Équations différentielles avec Maple

Exercice 1

On considère les équations différentielles $\begin{cases} (H) : x(x-1)(x-2)\,y'(x) + (2x^2-5x+4)\,y(x) = 0 \\ (E) : x(x-1)(x-2)\,y'(x) + (2x^2-5x+4)\,y(x) = 1 \end{cases}$

Écrire (avec précision) l'expression Maple qui renverrait la solution générale de l'équation (H).

1. Donner la solution générale, sur un intervalle I à préciser, de l'équation (H).
2. Donner la solution générale, sur le même intervalle I, de l'équation (E).
3. Préciser les solutions éventuelles de (E) sur les intervalles suivants :
   (NB : s'il y a des prolongements, on donnera un DL d'ordre 2 au point considéré)
   (a) Sur l'intervalle $J_1 =]-\infty, 1[$
   (b) Sur l'intervalle $J_2 =]0, 2[$
   (c) Sur l'intervalle $J_3 =]1, +\infty[$

Exercice 2

Soit m un paramètre réel.
On considère les équations différentielles $\begin{cases} (H) : y'' - 2m\,y' + (1+m^2)\,y = 0 \\ (E) : y'' - 2m\,y' + (1+m^2)\,y = \mathrm{e}^x \cos(x) \end{cases}$

On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ qui sont à valeurs réelles.

En discutant éventuellement suivant les valeurs du paramètre m :

1. Donner la solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$
2. Donner une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$

© Jean-Michel Ferrard

Corrigé de l'exercice 1

1. Laissons parler Maple, en le guidant un peu quand même.

   On définit les fonctions a et b (notations usuelles), et l'équation (H).

```
> a:=x->x*(x-1)*(x-2): b:=x->2*x^2-5*x+4:
> H:=a(x)*diff(y(x),x)+b(x)*y(x);
```

$$H := x\,(x-1)\,(x-2)\,\frac{d}{dx}y\,(x) + \left(2\,x^2 - 5\,x + 4\right)y\,(x)$$

   On sait qu'on va résoudre (H) sur $I =]-\infty, 0[$, ou $I =]0,1[$, ou $I =]1,2[$, ou $I =]2,+\infty[$.

   On décompose la fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ en éléments simples.

```
> R:=b(x)/a(x); convert(R,parfrac,x);
```

$$R := \frac{2\,x^2 - 5\,x + 4}{x\,(x-1)\,(x-2)}$$
$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x}$$

   On pouvait trouver ces trois coefficients de la manière habituelle :

```
> koef:= x0 -> limit((x-x0)*R,x=x0):
> koef(2), koef(1), koef(0);
```

$$1,\ -1,\ 2$$

   Voici une primitive B de la fraction R :

```
> B:=int(b(x)/a(x),x);
```

$$2\,\ln(x) + \ln(x-2) - \ln(x-1)$$

   Bien sûr, il faut comprendre $B = 2\,\ln|x| + \ln|x-2| - \ln|x-1|$.

   Une base de la droite des solutions de (H) sur I est $x \mapsto y_h(x) = \exp(-B(x)) = \left|\dfrac{x-1}{x^2(x-2)}\right|$ et on sait qu'on peut se débarrasser de la valeur absolue.

```
> yH:=unapply(simplify(exp(-B),symbolic),x);
```

$$yH := x \mapsto \frac{x-1}{x^2\,(x-2)}$$

   Ici `simplify(`*expr*`,symbolic)` permet de simplifier sans scrupules, et `unapply(`*expr*`,x)` permet de transformer une expression *expr* contenant x en une fonction de x.

   La solution générale de (H) sur I s'écrit donc : $x \mapsto \lambda y_h(x)$, où λ est un réel quelconque.

   Évidemment, Maple le savait depuis le départ :

```
> dsolve(H,y(x));
```

$$y\,(x) = \frac{(x-1)\,\_C1}{x^2\,(x-2)}$$

© Jean-Michel Ferrard

2. On va appliquer la méthode de variation de la constante. Voici d'abord l'équation (E).

```
> E:= H=1;
```

$$E := x\,(x-1)\,(x-2)\,\frac{d}{dx}y\,(x) + \left(2\,x^2 - 5\,x + 4\right)y\,(x) = 1$$

On pose $y(x) = \lambda(x)y_h(x)$, où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et on simplifie (E).

```
> y:=x->lambda(x)*yh(x): varc:=simplify(E);
```

$$\frac{(x-1)^2}{x}\frac{d}{dx}\lambda\,(x) = 1$$

L'équation différentielle $\lambda'(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$ est évidente à résoudre.

```
> varc:=dsolve(varc,lambda(x));
```

$$varc := \lambda\,(x) = -\frac{1}{x-1} + \ln\,(x-1) + \_C1$$

Attention, il faut ici comprendre $\ln|x-1|$ plutôt que $\ln(x-1)$.
On en déduit la solution générale de (E) (ici on remplace $\_C1$ par β)

```
> subs(varc,_C1=beta,ln(x-1)=ln(abs(x-1)),y(x));
```

$$\left(-\frac{1}{x-1} + \ln\,(|x-1|) + \beta\right)\frac{x-1}{x^2(x-2)}$$

On réorganise par rapport à β et on redéfinit le résultat comme une fonction y de β et x.

```
> y:=unapply(collect(%,beta,factor),(beta,x));
```

$$y := (\beta, x) \mapsto \frac{(x-1)\,\beta}{x^2\,(x-2)} + \frac{-1 + \ln\,(|x-1|)\,x - \ln(|x-1|)}{x^2\,(x-2)}$$

La solution générale de (E) sur I est donc :

$$x \mapsto y_\beta(x) = \frac{1}{x^2(x-2)}\Big((x-1)\ln|x-1| - 1 + \beta(x-1)\Big), \text{ avec } \beta \text{ dans } \mathbb{R}$$

3. (a) On a $\lim\limits_{x\to 0}((x-1)\ln|x-1| - 1 + \beta(x-1)) = -\beta - 1$.

```
> limit(numer(y(beta,x)),x=0);
```

$$-\beta - 1$$

On en déduit que si $\beta \neq -1$, on ne peut pas prolonger $y_\beta(x)$ en $x = 0$.
On définit la fonction y_{m1} en donnant à β la valeur -1.

```
> ym1:=x->y(-1,x): factor(ym1(x)) assuming x<1;
```

$$\frac{-x + \ln(-x+1)\,x - \ln(-x+1)}{x^2\,(x-2)}$$

Au voisinage de 0, on a donc $y_{m1}(x) = \dfrac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x^2(2-x)}$

L'application y_{m1} possède un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

© Jean-Michel Ferrard

```
> taylor(ym1(x),x,3);
```

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{24}x+\frac{7}{48}x^2+O\left(x^3\right)$$

En prolongeant par continuité avec $y_{m1}(0)=1/4$, ce prolongement est donc dérivable en $x=0$, avec $y'_{m1}(0)=5/24$ (et la courbe est localement au-dessus de sa tangente).

Conclusion : y_{m1} est la seule solution de (E) sur $]-\infty,1[$.

(b) On effectue une étude de $y_\beta(x)$ au voisinage de $x=1$.

Voici l'expression de $y_\beta(x)$ quand on pose $x=1+h$.

```
> factor(y(beta,1+h));
```

$$\frac{h\beta-1+\ln\left(|h|\right)h}{\left(1+h\right)^2\left(-1+h\right)}$$

La fonction y_β tend vers 1 quand x tend vers 1.

```
> limit(y(beta,1+h),h=0);
```

$$1$$

On forme le taux d'accroissement $\dfrac{y_\beta(1+h)-1}{h}$: il tend vers $+\infty$ quand $h\to 0$.

```
> taux:=factor((y(beta,1+h)-1)/h); limit(taux,h=0);
```

$$\frac{\beta+\ln\left(|h|\right)+1-h-h^2}{\left(1+h\right)^2\left(-1+h\right)}$$

$$\infty$$

Les fonctions y_β sont donc prolongeables par continuité en $x=1$, mais elles n'y sont pas dérivables (tangente verticale). L'équation (E) n'a donc pas de solution sur $]0,2[$.

(c) On effectue une étude de $y_\beta(x)$ au voisinage de $x=2$.

On a $\lim\limits_{x\to 2}((x-1)\ln|x-1|-1+\beta(x-1))=\beta-1$.

```
> limit(numer(y(beta,x)),x=2);
```

$$\beta-1$$

On en déduit que si $\beta\neq 1$, on ne peut pas prolonger $y_\beta(x)$ en $x=2$.

On définit la fonction y_1 en donnant à β la valeur 1.

```
> y1:=x->y(1,x): factor(y1(x)) assuming x>1;
```

$$\frac{x-2+\ln\left(x-1\right)x-\ln\left(x-1\right)}{x^2\left(x-2\right)}$$

On se place ici sur la réunion de $]1,2[$ et de $]2,+\infty[$.

On a $y_1(x)=\dfrac{x-2+(x-1)\ln(x-1)}{x^2(2-x)}$ donc $y_1(2+h)=\dfrac{h+(1+h)\ln(1+h)}{(2+h)^2h}$

L'application y_1 possède un développement limité à l'ordre 2 en $x=2$:

```
> taylor(y1(x),x=2,3);;
```

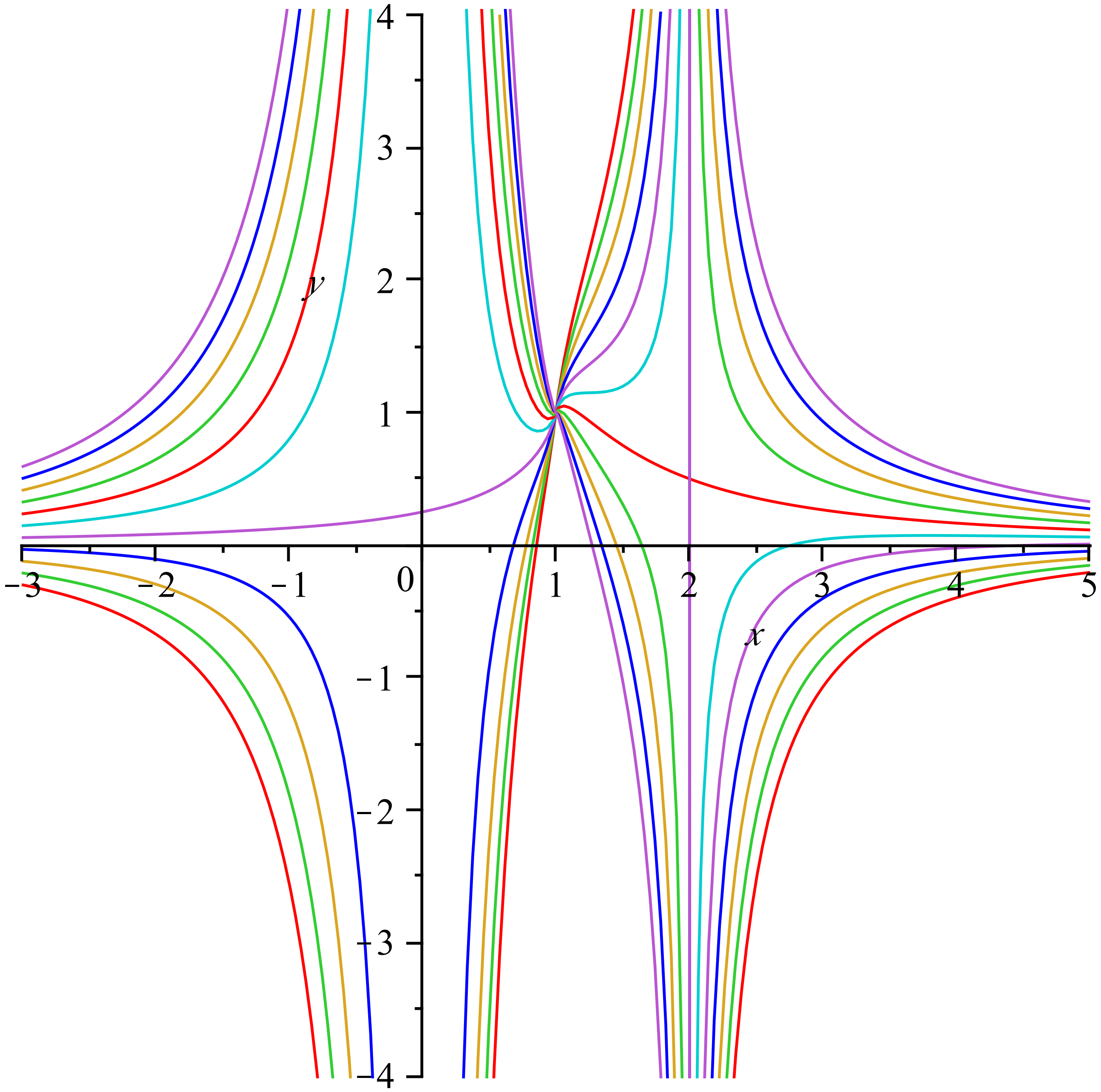
$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8}(x-2) + \frac{5}{24}(x-2)^2 + O\left((x-2)^3\right)$$

En prolongeant par continuité en posant $y_1(1) = \frac{1}{2}$, ce prolongement est donc dérivable en $x = 2$, avec $y_1'(2) = -\frac{3}{8}$ (et la courbe est localement au-dessus de sa tangente).

Conclusion : y_1 est la seule solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

4. Voici un tracé de quelques courbes intégrales. On a tracé des fonctions $x \mapsto y_\beta(x)$ sur $]-3, 5[$, en limitant à $]-4, 4[$ l'intervalle en y. Pour β on s'est limité aux valeurs entières de -5 à 5 (et ça comporte les deux solutions prolongées obtenues précédemment).
On voit bien l'impossibilité de prolonger en $x = 1$ (toutes les courbes intégrales arrivent au point $(1, 1)$ avec une tangente verticale).

```
> plot([seq(y(beta,x),beta=-5..5)],x=-3..5,y=-4..4,numpoints=200);
```



Corrigé de l'exercice 2

1. On définit a, b, c et l'équation H.

```
> a:=1: b:=-2*m: c:=m^2+1:
> H:= a*diff(y(x),x,x)+b*diff(y(x),x)+c*y(x);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\,m\frac{d}{dx}y(x) + \left(m^2+1\right)y(x)$$

Voici l'équation caractéristique et son discriminant :

```
> eqc:=a*t^2+b*t+c; factor(discrim(eqc,t));
```

$$eqc := t^2 - 2\,mt + m^2 + 1$$
$$-4$$

Les racines de l'équation caractéristique sont $m+i$ et $m-i$.

```
> solve(eqc,t);
```

$$-I+m, I+m$$

La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit donc :
$y := x \mapsto \mathrm{e}^{mx}(\lambda\cos x + \mu\sin x)$, avec (λ, μ) dans $\mathbb{R}^2$.
Bien sûr, Maple le sait :

```
> dsolve(H,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\ \mathrm{e}^{mx}\sin(x) + \_C2\ \mathrm{e}^{mx}\cos(x)$$

2. On utilise $\cos x = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{ix})$ et le principe de superposition.
On prendra don la partie réelle d'une solution complexe de (E_c) : $y''-2my'+(1+m^2)y = \mathrm{e}^{(1+i)x}$.

```
> Ec:=H=exp((1+I)*x);
```

$$Ec := \frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\,m\frac{d}{dx}y(x) + \left(m^2+1\right)y(x) = \mathrm{e}^{(1+i)x}$$

On se demande donc si $1+i$ est racine de l'équation caractéristique.
C'est le cas si et seulement si $m=1$ (et c'est alors une racine simple).

— $\boxed{\textbf{Cas général : } m \neq 1}$

On cherche une solution de (E_c) sous la forme $y_k(x) = k\mathrm{e}^{(1+i)x}$, avec k dans $\mathbb{C}$.

```
> yk:=k*exp((1+I)*x);
```

$$yk := k\mathrm{e}^{(1+i)x}$$

On substitue dans (E_c) et on simplifie par $\mathrm{e}^{(1+i)x}$.

```
> Ec:=subs(y(x)=yk,Ec): factor(Ec/exp((1+I)*x));
```

$$-k\,(-1+m)\,(-m+1+2\,i)=1$$

On en déduit la valeur de k, donc la fonction y_k.

```
> factor(solve(%,k));
```

$$\left\{k=-\frac{1}{(-1+m)\,(-m+1+2\,i)}\right\}$$

```
> yk:=subs(%,yk);
```

$$yk:=-\frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{(-1+m)\,(-m+1+2\,i)}$$

Il suffit de prendre la partie réelle et on a une solution particulière de (E) :

```
> yk:=factor(evalc(Re(yk)));
```

$$\frac{\mathrm{e}^{x}\,(-\cos(x)+\cos(x)\,m-2\,\sin(x))}{(-1+m)\,(5-2\,m+m^2)}$$

On peut vérifier directement que ce résultat est correct en utilisant `dsolve` sur l'équation (E) et en donnant aux constantes arbitraires `_C1` et `_C2` la valeur 0.

```
> factor(subs(_C1=0,_C2=0,dsolve(E,y(x))));
```

$$y(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}\,(-\cos(x)+\cos(x)\,m-2\,\sin(x))}{(-1+m)\,(5-2\,m+m^2)}$$

— $\boxed{\textbf{Cas particulier : } m=1}$

Voici l'équation (E_c) dans ce cas particulier :

```
> Ec:=subs(m=1,H=exp((1+I)*x));
```

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)-2\,\frac{d}{dx}y(x)+2\,y(x)=\mathrm{e}^{(1+i)x}$$

On cherche une solution de (E_c) sous la forme $y_k(x)=kx\mathrm{e}^{(1+i)x}$, avec k dans $\mathbb{C}$.

```
> yk:=k*x*exp((1+I)*x);
```

$$yk:=kx\mathrm{e}^{(1+i)x}$$

On substitue dans (E_c) et on simplifie par $\mathrm{e}^{(1+i)x}$.

```
> Ec:=subs(y(x)=yk,Ec): factor(Ec/exp((1+I)*x));
```

$$2ik=1$$

On en déduit la valeur de k, donc la fonction y_k.

```
> factor(solve(%,k));
```

$$\left\{k = -\frac{1}{2}\,i\right\}$$

```
> yk:=subs(%,yk);
```

$$yk := -\frac{1}{2}\,i\,x\,\mathrm{e}^{(1+i)x}$$

Il suffit de prendre la partie réelle et on a une solution particulière de (E) quand $m \neq 1$:

```
> yk:=factor(evalc(Re(yk)));
```

$$yk := \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{x}\sin(x)$$

On peut vérifier que c'est bien ça, en formant l'équation (H) quand $m = 1$ (ici on la nomme (H_1)) et en remplaçant $y(x)$ par y_k dans H_1. On obtient bien $\mathrm{e}^x \cos x$.

```
> H1:=subs(m=1,H); eval(subs(y(x)=yk,H1));
```

$$H1 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\,\frac{d}{dx}y(x) + 2\,y(x)$$

$$\mathrm{e}^{x}\,\cos(x)$$