude au voisinage de* 1

On pose $x=1+h$. On rappelle que $\ln(1+h)=h-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^3}{3}+\mathrm{o}(h^3)$.

On forme alors le développement limité de $\ln f(1+h)$ en $h=0$:

$$\begin{aligned}\ln f(x)&=\ln f(1+h)=\frac{1+2h+h^2}{h(2+h)}\ln(1+h)=\frac{1+2h+h^2}{h(2+h)}\Big(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+\mathrm{o}(h^3)\Big)\\&=\frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{3}{2}h+\frac{h^2}{3}+\mathrm{o}(h^2)}{1+\frac{h}{2}}=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{3}{2}h+\frac{h^2}{3}+\mathrm{o}(h^2)\Big)\Big(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\mathrm{o}(h^2)\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(1+h-\frac{h^2}{6}+\mathrm{o}(h^2)\Big)\end{aligned}$$

On en déduit le développement limité de $f(1+h)$ en $h=0$:

$$\begin{aligned}f(x)&=f(1+h)=\exp\frac{1}{2}\Big(1+h-\frac{h^2}{6}+\mathrm{o}(h^2)\Big)=\sqrt{\mathrm{e}}\,\exp\Big(\frac{h}{2}-\frac{h^2}{12}+\mathrm{o}(h^2)\Big)\\&=\sqrt{\mathrm{e}}\,\Big(1+(\frac{h}{2}-\frac{h^2}{12})+\frac{1}{2}\frac{h^2}{4}+\mathrm{o}(h^2)\Big)=\sqrt{\mathrm{e}}\,\Big(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{24}+\mathrm{o}(h^2)\Big)\end{aligned}$$

On constate que f admet un développement limité d'ordre 2 en $x=1$:

$$f(x)=\sqrt{\mathrm{e}}+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}(x-1)+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{24}(x-1)^2+\mathrm{o}(x-1)^2$$

Si on pose $f(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$, l'application f est donc dérivable en 1, avec $f'(1)=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

Ce développement montre aussi que $y=f(x)$ est au-dessus de sa tangente en $x=1$.

– *Etude au voisinage de* $+\infty$

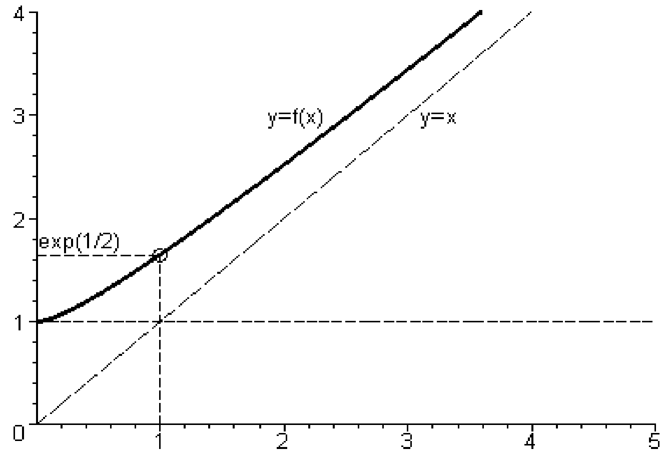
On sait que $\lim\limits_{+\infty}f(x)=+\infty$. On a $\lim\limits_{+\infty}\ln\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=0^+$.

On en déduit $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1^+$. Enfin, on sait que $\mathrm{e}^X - 1 \sim X$ quand $X \to 0$.

Il en découle $f(x) - x = x\Big(\exp \dfrac{\ln x}{x^2-1} - 1\Big) \sim x\dfrac{\ln x}{x^2-1} \to 0^+$.

On en déduit que $y = f(x)$ possède l'asymptote $y = x$ en $+\infty$ (courbe au-dessus).

4. Courbe représentative de f :



Exercice 4

1. Pour $x > -1$, l'égalité des accroissements finis appliquée sur $[0, x]$ à $x \mapsto \ln(1+x)$ donne :

$$\exists\, \theta_x \in \,]0,1[,\ \ln(1+x) = \ln(1) + x\ln'(1+\theta_x x) = \frac{x}{1+\theta_x x}$$

L'unicité de θ_x résulte de ce qu'on peut extraire θ_x de l'égalité précédente.

On obtient en effet : $\forall\, x > -1,\ \theta_x = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

2. L'application f est définie sur $]-1, 0\,[\cup]\,0, +\infty[$.

Sur ce domaine, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On a $\lim\limits_{(-1)^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.

En 0, $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \to \dfrac{1}{2}$ car $\begin{cases} x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \sim \frac{x^2}{2} \\ x\ln(1+x) \sim x^2 \end{cases}$

On peut donc prolonger f par continuité en -1 et en 0 en posant $f(-1) = 1$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

3. On calcule la dérivée de f, pour tout $x > -1$ (et $x \neq 0$) :

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2\ln^2(1+x)}\Big(\ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x}\Big)$$

$f'(x)$ a donc le même signe que :

$$\ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x} = \overbrace{\Big(\ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}\Big)}^{g(x)}\ \overbrace{\Big(\ln(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1+x}}\Big)}^{h(x)}$$

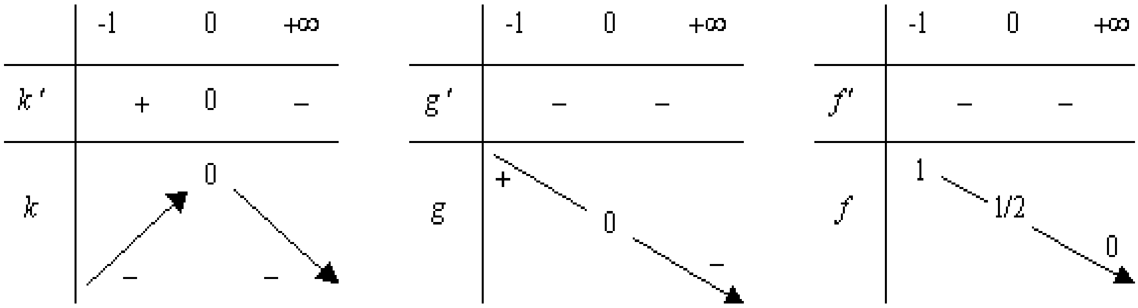
$\ln(1+x)$ et $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ont le signe de x. Il en est donc de même de $h(x)$.

Pour déterminer le signe de $g(x)$, on étudie les variations de g :

$$\forall\, x > -1,\ g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{x}{2(1+x)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x)^{3/2}}\overbrace{\Big(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\Big)}^{k(x)}$$

Pour $x > -1$, on $k'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}$.

On en déduit successivement les variations de k, puis le fait que $g'(x) < 0$, puis les variations de g, le signe de f' et les variations de f :



4. – *Au voisinage de* 0 *:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)} - 1\Big) \\ &= \frac{1}{x}\Big(1 + (-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}) + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2) - 1\Big) \\ &= \frac{1}{x}\Big(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)\Big) = \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + \mathrm{o}(x). \end{aligned}$$

Ce développement montre que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{12}$.

– *Au voisinage de* -1 *:*

On a $\lim\limits_{(-1)^+} (1+x)\ln^2(1+x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{(-1)^+} f'(x) = -\infty$.

la courbe $y = f(x)$ a donc en $(-1, 1)$ une demi-tangente verticale dirigée vers les $y < 0$.

5. Courbe représentative :