Calcul intégral et convolution

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $\varphi_n(t) = \dfrac{3n}{4}(1 - n^2t^2)$ si $|t| \leqslant \dfrac{1}{n}$, et $\varphi_n(t) = 0$ si $|t| > \dfrac{1}{n}$.

Soit $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) f(x+t)\,\mathrm{d}t$

1. Tracer l'allure du graphe d'une fonction φ_n.
   L'application φ_n est-elle continue, dérivable ? Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$

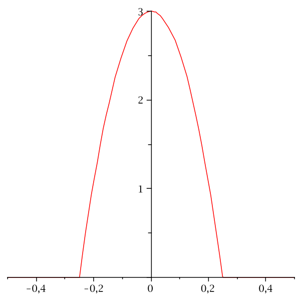
2. (a) Montrer que $f_n(x) = \displaystyle\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varphi_n(u-x) f(u)\,\mathrm{d}u$.
   Former une expression de $f_n(x)$ permettant d'affirmer que f_n est C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout x réel, montrer que $f_n'(x) = \dfrac{3n^3}{2}\displaystyle\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (u-x) f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{3n^3}{2}\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t f(x+t)\,\mathrm{d}t$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ et $M_n(x) = \max\limits_{u \in I_n(x)} |f(u) - f(x)|$.
   (a) Pour tout réel x, montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n(x)$
   (b) Soit J un segment, et $K_n(J) = \max\limits_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(J) = 0$.
   (c) Que peut-on en déduire relativement à la suite des fonctions f_n ?

4. On suppose que f est dérivable en un point x de $\mathbb{R}$.
   On définit l'application $t \mapsto R_x(t)$ par l'égalité $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tR_x(t)$.
   (a) Pour tout n naturel non nul, montrer que $f_n'(x) = f'(x) + \dfrac{3n^3}{2}\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 R_x(t)\,\mathrm{d}t$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

Corrigé

1. (a) Le graphe de φ_n est une parabole tronquée. La fonction est continue dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ dans chaque intervalle mais elle n'est pas dérivable en $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$.
   On a représenté ici le graphe de φ_4.



   (b) On trouve facilement $\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{n^2}{3n^3}\right) = 1$

2. (a) Avec le changement de variable $u = x + t$, on trouve $f_n(x) = \displaystyle\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varphi_n(u-x) f(u)\,\mathrm{d}u$.

   Ainsi : $\displaystyle\frac{4}{3n} f_n(x) = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \Big(1 - n^2(u-x)^2\Big) f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (1 - n^2x^2 + 2n^2xu - n^2u^2) f(u)\,\mathrm{d}u$

   On développe par linéarité :

   Ainsi : $\displaystyle\frac{4}{3n} f_n(x) = (1 - n^2x^2)\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(u)\,\mathrm{d}u + 2n^2x\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} uf(u)\,\mathrm{d}u - n^2\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} u^2f(u)\,\mathrm{d}u$

   Ces intégrales s'expriment à l'aide de primitives de $u \to f(u)$, $u \to uf(u)$, $u \to u^2 f(u)$.

   Il en résulte que f_n est $\mathcal{C}^1$.

   (b) L'expression précédente permet aussi le calcul de $f_n'(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3n} f_n'(x) &= -2n^2x\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(u)\,\mathrm{d}u + (1-n^2x^2)\Big(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x-\tfrac{1}{n})\Big)\\ &+2n^2\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} uf(u)\,\mathrm{d}u + 2n^2x\Big((x+\tfrac{1}{n})f(x+\tfrac{1}{n}) - (x-\tfrac{1}{n})f(x-\tfrac{1}{n})\Big)\\ &-n^2\Big((x+\tfrac{1}{n})^2 f(x+\tfrac{1}{n}) - (x-\tfrac{1}{n})^2 f(x-\tfrac{1}{n})\Big)\end{aligned}$$

   Les termes en $f(x-\frac{1}{n})$ et $f(x-\frac{1}{n})$ s'annulent.

   Il ne reste que les intégrales qui se regroupent pour donner $f_n'(x) = \displaystyle\frac{3n^3}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (u-x) f(u)\,\mathrm{d}u$

   On pose $t = u - x$ et on obtient : $f_n'(x) = \displaystyle\frac{3n^3}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} tf(x+t)\,\mathrm{d}t$

3. (a) On utilise le fait que l'intégrale de φ_n vaut 1 pour exprimer la différence comme une intégrale :

$$|f_n(x) - f(x)| = \Big|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)(f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,|f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \le \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) M_n(x)\,\mathrm{d}t = M_n(x)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = M_n(x)$$

   Remarque : on a utilisé le fait que φ_n est à valeurs positives.

   (b) On sait que toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

   Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que : $\forall\,(x,y) \in J^2,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Considérons un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \alpha$

Alors, $\forall\, x \in J,\ \forall\, n \geq N,\ M_n(x) < \varepsilon$ donc $K_n(J) < \varepsilon$. Conclusion $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(J) = 0$.

(c) Pour tout réel x fixé, soit J un segment contenant x (par exemple centré en x et de longueur 1).

La question précédente prouve la convergence vers 0 de la suite des $K_n(J)$.

Comme $|f_n(x) - f(x)| \leq K_n$, il en résulte $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$: la suite des fonctions (f_n) est *simplement convergente* vers f sur $\mathbb{R}$, et la convergence est *uniforme* sur tout segment.

4. (a) Remplaçons $f(x+t)$ en fonction de $R_x(t)$ dans l'expression de $f_n'(x)$ vue en (2b) :

$$f_n'(x) = \frac{3n^3}{2} f(x) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t\,\mathrm{d}t + \frac{3n^3}{2} f'(x) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2\,\mathrm{d}t + \frac{3n^3}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 R_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : de par sa définition, l'application $x \mapsto R_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut la prolonger par continuité en posant $R_x(0) = 0$ (c'est dû à la dérivabilité de f en x).

On obtient finalement : $f_n'(x) = f'(x) + \dfrac{3n^3}{2} \displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 R_x(t)\,\mathrm{d}t$

(b) Majorons $|f'(x) - f_n'(x)|$ en utilisant les expressions précédentes.

$$|f'(x) - f_n'(x)| \leq \frac{3n^3}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2\,|R_x(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{3n^3}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 \max_{t\in I_n(x)} |R_x(t)|\,\mathrm{d}t = \max_{t\in I_n(x)} |R_x(t)|$$

Pour x fixé, on a $\lim\limits_{t\to 0} R_x(t) = 0$, donc la quantité $\max\limits_{t\in I_n(x)} |R_x(t)|$ tends vers 0 quand t tend vers 0.

On en déduit que $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f'(x)$.