# Approximations de $\pi$ à l'aide de développements limités

Au dix-septième siècle, des mathématiciens comme Huyghens et Snellius entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de $\pi$ par des méthodes trigonométriques élémentaires. Il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique $\sin x < x < \tan x$ valable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ en introduisant des fonctions :

– Qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles.

– Peu différentes de $x$ au voisinage de 0.

Les fonctions $f_1$ et $f_4$ de l'énoncé sont celles de Snellius ; $f_2$ et $f_3$ sont celles de Huyghens.

1. Soient $a, b$ des réels positifs ou nuls. On pose $m(a,b) = \frac{2a+b}{3}$ et $g(a,b) = \sqrt[3]{a^2 b}$.
   Comparer $m(a,b)$ et $g(a,b)$.

2. Dans toute la suite, on définit les fonctions suivantes sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ :

$$f_1(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right)$$
$$f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \tan x}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{3}\left(2\sin x + \tan x\right)$$

   Calculer les développements limités en 0 de ces fonctions, à l'ordre 5.

   En déduire l'existence de $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in ]0, \eta[,\ f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$.

3. On suppose ici que $x$ appartient à $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$. Quel est le signe de $f_4(x) - f_3(x)$ ?

4. On pose $u(x) = 3(2+\cos x)(f_2(x) - f_1(x))$. Linéariser $u(x)$.

   Montrer que $u'(x) = P(\cos\frac{x}{2})$, où $P$ est un polynôme de degré 4. Factoriser $P$.

   En déduire, pour $x$ dans $I$, le signe de $u'(x)$ puis celui de $f_2(x) - f_1(x)$.

5. On pose $v(x) = x - f_2(x)$. Montrer que $v'(x) = Q(\cos\frac{x}{2})$, où $Q$ est un polynôme.

   En déduire, pour $x$ dans $I$, le signe de $v'(x)$ puis celui de $v(x)$.

6. On pose $w(x) = f_3(x) - x$. Calculer et factoriser $w'(x)$.

   En déduire, pour $x$ dans $I$, le signe de $w(x)$.

   Quelle suite d'inégalités les questions 3 à 6 permettent-elles d'obtenir sur $I$ ?

7. Seules les valeurs des fonctions trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont supposées connues.

   Calculer des expressions simples de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

   Faire de même avec $\sin\frac{\pi}{24}$ à l'aide de radicaux superposés.

   Calculer les expressions par radicaux de $X = 12 f_2(\frac{\pi}{12})$ et de $Y = 12 f_3(\frac{\pi}{12})$.

   En déduire un encadrement de $\pi$.

# Corrigé

1. Pour comparer $m(a,b)$ et $g(a,b)$, on factorise $m^3(a,b)-g^3(a,b)$ :

$$\begin{aligned} m^3(a,b)-g^3(a,b) &= \frac{1}{27}(8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3-27a^2b) \\ &= \frac{1}{27}(8a^3-15a^2b+6ab^2+b^3) = \frac{1}{27}(a-b)^2(8a+b) \end{aligned}$$

   Si $a \neq b$, alors $8a+b>0$. On en déduit $m^3(a,b) > g^3(a,b)$ donc $m(a,b) > g(a,b)$.

   Bien sûr, si $a=b$ alors $m(a,b)=g(a,b)$.

2. Remarque : les fonctions $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ sont impaires. Les développements limités seront donc de la forme $f_k(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \mathrm{o}(x^5)$.

   – Développement limité de $f_1$ à l'origine :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3\,\frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \mathrm{o}(x^5)}{3 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^5)} \\ &= \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \mathrm{o}(x^5)\Big)^{-1} \\ &= x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \mathrm{o}(x^4)\Big) \\ &= x\Big(1 + x^4\Big(\frac{1}{72} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120} + \mathrm{o}(x^4)\Big)\Big) = x\Big(1 - \frac{x^4}{180} + \mathrm{o}(x^4)\Big) \end{aligned}$$

   On a donc obtenu : $f_1(x) = x - \dfrac{x^5}{180} + \mathrm{o}(x^5)$.

   – Développement limité de $f_2$ à l'origine :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{3}\left(8\Big(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3!8} + \frac{x^5}{5!32} + \mathrm{o}(x^5)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}(x^5)\Big)\right) \\ &= \frac{1}{3}\Big(3x - \frac{3}{4}\,\frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}(x^5)\Big) = x - \frac{x^5}{480} + \mathrm{o}(x^5) \end{aligned}$$

   – Développement limité de $f_3$ à l'origine :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sin x(\cos x)^{-1/3} = x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\Big)^{-1/3} \\ &= x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + \frac{x^4}{18} + \mathrm{o}(x^4)\Big) \\ &= x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\Big) \\ &= x\left(1 + x^4\Big(\frac{1}{24} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120}\Big) + \mathrm{o}(x^4)\right) = x + \frac{x^5}{45} + \mathrm{o}(x^5) \end{aligned}$$

   – Développement limité de $f_4$ à l'origine :

$$f_4(x) = \frac{1}{3}\Big(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^5)\Big) = x + \frac{x^5}{20} + \mathrm{o}(x^5)$$

On constate qu'au voisinage de l'origine on a les équivalents suivants :

$$f_2(x) - f_1(x) \sim \frac{13x^5}{160} \qquad x - f_2(x) \sim \frac{x^5}{480}$$
$$f_3(x) - x \sim \frac{x^5}{45} \qquad f_4(x) - f_3(x) \sim \frac{x^5}{36}$$

Deux fonctions équivalentes en un point ont même signe au voisinage de ce point.

On en déduit l'existence de $\eta_1$ tel que sur $]0, \eta_1[$ on ait $f_2(x) - f_1(x) > 0$.

De même il existe $\eta_2$ tel que sur $]0, \eta_2[$ on ait $x - f_2(x) > 0$.

Il existe également $\eta_3$ tel que sur $]0, \eta_3[$ on ait $f_3(x) - x > 0$.

Enfin il existe $\eta_4$ tel que sur $]0, \eta_4[$ on ait $f_4(x) - f_3(x) > 0$. Soit $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$.

Ce qui précède montre que sur $]0, \eta[$ on a : $f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$.

3. Sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x \neq 1$ donc $\sin x \neq \tan x$.

   Il en résulte que : $\forall\, x \in I,\ f_4(x) - f_3(x) = m(\sin x, \tan x) - g(\sin x, \tan x) > 0$.

4. On linéarise $u(x)$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= (2 + \cos x)\Big(8 \sin \frac{x}{2} - \sin x\Big) - 9 \sin x \\ &= 16 \sin \frac{x}{2} - 11 \sin x + 4\Big(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}\Big) - \frac{1}{2} \sin 2x \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2x + 4 \sin \frac{3x}{2} - 11 \sin x + 12 \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

   Il en découle

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\cos 2x + 6 \cos \frac{3x}{2} - 11 \cos x + 6 \cos \frac{x}{2} \\ &= 1 - 2\Big(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1\Big)^2 + 6\Big(4 \cos^3 \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2}\Big) - 11\Big(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1\Big) + 6 \cos \frac{x}{2} \\ &= -8 \cos^4 \frac{x}{2} + 24 \cos^3 \frac{x}{2} - 14 \cos^2 \frac{x}{2} - 12 \cos \frac{x}{2} + 10 \end{aligned}$$

   Ainsi $u'(x) = P\Big(\cos \dfrac{x}{2}\Big)$, avec $P(t) = -2(4t^4 - 12t^3 + 7t^2 + 6t - 5)$.

   On factorise le polynôme $P$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= -2(t-1)(4t^3 - 8t^2 - t + 5) = -2(t-1)^2(4t^2 - 4t - 5) \\ &= -8(t-1)^2(t - \alpha)(t - \beta) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1 - \sqrt{6}}{2}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

   Pour tout $x$ de $I$, on a $\alpha < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < t = \cos \dfrac{x}{2} < 1 < \beta$ donc $P(t) > 0$.

   Ainsi $u'(x) > 0$ sur $I$. Mais $u(0) = 2(f_2(0) - f_1(0)) = 0$. Il en découle : $\forall\, x \in I,\ u(x) > 0$.

   Or on a $u(x) = (2 + \cos x)(f_2(x) - f_1(x))$ et $2 + \cos x > 0$.

   On en déduit $\forall\, x \in I,\ f_1(x) < f_2(x)$.

5. On a $v(x) = x - f_2(x) = x - \dfrac{1}{3}\Big(8 \sin \dfrac{x}{2} - \sin x\Big)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} v'(x) &= 1 - \frac{1}{3}\Big(4 \cos \frac{x}{2} - \cos x\Big) = 1 - \frac{1}{3}\Big(4 \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 1\Big) \\ &= \frac{2}{3}\Big(\cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + 1\Big) = \frac{2}{3}\Big(\cos \frac{x}{2} - 1\Big)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $v'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, et $v'(x)$ ne s'annule qu'en des points isolés (les $x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$.)

L'application $v$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $v(0) = -f_2(0) = 0$.

On en déduit en particulier : $\forall\, x \in I,\ v(x) > 0$, c'est-à-dire $f_2(x) < x$.

6. Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $w(x) = f_3(x) - x = (\sin^2 x \tan x)^{1/3} - x = \sin x(\cos x)^{-1/3} - x$.

   On en déduit la factorisation de $w'(x)$ :

$$\begin{aligned} w'(x) &= (\cos x)^{2/3} + \frac{1}{3}\sin^2 x(\cos x)^{-4/3} - 1 = (\cos x)^{2/3} + \frac{1}{3}(1-\cos^2 x)(\cos x)^{-4/3} - 1 \\ &= \frac{2}{3}(\cos x)^{2/3} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-4/3} - 1 = \frac{1}{3}(\cos x)^{-4/3}\Bigl(2\cos^2 x + 1 - 3(\cos x)^{4/3}\Bigr) \\ &= \frac{1}{3}(\cos x)^{-4/3}\Bigl((\cos x)^{2/3} - 1\Bigr)^2\Bigl(2(\cos x)^{2/3} + 1\Bigr) \end{aligned}$$

   Il en découle que $w'(x) > 0$ sur $I$. Or $w(0) = f_3(0) = 0$. On en déduit $w(x) > 0$ sur $I$.

   Conclusion : pour tout $x$ de $I$, on a $x < f_3(x)$.

   Les questions 3 à 6 donnent donc : $\forall\, x \in I,\ f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$.

7. $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\Bigl(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\Bigr) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$. $\qquad \sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\Bigl(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\Bigr) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

   $\tan\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

   $\cos\dfrac{\pi}{12} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{24} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$.

   $\sin\dfrac{\pi}{24} = \sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{24}} = \sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{8}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$.

   On évalue maintenant les expressions $X$ et $Y$ :

$$\begin{aligned} X &= 12f_2\Bigl(\frac{\pi}{12}\Bigr) = 4\Bigl(8\sin\frac{\pi}{24} - \sin\frac{\pi}{12}\Bigr) = 16\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \\ &= \sqrt{2}\,\Bigl(8\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \sqrt{3} + 1\Bigr) \\ Y &= 12f_3\Bigl(\frac{\pi}{12}\Bigr) = 12\Bigl(\sin^2\frac{\pi}{12}\,\tan\frac{\pi}{12}\Bigr)^{1/3} \\ &= 12\Bigl(\frac{1}{8}(2-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})\Bigr)^{1/3} = 6(14-8\sqrt{3})^{1/3} \end{aligned}$$

   Les inégalités $f_2(x) < x < f_3(x)$ donnent $X < \pi < Y$.

   Une application numérique donne $3,1415 < \pi < 3,1420$.