Intégrales de Futuna

Notations :

Soit f est une application continue sur $[x_0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On pose $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{x_0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, si cette limite existe dans $\mathbb{R}$.

Dans ce problème, il sera question d'intégrales de ce type, mais tous les calculs devront être effectués sur des intégrales sur un segment (le plus souvent $[0, a]$ avec $a > 0$) avant un passage à la limite (qui devra être justifié) quand a tend vers $+\infty$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}$ (si cette intégrale existe).

Les intégrales F_n sont appelées *intégrales de Futuna*.

1. (a) Prouver que F_1 existe, et calculer sa valeur.

   (b) Prouver que F_2 existe, et calculer sa valeur.

   (c) Montrer que tous les F_n ($n \geqslant 1$) existent et que $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. (a) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et convergente.

   (b) Dans cette question, on va prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = 0$.

   On se donne $\varepsilon > 0$, puis a, b dans $\mathbb{R}+*$, avec $a < b$.

   On décompose F_n sous la forme $F_n = \displaystyle\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} + \int_a^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} + \int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}$.

   i. Montrer que $F_n \leqslant a + \dfrac{b}{(\operatorname{ch} a)^n} + \dfrac{(2\mathrm{e}^{-b})^n}{n}$.

   ii. Choisir a et b et en déduire : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant F_n \leqslant \varepsilon$. Conclure.

3. (a) Déduire de la question (1) l'expression de F_{2n} et de F_{2n+1} à l'aide de factorielles.

   (b) Montrer que la suite $n \mapsto u_n = nF_nF_{n+1}$ est constante et calculer sa valeur.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = 1$, et en déduire que $F_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x$ (ce sont les intégrales de Wallis).

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $F_n = W_{n-1}$.

   Ce résultat explique l'analogie qu'on remarque entre les intégrales de Wallis et Futuna !

5. Appliquer la formule d'intégration approchée par la méthode du trapèze à $x \mapsto \ln x$ sur le segment $[n, n+1]$ et en déduire l'inégalité $0 \leqslant \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

6. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(n^n\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n}\right) - \ln(n!)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

   (b) On note $C = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

   Montrer l'égalité $2u_n - u_{2n} = \ln\left(\dfrac{F_{2n+1}\sqrt{2n}}{\pi}\right)$ et en déduire $C = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

   (c) Prouver finalement la formule de Stirling : $n! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Corrigé

1. (a) Tout d'abord, l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$.

On calcule $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$ (pour tout $a > 0$) en utilisant le changement $u = \mathrm{e}^x$.

D'abord $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}x$ et $\operatorname{ch} x = \dfrac{u^2+1}{2u}$.

On trouve : $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = \int_1^{\mathrm{e}^a} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \Big[2\arctan u\Big]_1^{e^a} = 2\Big(\arctan(e^a) - \frac{\pi}{4}\Big)$.

Quand on fait tendre a vers $+\infty$, la limite existe (ce qui prouve l'existence de F_1), et :

$F_1 = \displaystyle\lim_{a\to+\infty} 2\Big(\arctan(e^a) - \frac{\pi}{4}\Big) = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Tout d'abord, l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$ sur $\mathbb{R}$ est l'application $x \mapsto \operatorname{th} x$.

Ainsi, pour tout $a > 0$, on trouve : $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^2} = \Big[\operatorname{th} x\Big]_0^a = \operatorname{th} a$.

Quand $a \to +\infty$, la limite (donc F_2) existe et $F_2 = \displaystyle\lim_{a\to+\infty} \operatorname{th} a = 1$.

(c) On procède par récurrence forte. On sait déjà que F_1 et F_2 existent.

On se donne $n \geqslant 1$, et on suppose que $F_1, \ldots, F_{n+1}$ existent.

On a montrer l'existence de F_{n+2}. On se donne $a > 0$.

On intègre par parties $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^{n+2}} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^2(\operatorname{ch} x)^n}$ en primitivant $\dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$.

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^{n+2}} = \left[\frac{\operatorname{th} x}{(\operatorname{ch} x)^n}\right]_0^a + n\int_0^a \frac{(\operatorname{th} x)(\operatorname{sh} x)}{(\operatorname{ch} x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{th} a}{(\operatorname{ch} a)^n} + n\int_0^a \frac{(\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^{n+2}} = \frac{\operatorname{th} a}{(\operatorname{ch} a)^n} + n\int_0^a \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - 1}{(\operatorname{ch} x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$.

On en déduit $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^{n+2}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\operatorname{th} a}{(\operatorname{ch} a)^n} + n\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}\right)$.

Quand $a \to +\infty$, le membre droit de l'égalité tend vers $\displaystyle\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} = \frac{n}{n+1}F_n$.

Cela prouve l'existence de F_{n+2} et l'égalité $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$.

La suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est donc entièrement définie et : $\forall\, n \geqslant 1,\ F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$.

2. (a) Pour tout $x \geqslant 0$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $1 \leqslant \operatorname{ch} x$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^n}$.

Ainsi $0 \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^{n+1}} \leqslant \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}$ $(a > 0)$ donc $0 \leqslant F_{n+1} \leqslant F_n$ quand $a \to +\infty$.

La suite (F_n) est décroissante et minorée (par 0). Elle est donc convergente.

(b) i. Sur $[0, a]$ on a $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ donc $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} \leqslant \int_0^a \mathrm{d}x = a$.

Sur $[a, b]$ on a $\operatorname{ch} x \geqslant \operatorname{ch} a > 0$ donc $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} \leqslant \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} a)^n} = \frac{b-a}{(\operatorname{ch} a)^n} \leqslant \frac{b}{(\operatorname{ch} a)^n}$.

Sur $[b, +\infty[$, on a $\operatorname{ch} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ donc $\dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^n} \leqslant 2^n \mathrm{e}^{-nx}$.

Ainsi, pour tout $c > b$: $\displaystyle\int_b^c \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} \leqslant \int_b^c 2^n \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{2^n}{n}\Big[\mathrm{e}^{-nb} - \mathrm{e}^{-nc}\Big] \leqslant \frac{2^n}{n}\mathrm{e}^{-nb}$.

Quand $c \to +\infty$, on trouve la majoration $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} \leqslant \frac{(2\mathrm{e}^{-b})^n}{n}$.

Finalement, on a obtenu la majoration : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ F_n \leqslant a + \dfrac{b}{(\operatorname{ch} a)^n} + \dfrac{(2\mathrm{e}^{-b})^n}{n}$.

ii. On choisit $a = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $b = \ln 2$ (on se perd aucune généralité à supposer $\varepsilon < \ln 2$.

La majoration précédente devient : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ F_n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\ln 2}{(\operatorname{ch}(\varepsilon/2))^n} + \dfrac{1}{n}$.

Le membre droit de cette inégalité tend vers $\dfrac{\varepsilon}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi, il existe n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $0 \leqslant F_n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$.

Ce résultat signifie bien sûr que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n = 0$.

3. (a) Pour tout $n \geqslant 2$, $F_{2n} = \dfrac{2(n-1)}{2n-1} F_{2(n-1)} = \dfrac{2(n-1)}{(2n-1)}\dfrac{2(n-2)}{(2n-3)}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}F_2$. Or $F_2 = 1$.

Donc $F_{2n} = \dfrac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} = \dfrac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \dfrac{(2^n n!)^2}{2n\cdot(2n)!}$ (valable si $n = 1$).

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $F_{2n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} F_{2(n-1)+1} = \dfrac{2n-1}{2n}\dfrac{(2n-3)}{2(n-1)}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}F_1$. Or $F_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi $F_{2n+1} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ (valable si $n = 0$).

(b) En utilisant la relation donnant F_{n+2} en fonction de F_n, on obtient, pour $n \geqslant 1$:

$u_{n+1} = (n+1)F_{n+1}F_{n+2} = (n+1)F_{n+1}\Big(\dfrac{n}{n+1}F_n\Big) = nF_nF_{n+1} = u_n$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est constante. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 = F_1F_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 < F_{n+2} \leqslant F_{n+1} \leqslant F_n$ et donc $0 < \dfrac{F_{n+2}}{F_n} \leqslant \dfrac{F_{n+1}}{F_n} \leqslant 1$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+2}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1$.

Ainsi $F_{n+1} \sim F_n$ donc $\dfrac{\pi}{2} = nF_nF_{n+1} \sim nF_n^2$. Il en résulte $F_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. On se donne n dans $\mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $t = \tan\Big(\dfrac{x}{2}\Big)$ dans W_{n-1}.

On a $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$. De plus $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Quand x décrit $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, t décrit $[0,1]$. Ainsi $\displaystyle W_{n-1} = \int_0^{\pi/2}(\cos x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n-1}}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

On effectue le changement de variable $t = \operatorname{th}\Big(\dfrac{x}{2}\Big)$ dans F_n.

On a $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}(1-t^2)\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$, et on sait que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$.

Quand x décrit $\Big[0, a\Big]$, t décrit $[0, \operatorname{th}(a/2)]$. Ainsi $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} = 2\int_0^{\operatorname{th}(a/2)} \frac{(1-t^2)^{n-1}}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

Quand $a \to +\infty$, on obtient $\displaystyle F_n = 2\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n-1}}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = W_{n-1}$.

5. La formule d'intégration approchée s'écrit $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x \approx \frac{\ln n + \ln(n+1)}{2}$.

   L'application $x \mapsto \ln x$ étant concave, l'approximation est ici obtenue par défaut.

   On sait qu'un majorant de l'erreur commise est $\displaystyle\frac{1}{12} \sup_{[n,n+1]} \left|\ln''(x)\right| = \frac{1}{12} \sup_{[n,n+1]} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{12n^2}$.

   Ainsi $\displaystyle 0 \leqslant \int_n^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x - \frac{\ln n + \ln(n+1)}{2} \leqslant \frac{1}{12n^2}$.

   Mais $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_n^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n \ln n - 1$.

   Il en découle $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x - \frac{\ln n + \ln(n+1)}{2} = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1$.

   On a donc obtenu l'encadrement $\displaystyle 0 \leqslant \Big(n + \frac{1}{2}\Big)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \frac{1}{12n^2}$.

6. (a) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln\Big((n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}\,\mathrm{e}^{-n-1}\Big) - \ln((n+1)!) - \ln\Big(n^n\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n}\Big) + \ln(n!) \\ &= \Big(n + \frac{3}{2}\Big)\ln(n+1) - (n+1) - \ln(n+1) - \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\ln n + n \\ &= \Big(n + \frac{1}{2}\Big)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \end{aligned}$$

   La question précédente donne donc $\displaystyle 0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{12n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

   En particulier, la suite $(u_n)_{n\geqslant}$ est croissante. D'autre part, pour tout $n \geqslant 2$:

   $\displaystyle v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n-1)} = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12n(n-1)}$.

   Ainsi $\displaystyle v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} < 0$. La suite $(v_n)_{n\geqslant}$ est donc décroissante.

   Enfin, il est clair que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{12(n-1)} = 0$.

   Les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont donc adjacentes.

   (b) On trouve successivement :

$$\begin{aligned} 2u_n - u_{2n} &= 2\ln\Big(n^n\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n}\Big) - 2\ln(n!) - \ln\Big((2n)^{2n}\sqrt{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\Big) + \ln((2n)!) \\ &= \ln\Big(n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}\Big) - \ln\Big((2n)^{2n}\sqrt{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\Big) + \ln((2n)!) - 2\ln(n!) \\ &= \ln n - \ln\Big(2^{2n}\sqrt{2n}\Big) + \ln((2n)!) - 2\ln(n!) = \ln\Big(\frac{(2n)!\sqrt{n}}{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}\Big) \end{aligned}$$

   Or $\displaystyle F_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle 2u_n - u_{2n} = \ln\Big(\frac{F_{2n+1}\sqrt{2n}}{\pi}\Big)$

   On a $\displaystyle F_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}\sqrt{2n}}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2u_n - u_{2n}) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

   Mais bien sûr $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2u_n - u_{2n}) = 2\lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} u_{2n} = 2C - C = C$.

   On obtient finalement $\displaystyle C = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

   (c) On sait maintenant que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\ln\Big(n^n\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n}\Big) - \ln(n!)\Big) = \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

   Autrement dit $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$.

   On a donc obtenu la formule de Stirling : $n! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.