Une intégrale dépendant d'un paramètre

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, où α est un réel.

Première partie

1. Montrer que l'application F est définie et positive sur $I=\,]\,1,+\infty\,[$.
2. Calculer $F(2)$, $F(3)$, $F(\frac{3}{2})$.
3. Pour tout α de I, montrer que $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^1\frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que l'application $\alpha\to F(\alpha)$ est convexe sur I.
   Indication : pour t fixé dans $]0,1]$, considérer l'application $h_t:\alpha\mapsto\dfrac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne deux entiers n et p strictement positifs, avec $p<2n$.

Pour tout entier k de $\{1,\ldots,2n\}$, on note $\theta_k=\dfrac{2k-1}{2n}\,\pi$.

1. Pour tout réel θ de $]\,0,\pi\,[$, calculer les sommes suivantes :
   $C_n(\theta)=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta$, $S_n(\theta)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta$ et $D_n(\theta)=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\sin(2k-1)\theta$.
2. Montrer que la fraction rationnelle $R(x)=\dfrac{p\,x^{p-1}}{x^{2n}+1}$ se décompose en $R(x)=\dfrac{p}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}R_k(x)$, avec $R_k(x)=\dfrac{a_kx+b_k}{x^2-2x\cos\theta_k+1}$. Déterminer a_k,b_k et prouver l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$.
3. Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, soit S_k la primitive de R_k qui s'annule en 0. Montrer que :
   $S_k(x)=\dfrac{a_k}{2}\ln\Bigl(x^2-2x\cos\theta_k+1\Bigr)+\sin(p\,\theta_k)\arctan\Bigl(\dfrac{x-\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\Bigr)+\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-\theta_k\Bigr)\sin(p\,\theta_k)$.
4. Montrer que si $\alpha=\dfrac{2n}{p}$, alors $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}R(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire $F(\alpha)=\dfrac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$.
5. On suppose que α est quelconque dans I. Montrer que $F(\alpha)=\dfrac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$.

Corrigé du problème

Première partie

1. Pour tout réel α, l'application $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est définie continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Elle est continue en 0 si $\alpha \geqslant 0$ et prolongeable par continuité par $f_\alpha(0) = 0$ si $\alpha < 0$.

   Si $\alpha \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_\alpha(t) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ donc f_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Si $\alpha > 0$, on a $f_\alpha(t) \sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ quand t tend vers $+\infty$.

   On en déduit (comparaison avec les intégrales de Riemann) que f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha > 1$, et non intégrable sinon.

   Autrement dit, l'application $\alpha \mapsto F(\alpha)$ est définie sur $I =]\,1, +\infty\,[$.

   Puisque f_α est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, il en est de même de $F(\alpha)$ pour $\alpha > 1$.

2. On a $F(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

   Pour calculer $F(3)$, on note que $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$.

   On multiplie la décomposition par $t+1$ et on donne à t la valeur -1. On trouve $a = \dfrac{1}{3}$.

   On donne à t la valeur 0 et on obtient $a + c = 1$.

   On multiplie la décomposition par t et on fait tendre t vers $+\infty$. On trouve $a + b = 0$.

   Ainsi $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{t+1} - \dfrac{t-2}{t^2-t+1}\Big) = \dfrac{1}{3(t+1)} - \dfrac{2t-1}{6(t^2-t+1)} + \dfrac{1}{2(t^2-t+1)}$.

   Une primitive de $\dfrac{1}{t^2-t+1} = \dfrac{1}{\Big(t-\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2}$ est $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(t - \dfrac{1}{2}\Big)$

   Une primitive de $\dfrac{1}{1+t^3}$ est donc $g_3(t) = \dfrac{1}{3}\ln(t+1) - \dfrac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$.

   Ainsi $g_3(t) = \dfrac{1}{6} \ln \dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$.

   On trouve $g_3(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

   Finalement, on obtient : $F(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \lim_{x\to+\infty} g_3(x) - g_3(0) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

   Pour calculer $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big)$, on commence par effectuer le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

   On trouve $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{3/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$.

   On constate que $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) + 2F(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2(1+u)\,\mathrm{d}u}{1+u^3} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}$.

   Ainsi $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) + 2F(3) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\Big[\arctan \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(\pi + \dfrac{\pi}{3}\Big) = \dfrac{8\pi\sqrt{3}}{9}$.

   Puisque $F(3) = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$, il en découle $F\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.

3. Pour $\alpha > 1$, on écrit $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

   Dans la dernière intégrale, on effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

   On trouve $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = -\int_1^0 \frac{\mathrm{d}u}{u^2(1+u^{-\alpha})} = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-2}\,\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}$.

   On revient à la variable t : $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} + \int_0^1 \frac{t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

4. Pour tout t de $]0,1]$, on définit $h_t : \alpha \mapsto \dfrac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$.

   Avec ces notations, et pour tout $\alpha > 1$, on a l'égalité $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 h_t(\alpha)\,\mathrm{d}t$.

   Pour tout $\alpha > 1$, on a $h_t(\alpha) = \dfrac{1}{t^2}\Big(1 - \dfrac{1-t^2}{1+t^\alpha}\Big)$.

   On va montrer que h_t est convexe.

   Pour cela, il suffit de prouver que $k_t : \alpha \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est concave.

   $$\begin{aligned} k_t(\alpha) = (1+t^\alpha)^{-1} &\Rightarrow k_t'(\alpha) = -(\ln t)t^\alpha(1+t^\alpha)^{-2} \\ &\Rightarrow k_t''(\alpha) = -(\ln t)^2\, t^\alpha\,(1+t^\alpha)^{-2} + 2(\ln t)^2\, t^{2\alpha}\,(1+t^\alpha)^{-3} \\ &\Rightarrow k_t''(\alpha) = -(\ln t)^2\, t^\alpha\,(1+t^\alpha)^{-3}((1+t^\alpha) - 2t^\alpha) \\ &\Rightarrow k_t''(\alpha) = -(\ln t)^2\, t^\alpha\,(1+t^\alpha)^{-3}(1-t^\alpha) \end{aligned}$$

   On constate que $k_t''(\alpha)$ est strictement négative pour tout $\alpha > 1$.

   Ainsi k_t est concave, donc h_t est convexe, pour tout t de $]0,1]$. Autrement dit :

   $\forall\, t \in]0,1],\ \forall\,(\alpha,\beta) \in I^2,\ \forall\,\lambda \in [0,1],\ h_t(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \leqslant \lambda h_t(\alpha) + (1-\lambda)h_t(\beta)$.

   Si on intègre cette inégalité de $t = 0$ à $t = 1$, on trouve :

   $\forall\,(\alpha,\beta) \in I^2,\ \forall\,\lambda \in [0,1],\ F(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \leqslant \lambda F(\alpha) + (1-\lambda)F(\beta)$.

   Cela prouve la convexité de l'application F sur l'intervalle I.

   Remarque : F étant convexe sur l'intervalle ouvert I, elle y est continue.

Deuxième partie

1. On calcule $T_n(\theta) = C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i(2k-1)\theta}$, qui est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de terme initial $\mathrm{e}^{i\theta}$ et de raison $q = \mathrm{e}^{2i\theta}$ ($q \neq 1$ car $0 < \theta < \pi$.)

   On trouve $T_n(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{\mathrm{e}^{2in\theta} - 1}{\mathrm{e}^{2i\theta} - 1} = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}}\,\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}} = \mathrm{e}^{in\theta}\dfrac{2i\sin n\theta}{2i\sin\theta} = \mathrm{e}^{in\theta}\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$.

   Ainsi $C_n(\theta) = \operatorname{Re} T_n(\theta) = \dfrac{\cos n\theta\,\sin n\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$ et $S_n(\theta) = \operatorname{Im} T_n(\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$.

   On remarque enfin que l'application $\theta \mapsto D_n(\theta)$ est la dérivée de $\theta \mapsto -C_n(\theta)$.

   On en déduit $D_n(\theta) = -C_n'(\theta) = \dfrac{\cos\theta\,\sin 2n\theta - 2n\sin\theta\cos 2n\theta}{2\sin^2\theta}$.

2. On va décomposer $R(x)$ sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les éléments simples conjugués.
   Les pôles complexes de R sont tous simples. Ce sont les racines $2n$-ièmes de -1.
   Or $z^{2n} = -1 \Leftrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, 2n\},\ z = \exp\Bigl(-\dfrac{i\pi}{2n} + k\dfrac{i\pi}{n}\Bigr) = \mathrm{e}^{i\theta_k}$.
   Compte tenu de l'hypothèse $p < 2n$, la partie entière de R est nulle.
   La décomposition de $R(x)$ sur $\mathbb{C}$ s'écrit donc $R(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{x - \mathrm{e}^{i\theta_k}}$, avec $\lambda_k \in \mathbb{C}$.
   En notant $R(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, avec $\begin{cases} A(x) = px^{p-1} \\ B(x) = x^{2n} + 1 \end{cases}$, on sait que $\lambda_k = \dfrac{A(\mathrm{e}^{i\theta_k})}{B'(\mathrm{e}^{i\theta_k})}$.
   Mais $B'(x) = 2nx^{2n-1} \Rightarrow B'(\mathrm{e}^{i\theta_k}) = 2n\,(\mathrm{e}^{i\theta_k})^{2n}\,e^{-i\theta_k} = -2n\,e^{-i\theta_k}$.
   Finalement, pour tout k de $\{1, \ldots, 2n\}$, on a : $\lambda_k = -\dfrac{p}{2n}\,\mathrm{e}^{ip\theta_k}$.
   Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\theta_{2n+1-k} = 2\pi - \theta_k$ donc $\exp(i\theta_{2n+1-k}) = \overline{\exp(i\theta_k)}$.
   Par regroupement des termes conjugués dans la décomposition de $R(x)$, on trouve :
   $R(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Bigl(\frac{\lambda_k}{x - \mathrm{e}^{i\theta_k}} + \frac{\overline{\lambda_k}}{x - \mathrm{e}^{-i\theta_k}}\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\mathrm{Re}\,\lambda_k x - 2\mathrm{Re}\,(\lambda_k \mathrm{e}^{-i\theta_k})}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1}$
   Mais $\mathrm{Re}\,\lambda_k = -\dfrac{p}{2n}\cos p\theta_k$ et $\mathrm{Re}\,(\lambda_k \mathrm{e}^{-i\theta_k}) = -\dfrac{p}{2n}\cos(p-1)\theta_k$.
   On trouve donc finalement $R(x) = \dfrac{p}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k x + b_k}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1}$ où $\begin{cases} a_k = -\cos p\theta_k \\ b_k = \cos(p-1)\theta_k \end{cases}$
   Quand on fait tendre x vers ∞ dans $xR(x) = \dfrac{px^p}{x^{2n} + 1}$ la limite est 0 car $p < 2n$.
   Si on remplace R par sa décomposition, le même passage à la limite donne $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.
   On en déduit l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$.
   Autre méthode : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = -\sum\limits_{k=1}^{n} \cos p\theta_k = -\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta$ avec $\theta = \dfrac{p\pi}{2n} \in\,]\,0, \pi\,[$.
   En utilisant la question II.1, on trouve $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = -C_n(\theta) = 0$ car $\sin 2n\theta = 0$.

3. On a $R_k(x) = \dfrac{a_k x + b_k}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1} = a_k\dfrac{x - \cos\theta_k}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1} + \dfrac{a_k\cos\theta_k + b_k}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1}$.
   D'autre part, $a_k\cos\theta_k + b_k = -\cos p\theta_k\,\cos\theta_k + \cos(p-1)\theta_k = \sin p\theta_k\,\sin\theta_k$.
   Ainsi $R_k(t) = \dfrac{a_k}{2}\,\dfrac{2(t - \cos\theta_k)}{t^2 - 2t\cos\theta_k + 1} + \dfrac{\sin p\theta_k\,\sin\theta_k}{(t - \cos\theta_k)^2 + \sin^2\theta_k}$.
   On a $\displaystyle\int_0^x \frac{2(t - \cos\theta_k)}{t^2 - 2t\cos\theta_k + 1}\,\mathrm{d}t = \Bigl[\ln(t^2 - 2t\cos\theta_k + 1)\Bigr]_0^x = \ln(x^2 - 2x\cos\theta_k + 1)$.
   $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin\theta_k\,\mathrm{d}t}{(t - \cos\theta_k)^2 + \sin^2\theta_k} = \Bigl[\arctan\frac{t - \cos\theta_k}{\sin\theta_k}\Bigr]_0^x = \arctan\frac{x - \cos\theta_k}{\sin\theta_k} + \arctan\frac{1}{\tan\theta_k}$
   Mais $\arctan\dfrac{1}{\tan\theta_k} = \arctan\tan\Bigl(\dfrac{\pi}{2} - \theta_k\Bigr) = \dfrac{\pi}{2} - \theta_k$, car $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - \theta_k < \dfrac{\pi}{2}$.
   On obtient donc finalement :
   $S_k(x) = \dfrac{a_k}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\theta_k + 1) + \sin p\theta_k\,\arctan\dfrac{x - \cos\theta_k}{\sin\theta_k} + \Bigl(\dfrac{\pi}{2} - \theta_k\Bigr)\sin p\theta_k$.

4. Avec $t = u^p$ et on obtient : $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2n/p}} = \int_0^{+\infty} \frac{pu^{p-1}\,\mathrm{d}u}{1+u^{2n}} = \int_0^{+\infty} R(u)\,\mathrm{d}u$.

   On trouve successivement :
   $$\int_0^{+\infty} R(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x R(u)\,\mathrm{d}u = \frac{p}{n} \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^x R_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{p}{n} \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^n S_k(x).$$
   La question précédente donne alors :
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n S_k(x) &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^n a_k\Big) \ln(x^2 - 2x\cos\theta_k + 1)\\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sin p\theta_k \,\arctan\frac{x-\cos\theta_k}{\sin\theta_k} + \sum_{k=1}^n \Big(\frac{\pi}{2} - \theta_k\Big)\sin p\theta_k\end{aligned}$$
   On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k = 0$. D'autre part, $\arctan\dfrac{x-\cos\theta_k}{\sin\theta_k}$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$.

   On en déduit, pour tout $x > 0$:
   $$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^n S_k(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^n \sin p\theta_k + \sum_{k=1}^n \Big(\frac{\pi}{2} - \theta_k\Big)\sin p\theta_k = \sum_{k=1}^n (\pi - \theta_k)\sin p\theta_k.$$
   On peut donc écrire $F(\alpha) = \dfrac{p}{n} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^n S_k(x) = \frac{p\pi}{n}\sum_{k=1}^n \sin p\theta_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p\theta_k \sin p\theta_k$.

   On voit que $\dfrac{p\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sin p\theta_k = 2\theta \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)\theta = 2\theta S_n(\theta)$ avec $\theta = \dfrac{p\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{\alpha}$.

   De même $\displaystyle\sum_{k=1}^n p\theta_k \sin p\theta_k = \theta \sum_{k=1}^n (2k-1)\sin(2k-1)\theta = \theta D_n(\theta)$, toujours avec $\theta = \dfrac{p\pi}{2n}$.

   Ici $S_n(\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1-\cos 2n\theta}{2\sin\theta} = \dfrac{1-\cos p\pi}{2\sin\theta} = \dfrac{1-(-1)^p}{2\sin\theta}$.

   De même, on trouve :
   $$D_n(\theta) = \frac{\cos\theta\,\sin 2n\theta - 2n\sin\theta\cos 2n\theta}{2\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta\,\sin p\pi - 2n\sin\theta\cos p\pi}{2\sin^2\theta} = \frac{-n(-1)^p}{\sin\theta}$$
   Finalement :
   $$F(\alpha) = 2\theta\, S_n(\theta) - \frac{\theta}{n} D_n(\theta) = 2\theta\frac{1-(-1)^p}{2\sin\theta} + \frac{\theta}{n}\frac{n(-1)^p}{\sin\theta} = \frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{(ouf...)}$$

5. Soit $\alpha > 1$. On sait qu'il existe une suite de rationnels $r_n > 1$ tels que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = \alpha$.

   Chacun de ces rationnels peut être écrit sous la forme $r_n = \dfrac{2n'}{p'}$, avec $p' < 2n'$ (au besoin on multiplie par 2 le numérateur et le dénominateur de r_n.)

   Pour chacun des ces rationnels r_n, on connait l'égalité $F(r_n) = \dfrac{\pi}{r_n \sin\frac{\pi}{r_n}}$.

   Mais F est continue, car convexe, sur l'intervalle ouvert I.

   On en déduit $F(\alpha) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{r_n\sin\frac{\pi}{r_n}} = \frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$.

   Conclusion : pour tout $\alpha > 1$, on a $F(\alpha) = \dfrac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$.