Équations différentielles : quatre exercices indépendants

I. Une équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle $(E) : x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=x$.
On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On note $(H) : x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=0$ l'équation homogène associée à (E).

1. Préciser la nature de (E), ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre.
2. Donner la solution générale de (H) sur l'intervalle de résolution I.
3. Donner la solution générale de (E) sur l'intervalle de résolution I.
4. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]-1,1[$.
5. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]-\infty,0[$.
6. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
7. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

II. Une équation différentielle du second ordre

On considère l'équation différentielle $(E_a) : y''(x)-(a+1)y'(x)+ay(x)=d(x)$, où $a\in\mathbb{R}$, et où $x\mapsto d(x)$ est une application continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On note $(H_a) : y''(x)-(a+1)y'(x)+ay(x)=0$ l'équation homogène associée à (E_a).

1. Préciser la nature de (E_a), ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre.
   Indiquer brièvement la forme que prend la solution générale de (E_a) sur I (notamment en fonction de la solution générale de (H_a) sur I).
2. Donner la solution générale de l'équation homogène associée (H_a) sur I.
   Dans cette question (comme dans la suivante) on discutera suivant les valeurs de a.
3. Dans cette question, on pose $d(x)=x\mathrm{e}^{a^2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   Donner la solution générale de (E_a) sur I.
4. Dans cette question, on suppose $a=-1$ et on pose $d(x)=\operatorname{th} x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   Donner la solution générale de (E_a) sur I.
5. On considère l'équation différentielle $(E') : t^2z''(t)+tz'(t)-z(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ où z est une fonction inconnue à valeurs réelles, définie sur un intervalle J.
   On cherche à résoudre (E) sur $J=\mathbb{R}^{-*}$ ou sur $J=\mathbb{R}^{+*}$.
   On pose le changement de variable $t=\varepsilon\,\mathrm{e}^x$, où x parcourt $\mathbb{R}$ et $\begin{cases}\varepsilon=-1 & \text{si } J=\mathbb{R}^{-*}\\ \varepsilon=1 & \text{si } J=\mathbb{R}^{+*}\end{cases}$
   On définit ainsi une application $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $y(x)=z(t)$.
   (a) Montrer que l'application $t\mapsto z(t)$ satisfait à (E') sur J si et seulement si l'application $x\mapsto y(x)$ satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation étudiée à la question précédente.
   (b) En déduire l'expression de la solution générale de (E') sur J.
   (c) L'équation (E') possède-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
   On admettra que $\varphi : t\mapsto \dfrac{\arctan t}{t}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(0)=0$.

III. Une équation fonctionnelle

On dira qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si :

— L'application f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

— Pour tous x, y de $\mathbb{R}$: $\quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (E)$

L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les solutions du problème $\mathcal{P}$.

1. Déterminer les applications constantes qui sont solution du problème $\mathcal{P}$.
2. Dans cette question, soit f une solution *non constante* de $\mathcal{P}$. On pose $a = f''(0)$.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$.
   (b) Montrer que $f'(0) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = af(x)$.
   Indication : dériver (E) par rapport à x (y fixé) et par rapport à y (x fixé).
3. Déduire de ce qui précède toutes les solutions du problème $\mathcal{P}$.

IV. Une équation différentielle avec "conditions initiales"

Soit $x \mapsto a(x)$ une application définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles.
On dit qu'une application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si :

— L'application $x \mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$.

— Elle est solution de l'équation différentielle $y''(x) + a(x)y(x) = 0$ sur $[0,1]$.

— Elle satisfait aux conditions $y(0) = y(1) = 0$.

1. Dans le cas où l'application $x \mapsto a(x)$ est constante ($a(x) = \lambda$ pour tout x de $[0,1]$) montrer que la seule solution du problème $\mathcal{P}$ est l'application nulle, sauf pour certaines valeurs de la constante λ, que l'on précisera.
2. Si $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une application continue, on définit l'application $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :
   $\forall\, x \in [0,1],\ \Phi(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - x\int_1^x (1-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$
   (a) Montrer que Φ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et que $(S)\begin{cases}\forall\, x \in [0,1],\ \Phi''(x) = -\varphi(x)\\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0\end{cases}$
   (b) Réciproquement, soit $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur $[0,1]$.
   Montrer que si ψ est solution du système (S), alors $\psi(x) = \Phi(x)$ sur $[0,1]$.
3. En déduire que l'application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si et seulement si :
   $(E) : \quad \forall\, x \in [0,1],\ y(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x t\,a(t)y(t)dt - x\int_1^x (1-t)a(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$
4. Soit $x \mapsto y(x)$ une application continue sur $[0,1]$.
   On pose $m = \max\limits_{[0,1]} |a(x)|$ et $M = \max\limits_{[0,1]} |y(x)|$.
   Montrer que si $x \mapsto y(x)$ vérifie (E) alors $|y(x)| \leqslant \frac{1}{8}mM$ pour tout x de $[0,1]$.
5. En déduire que si $m < 18$ alors la seule solution du problème $\mathcal{P}$ est l'application nulle.

Corrigé du problème

I. Une équation différentielle du premier ordre

1. (E) s'écrit $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$, avec $a(x)=x(x^2-1)$, $b(x)=2$ et $c(x)=x$.

   (E) est donc une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

   Les applications $x\mapsto a(x)$, $x\mapsto b(x)$ et $x\mapsto c(x)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

   Pour résoudre (H) puis (E) on doit se placer sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas.

   On se place donc sur $I=]-\infty,-1[$, ou $I=]-1,0[$, ou $I=]0,1[$ ou $I=]1,+\infty[$.

2. La solution générale de (H) sur I s'écrit $y(x)=\lambda \mathrm{e}^{-B(x)}$, où λ est un réel quelconque et où B est une primitive particulière de l'application $x\mapsto \frac{b(x)}{a(x)}=\frac{2}{x(x^2-1)}$ sur I.

   On constate que $\dfrac{b(x)}{a(x)}=\dfrac{-2}{x}+\dfrac{2x}{x^2-1}$.

   On choisit $B(x)=-2\ln|x|+\ln\left|x^2-1\right|=\ln\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x^2}$, donc $\mathrm{e}^{-B(x)}=\dfrac{x^2}{|x^2-1|}$.

   La solution générale de (H) sur I s'écrit donc $x\mapsto\dfrac{\lambda x^2}{x^2-1}$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

   Remarque : puisque x^2-1 garde un signe constant sur I, et qu'on multiplie $\mathrm{e}^{-B(x)}$ par un réel quelconque, la valeur absolue est inutile (elle est "absorbée" par λ.)

3. On cherche la solution générale de (E) sur I par la méthode de variation de la constante.

   On pose donc $y(x)=\lambda(x)h(x)$ avec $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, et où $x\mapsto\lambda(x)$ est dérivable sur I.

   Avec, ces notations, on écrit que $x\mapsto y(x)$ est solution de (E) sur I.

   $\forall x\in I,\ x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=x$

   $\Leftrightarrow \forall x\in I,\ x(x^2-1)(\lambda'(x)h(x)+\lambda(x)h'(x))+2\lambda(x)h(x)=x$

   $\Leftrightarrow \forall x\in I,\ x(x^2-1)\lambda'(x)h(x)+\big(\underbrace{x(x^2-1)h'(x)+2h(x)}_{=0}\big)\lambda(x)=x \Leftrightarrow \forall x\in I,\ \lambda'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

   $\Leftrightarrow \forall x\in I,\ \lambda(x)=-\dfrac{1}{x}+\mu$ (où $\mu\in\mathbb{R}$)

   La solution générale de (E) sur I est donc : $x\mapsto y_\mu(x)=\left(-\dfrac{1}{x}+\mu\right)\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{x(\mu x-1)}{x^2-1}$

4. On voit que $x\mapsto y_\mu(x)=\dfrac{x(\mu x-1)}{x^2-1}$ se prolonge par continuité en 0 avec $y_\mu(0)=0$.

   Après un tel prolongement, on a alors $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{y_\mu(x)-y_\mu(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mu x-1}{x^2-1}=1$.

   Ainsi y_μ est prolongeable de façon dérivable en 0 avec $y_\mu(0)=0$ et $y'_\mu(0)=1$.

   On peut donc raccorder toute solution y_μ sur $]-1,0[$ avec toute solution y_λ sur $]0,1[$, pour créer ainsi la solution générale $y_{\mu,\lambda}$ sur $]-1,1[$, définie par :

   $$\forall x\in]-1,0[,\ y_{\mu,\lambda}(x)=\frac{x(\mu x-1)}{x^2-1},\ \begin{cases} y_{\mu,\lambda}(0)=0\\ y'_{\mu,\lambda}(0)=1\end{cases},\ \text{et } \forall x\in]0,1[,\ y_{\mu,\lambda}(x)=\frac{x(\lambda x-1)}{x^2-1}.$$

5. On peut prolonger $y_\mu(x) = \dfrac{x(1-\mu x)}{1-x^2}$ en $x = -1$ à condition que μ soit égal à -1.

   On obtient l'expression $y_{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$, qui se prolonge de façon dérivable en $x = -1$.

   On a ainsi obtenu la seule solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

6. On peut prolonger $y_\mu(x) = \dfrac{x(1-\mu x)}{1-x^2}$ en $x = 1$ à condition que μ soit égal à 1.

   On obtient donc l'expression $y_1(x) = \dfrac{x}{1+x}$, qui se prolonge de façon dérivable en $x = 1$.

   On a ainsi obtenu la seule solution de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

7. S'il existe une solution $x \mapsto y(x)$ de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier, alors elle est nécessairement définie par $y(x) = \dfrac{x}{1-x}$ sur $]-\infty, 0[$ et $y(x) = \dfrac{x}{1+x}$ sur $]0, +\infty[$.

   Réciproquement cette application $x \mapsto y(x)$ est prolongeable de façon dérivable en $x = 0$ en posant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ (cas particulier du calcul effectué dans la question 4.)

   On peut conclure de la façon suivante : l'équation (E) possède une solution unique sur $\mathbb{R}$ tout entier, définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

En complément, voici comment on confirme ces résultats avec Maple :

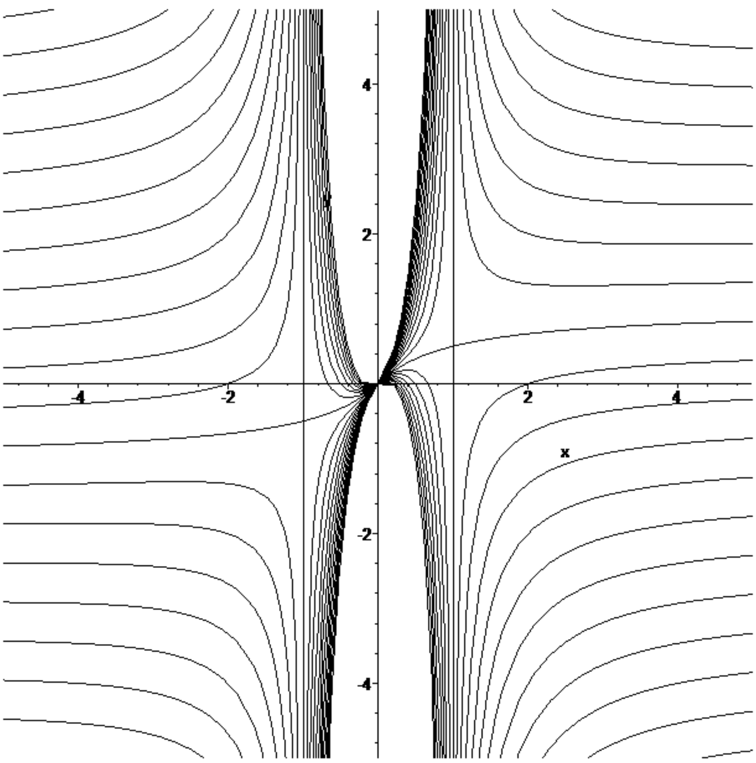
```
> restart: E:=x*(x^2-1)*diff(y(x),x)+2*y(x)=x;
```

$$E := x\,(x^2-1)\,(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) + 2\,\mathrm{y}(x) = x$$

```
> f:=normal(rhs(dsolve(E,y(x))));
```

$$f := \frac{(-1 + \_C1\ x)\,x}{(x-1)\,(x+1)}$$

```
> plot([seq(f,_C1=[seq(-5+k/2,k=0..20)])],x=-5..5,y=-5..5);
```



II. Une équation différentielle du second ordre

1. L'équation différentielle (E_a) est linéaire du second ordre à coefficients constants.

   Le second membre est une application $x \mapsto d(x)$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   On résout alors l'équation (E_a) sur $\mathbb{R}$ tout entier, et la solution générale de (E_a) s'écrit $x \mapsto y(x) = y_0(x) + \lambda h(x) + \mu k(x)$, où y_0 est une solution particulière de (E_a) sur $\mathbb{R}$ et où les h, k forment une base du plan des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (H_a).

2. L'équation caractéristique associée à (H_a) s'écrit $\mathcal{C} : t^2 - (a+1)t + a = 0$.
   On a $t^2 - (a+1)t + a = (t-1)(t-a)$: il y a les deux racines réelles $t = 1$ et $t = a$.
   Il faut distinguer selon que ces racines sont égales ($a = 1$) ou non.

   — Si $a = 1$, la solution générale de (H_a) sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

   — Si $a \neq 1$, cette solution générale est $x \mapsto y(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{ax}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3. Il suffit de calculer une solution particulière y_0 de l'équation (E_a) sur $\mathbb{R}$.

   Le second membre s'écrit $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{a^2 x}$ où $P(x) = x$ (polynôme de degré 1).

   On sait qu'alors l'équation (E_a) possède une unique solution particulière sur $\mathbb{R}$ sous la forme $x \mapsto y_0(x) = x^k Q(x)\mathrm{e}^{bx}$ avec $k = 0$ (ou $k = 1$, ou $k = 2$) suivant que a^2 n'est pas racine (ou est racine simple, ou est racine double) de $\mathcal{C}$.

   On a $a^2 = 1 \Leftrightarrow a \in \{-1, 1\}$ et $a^2 = a \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}$.

   On observe donc trois cas particuliers, $a = -1$, $a = 0$ et $a = 1$.

   — Cas général : $a \notin \{-1, 0, 1\}$ (dans ce cas a^2 n'est pas une racine de $\mathcal{C}$.)

   On cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{a^2 x}$, où (α, β) est inconnu dans $\mathbb{R}^2$.

   On trouve $y_0'(x) = (a^2\alpha x + a^2\beta + \alpha)\mathrm{e}^{a^2 x}$ et $y_0''(x) = a^2(a^2\alpha x + a^2\beta + 2\alpha)\mathrm{e}^{a^2 x}$.

   Après calcul (euh... après Maple), on obtient :
   $y_0''(x) - (a+1)y_0'(x) + ay_0(x) = (\gamma x + \delta)\mathrm{e}^{a^2 x}$ avec $\begin{cases} \gamma = a(1+a)(1-a)^2\alpha \\ \delta = (a-1)(\beta a^3 - a\beta + 2a\alpha + \alpha) \end{cases}$
   On identifie avec le second membre de (E_a) :

   On trouve finalement $\alpha = \dfrac{1}{a(1+a)(1-a)^2}$ et $\beta = \dfrac{2a+1}{a^2(1+a)^2(1-a)^3}$.

   Avec ces valeurs de α, β fonctions de a, la solution générale de (E_a) sur $\mathbb{R}$ s'écrit donc :

   $$x \mapsto y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{a^2 x} + \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{ax}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

   — Cas particulier : $a = -1$ (dans ce cas $a^2 = 1$ est racine simple de $\mathcal{C}$.)

   On cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = (\alpha x^2 + \beta x)\mathrm{e}^x$, où (α, β) est inconnu dans $\mathbb{R}^2$.

   On trouve $\begin{cases} y_0'(x) = (\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta)\mathrm{e}^x \\ y_0''(x) = (\alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + 2\alpha + 2\beta)\mathrm{e}^x \end{cases}$

   Après calcul : $y_0''(x) - (a+1)y_0'(x) + ay_0(x) = 2(2\alpha x + \alpha + \beta)\mathrm{e}^x$.

   On identifie avec le second membre de (E_{-1}) et on trouve $\alpha = \dfrac{1}{4}$ et $\beta = -\dfrac{1}{4}$.

   La solution générale de (E_{-1}) sur $\mathbb{R}$ s'écrit donc :

   $$x \mapsto y(x) = \tfrac{1}{4}\, x(x-1)\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

— Cas particulier : $a=0$ (dans ce cas $a^2=0=a$ est racine simple de $\mathcal{C}$.)

On cherche y_0 sous la forme $y_0(x)=\alpha x^2+\beta x$, où (α,β) est inconnu dans $\mathbb{R}^2$.

On en déduit $y_0''(x)-(a+1)y_0'(x)+ay_0(x)=-2\alpha x+2\alpha-\beta$.

On identifie avec le second membre de (E) et on trouve $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ et $\beta=-1$.

La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ s'écrit donc :

$$x\mapsto y(x)=-\tfrac{1}{2}\,x(x+2)+\lambda\mathrm{e}^x+\mu,\text{ avec }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

— Cas particulier : $a=1$ (dans ce cas $a^2=1=a$ est racine double de $\mathcal{C}$.)

On cherche y_0 sous la forme $y_0(x)=(\alpha x^3+\beta x^2)\mathrm{e}^x$, où (α,β) est inconnu dans $\mathbb{R}^2$.

On trouve $\begin{cases} y_0'(x)=(\alpha x^3+(3\alpha+\beta)x^2+2\beta x)\mathrm{e}^x \\ y_0''(x)=(\alpha x^3+(6\alpha+\beta)x^2+(6\alpha+4\beta)x+2\beta)\mathrm{e}^x\end{cases}$

Après calcul : $y_0''(x)-(a+1)y_0'(x)+ay_0(x)=(6\alpha x+2\beta)\mathrm{e}^x$.

On identifie avec le second membre de (E_1) et on trouve $\alpha=\dfrac{1}{6}$ et $\beta=0$.

La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$ s'écrit donc :

$$x\mapsto y(x)=\tfrac{1}{6}\,x^3\mathrm{e}^x+(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^x,\text{ avec }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

4. L'équation différentielle homogène associée est (H_{-1}) : $y''(x)-y(x)=0$.

La solution générale de (H_{-1}) sur $\mathbb{R}$ s'écrit $y(x)=\lambda\operatorname{ch}x+\mu\operatorname{sh}x$, avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

On cherche des solutions $x\mapsto y(x)$ de (E_{-1}) par la méthode de variation des constantes.

On pose $y(x)=\lambda(x)\operatorname{ch}x+\mu(x)\operatorname{sh}x$, où $x\mapsto\lambda(x)$ et $x\mapsto\mu(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

On impose la condition $\lambda'(x)\operatorname{ch}x+\mu'(x)\operatorname{sh}x=0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On obient alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\begin{cases} y'(x)=\lambda(x)\operatorname{sh}x+\mu(x)\operatorname{ch}x \\ y''(x)=(\lambda(x)+\mu'(x))\operatorname{ch}x+(\mu(x)+\lambda'(x))\operatorname{sh}x\end{cases}$

Ainsi $y''(x)-y(x)=\mu'(x)\operatorname{ch}x+\lambda'(x)\operatorname{sh}x$ et y est solution de (E_{-1}) si et seulement si on a $\mu'(x)\operatorname{ch}x+\lambda'(x)\operatorname{sh}x=\operatorname{th}x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Avec la condition imposée, on obtient le système (S) : $\begin{cases}\operatorname{ch}x\ \lambda'(x)+\operatorname{sh}x\ \mu'(x)=0\\ \operatorname{sh}x\ \lambda'(x)+\operatorname{ch}x\ \mu'(x)=\operatorname{th}x\end{cases}$

ainsi $\lambda'(x)=-\operatorname{sh}x\ \operatorname{th}x=-\dfrac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}-\operatorname{ch}x$ et $\mu'(x)=\operatorname{ch}x\ \operatorname{th}x=\operatorname{sh}x$.

On a $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}x}=\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}=2\arctan\mathrm{e}^x+\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

On trouve donc $\lambda(x)=2\arctan\mathrm{e}^x-\operatorname{sh}x+\alpha$ et $\mu(x)=\operatorname{ch}x+\beta$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

On obtient alors la solution générale de (E_{-1}) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(x)&=\lambda(x)\operatorname{ch}x+\mu(x)\operatorname{sh}x=(2\arctan\mathrm{e}^x-\operatorname{sh}x+\alpha)\operatorname{ch}x+(\operatorname{ch}x+\beta)\operatorname{sh}x\\ &=2\operatorname{ch}x\ \arctan\mathrm{e}^x+\alpha\operatorname{ch}x+\beta\operatorname{sh}x,\quad\text{avec}(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

On reconnait la forme générale attendue, c'est-à-dire la somme d'une solution particulière de (E_{-1}) (ici l'application $x\mapsto 2\operatorname{ch}x\ \arctan\mathrm{e}^x$) et de la solution générale de l'équation homogène associée (ici le plan engendré par les applications $x\mapsto\operatorname{sh}x$ et $x\mapsto\operatorname{ch}x$.)

5. (a) Pour tout t de J, on a $y(x) = z(t)$ avec $t = \varepsilon\,\mathrm{e}^x$ (on encore $x = \ln|t|$.)

   On note que $\dfrac{t^2-1}{t^2+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \operatorname{th} x$.

   On écrit $y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t)\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t)\,\varepsilon\,\mathrm{e}^x = \varepsilon t z'(t)$.

   On en déduit $\begin{cases} y'(x) = \varepsilon t z'(t) t \\ y''(x) = \varepsilon(t z''(t) + z'(t))\varepsilon t = t^2 z''(t) + t z'(t) \end{cases}$

   On a donc l'équivalence $t^2 z''(t) + t z'(t) - z(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \Leftrightarrow y''(x) - y(x) = \operatorname{th} x$.

   (dans cette équivalence, le réel t parcourt J quand x parcourt $\mathbb{R}$).

   (b) On retrouve donc l'équation différentielle (E) étudiée à la question précédente, dont la solution générale est $y(x) = (e^x + \mathrm{e}^{-x})\arctan \mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

   Or $(e^x + \mathrm{e}^{-x})\arctan \mathrm{e}^x = \Big(\varepsilon t + \dfrac{\varepsilon}{t}\Big)\arctan \varepsilon t = \Big(t + \dfrac{1}{t}\Big)\arctan t$.

   La solution générale de (E') sur J peut donc s'écrire :

$$z(t) = \Big(t + \frac{1}{t}\Big)\arctan t + \lambda t + \frac{\mu}{t}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

   (c) Considérons l'application $z_{\lambda,\mu} : t \mapsto \Big(t + \dfrac{1}{t}\Big)\arctan t + \lambda t + \dfrac{\mu}{t}$ définie sur $J = \mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$.

   On sait que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arctan t}{t} = 1$ et on en déduit $\lim\limits_{t\to 0}\Big(\Big(t + \dfrac{1}{t}\Big)\arctan t + \lambda t\Big) = 1$.

   Si on veut prolonger $z_{\lambda,\mu}$ par continuité en 0, il faut donc imposer $\mu = 0$.

   Posons alors $z_\lambda(t) = \Big(t + \dfrac{1}{t}\Big)\arctan t + \lambda t$ avec $t \in J$.

   On peut prolonger z_λ en une application continue sur $\mathbb{R}$ en posant $z_\lambda(0) = 1$.

   Avec l'indication de l'énoncé, on voit que z_λ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $z'_\lambda(0) = \lambda$.

   Finalement (E') admet des solutions sur $\mathbb{R}$: ce sont les applications $x \mapsto z_\lambda(x)$.