Calcul intégral et approximation de π^2

Première partie

Dans cette partie, on étudie l'application $x \mapsto f(x) = x \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout $x > 0$.

1. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $I_1(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi}{2x}$.
2. (a) Calculer $I_2(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout réel $x > 0$.

   On sera amené à considérer les cas $0 < x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$.

   (b) Vérifier que $I_2(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers 0.
3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) + f\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = \dfrac{\pi^2}{4}$.
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} x I_2(x)$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Dans cette question on établit la dérivabilité de l'application f.

   (a) On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x\cos^2 u + \sin^2 u}$ et $\Delta(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2}$.

   On se donne un réel $x > 0$, et un réel h tel que $|h| < \dfrac{x}{2}$.

   Pour simplifier les calculs, on pourra poser $a(u) = x\cos^2 u + \sin^2 u$.

   Montrer qu'on a la majoration :

   $$\Big|\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \Delta(x)\Big| \leqslant |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$

   En déduire que Φ est dérivable au point x.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(\sin^2 u - x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u$

   (c) Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u$.

   (d) Prouver finalement que pour tout $x \neq 1$ on a $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.

   L'application f' est-elle continue en $x = 1$?
6. Dans cette question, on aboutit à une nouvelle expression de l'application f.

   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t$

   (b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative

Deuxième partie

Dans cette partie on adopte les notations suivantes :

– Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels.
  On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite de terme général $S_m = \sum\limits_{n=n_0}^{m} u_n$ converge.

– On note alors $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{m\to+\infty} S_m$ et on dit que $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

– On admettra que s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

– Un résultat classique est $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans cette partie, on exprime π^2 comme la somme d'une série.

On en déduit une méthode de calcul d'une valeur approchée de π^2.

1. (a) Pour tout m de $\mathbb{N}$, montrer que : $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Prouver qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{2m+2}$.

   En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. (a) Prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   (b) En déduire que $\pi^2 = 10 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$.

3. Dans cette question, on pose $h(t) = \dfrac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$, $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} h(n)$ et $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} h(n)$.

   Le résultat de la question II-2-b s'écrit donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \pi^2 = 10 - S_p - R_p$.

   (a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$ et observer qu'elle est décroissante.

   (b) Pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$, prouver les inégalités : $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_p \leqslant \int_p^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$

   (c) En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{6(p+2)^3} \leqslant R_p \leqslant \dfrac{1}{6p^3}$

   (d) On utilise l'approximation $\pi^2 \approx 10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}$.

   Montrer que l'on commet ainsi une erreur par défaut, majorée par $\dfrac{1}{p^4}$.

Corrigé

Première partie

1. On remarque que $\dfrac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est invariant dans $u\mapsto u+\pi$.

   Il y a donc "l'invariant de la tangente", et on effectue le changement de variable $t=\tan u$.

   Celui-ci réalise une bijection strictement croissante de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$.

   On a $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos^2 u=\dfrac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2 u=\dfrac{t^2}{1+t^2}$. On en déduit :

   $$I_1(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}=\Big[\frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\Big]_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2x}$$

2. (a) On remarque que $\dfrac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est invariant dans $u\mapsto -u$.

   Il y a donc "l'invariant du cosinus", et on effectue le changement de variable $t=\cos u$.

   Celui-ci réalise une bijection strictement décroissante de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

   On a $\mathrm{d}t=-\sin u\,\mathrm{d}u$, $\cos^2 u=t^2$ et $\sin^2 u=1-t^2$. On en déduit :

   $$I_2(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{x^2t^2+1-t^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(x^2-1)t^2}$$

   ◇ Si $x=1$, on a bien sûr $I_2(x)=1$ (évident aussi avec l'expression initiale de I_2.)

   ◇ Si $0<x<1$, on pose $v=t\sqrt{1-x^2}$. On a $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-x^2}}$.

   $$\text{On en déduit : } I_2(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-(1-x^2)t^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}v}{1-v^2}$$
   $$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big[\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

   ◇ Si $x>1$, on pose $v=t\sqrt{x^2-1}$. On en déduit :

   $$I_2(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(x^2-1)t^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\sqrt{x^2-1}}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=\frac{\arctan\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

   (b) Quand x tend vers 0, on a (en utilisant une quantité conjuguée) :

   $$I_2(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}$$
   $$=\frac{\ln(1+\sqrt{1-x^2})-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-\ln x+\ln 2+\mathrm{o}(1)}{1+\mathrm{o}(1)}\sim-\ln x$$

   On a donc bien $I_2(x)\sim-\ln x$ quand x tend vers 0.

3. On effectue le changement de variable $v=\dfrac{\pi}{2}-x$ dans l'intégrale donnant $f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$:

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{x}\Big) &= \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\frac{1}{x^2}\cos^2 u+\sin^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xu\,\mathrm{d}u}{\cos^2 u+x^2\sin^2 u} = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Big(\frac{\pi}{2}-v\Big)\,\mathrm{d}v}{\sin^2 v+x^2\cos^2 v}\\ &= \frac{\pi}{2}x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}v}{\sin^2 v+x^2\cos^2 v} - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v\,\mathrm{d}v}{\sin^2 v+x^2\cos^2 v} = \frac{\pi}{2}xI_1(x)-f(x)\end{aligned}$$

Sachant que $I_1(x)=\dfrac{\pi}{2x}$, on trouve bien : $\forall x>0,\ f(x)+f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)=\dfrac{\pi^2}{4}$.

4. (a) On sait que sur $\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big]$ on a : $\sin u \geqslant \dfrac{2u}{\pi}$ (concavité de $u\mapsto \sin u$.)

   On en déduit $u\leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin u$ et pour tout $x>0$ (sachant que $f(x)\geqslant 0$ est évident) :

$$0\leqslant f(x)\leqslant x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2+\sin^2 u} \quad \text{c'est-à-dire}\quad 0\leqslant f(x)\leqslant \frac{\pi}{2}xI_2(x)$$

   (b) On sait que $I_2(x)\sim -\ln x$ en 0. On en déduit $\lim\limits_0 xI_2(x)=0$ donc $\lim\limits_0 f(x)=0$.

   Quand $x\to+\infty$, l'égalité $f(x)+f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)=\dfrac{\pi^2}{4}$ donne alors $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\dfrac{\pi^2}{4}$.

5. (a) Avec la convention de notation proposée par l'énoncé, on a :

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{u}{a(u)+h\cos^2 u}-\frac{u}{a(u)}\Big)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{a(u)(a(u)+h\cos^2 u))}$$

   On en déduit : $\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-\Delta(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^2 u}{a(u)}\Big(\frac{-1}{a(u)+h\cos^2 u}+\frac{1}{a(u)}\Big)\,\mathrm{d}u$.

   Ainsi $\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-\Delta(x)=h\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{a^2(u)(a(u)+h\cos^2 u)}$.

   Puisque $x>0$, on a $a(u)=x\cos^2 u+\sin^2 u\geqslant \frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u$.

   de même, $|h|\leqslant \frac{x}{2}\Rightarrow a(u)+h\cos^2 u=(x+h)\cos^2 u+\sin^2 u\geqslant \frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u$.

   On en déduit $a^2(u)(a(u)+h\cos^2 u)\geqslant \Big(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u\Big)^3$.

   Il en découle immédiatement le résultat attendu :

$$\Big|\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-\Delta(x)\Big|=|h|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{a^2(u)(a(u)+h\cos^2 u)}\leqslant |h|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{\Big(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u\Big)^3}$$

   La dernière intégrale ne dépend plus de h.

   On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\Delta(x)$.

   Autrement dit l'application Φ est dérivable en x et $\Phi'(x)=\Delta(x)$.

(b) On observe que pour tout $x > 0$ on a $f(x) = x\Phi(x^2)$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & \Phi(x^2) + 2x^2\Phi'(x^2) = \Phi(x^2) + 2x^2\Delta(x^2) \\ = {} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} - 2x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2} \\ = {} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(x^2\cos^2 u + \sin^2 u) - 2x^2 u\cos^2 u}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(\sin^2 u - x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

(c) On va procéder à une intégration par parties.

Fixons $x > 0$, et notons $\psi(u) = \dfrac{\sin u\cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$, pour tout u de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On constate que :

$$\begin{aligned} \psi'(u) & = \frac{(\cos^2 u - \sin^2 u)(x^2\cos^2 u + \sin^2 u) - 2\sin^2 u\cos^2 u(1 - x^2)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2} \\ & = \frac{x^2\cos^4 u - \sin^4 u + (x^2 - 1)\sin^2 u\cos^2 u}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2} \\ & = \frac{(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)(\cos^2 u + \sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2} = \frac{x^2\cos^2 u - \sin^2 u}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(u)\,\mathrm{d}u = \overbrace{\Big[u\psi(u)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\psi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(\sin^2 u - x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u = f'(x)$$

On a donc bien obtenu, pour tout $x > 0$: $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$.

(d) On voit que $\dfrac{\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ du est invariant dans la transformation $u \mapsto \pi - u$.

Il y a donc "l'invariant du sinus", et on effectue le changement de variable $t = \sin u$.

Celui-ci réalise une bijection strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$.

On a $\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u$, $\cos^2 u = 1 - t^2$ et $\sin^2 u = t^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned} f'(x) & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{x^2 + (1 - x^2)t^2} \\ & = \left[\frac{1}{2(1 - x^2)}\ln\Big(x^2 + (1 - x^2)t^2\Big)\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{\ln x^2}{2(1 - x^2)} = \frac{\ln x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

On a $\dfrac{\ln x}{x^2 - 1} = \dfrac{\ln x}{x - 1}\,\dfrac{1}{x + 1} \sim \dfrac{1}{2}$ quand $x \to 1$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{1}{2}$. Or $f'(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\cos u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin^2 u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.

Ainsi l'application f' est continue en $x = 1$ (et finalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.)

6. (a) On sait maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut donc écrire : $\forall\, x > 0,\ \forall\, y > 0,\ f(x) - f(y) = \displaystyle\int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

On fait tendre y vers 0, en utilisant $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 0$.

On utilise aussi le fait que l'application $t \mapsto \omega(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (avec la valeur $\omega(1) = \frac{1}{2}$) est intégrable sur tout segment $[0, x]$ car $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t}\omega(t) = 0$.

On obtient donc : $\forall\, x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

(b) On sait que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$, avec $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

D'autre part, $\ln x$ a toujours le signe de $x - 1$, donc celui de $x^2 - 1$.

On en déduit que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$: l'application f est strictement croissante.

On sait qu'on peut prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0) = 0$.

On observe alors que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. Il en découle que la courbe $y = f(x)$ présente à l'origine une demi-tangente verticale dirigée vers les $y > 0$.

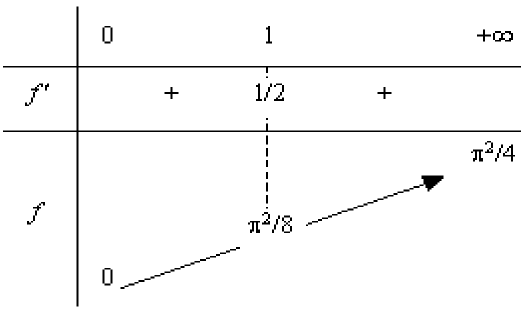
On se souvient de l'expression $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \cos u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$, obtenue en I-5-c.

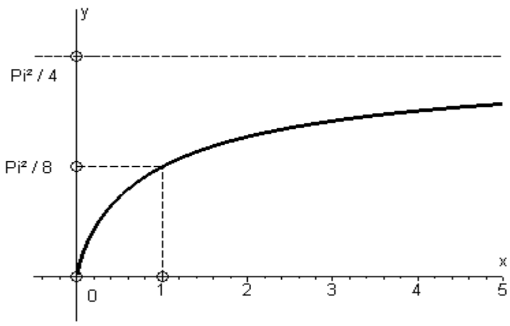
L'application $x \mapsto \dfrac{\sin u \cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout u de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par intégration, il en découle que f' est décroissante. Donc f est concave sur $\mathbb{R}^+$.

On note que $f(1) = \dfrac{\pi^2}{8}$ (évident sur la définition de f, ou conséquence de I-3).

Voici le tableau de variation et la courbe représentative de f :





Deuxième partie

1. (a) On écrit $f(1) - \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2m+2}}{t^2-1}\ln t\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{m} t^{2n}\Big)\ln t\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} I_n + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$, avec $I_n = -\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t$.

On intègre par parties : $I_n = \Big[-\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t\Big]_0^1 + \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

On a ainsi obtenu : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

(b) L'application $t \mapsto \dfrac{t\ln t}{t^2-1}$ est continue sur $[0,1]$, avec $g(0)=0$ et $g(1)=\frac{1}{2}$.

Elle est donc bornée sur ce segment. Posons $K = \sup\limits_{[0,1]} g(x)$.

On en déduit $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2m+1}g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant K\int_0^1 t^{2m+1}\,\mathrm{d}t$.

Autrement dit, on a : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{2m+2}$.

Si on fait tendre m vers $+\infty$ dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = f(1) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. (a) Pour tout entier $m \geqslant 1$, on a les égalités :

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big) = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{m+1}$$

Il en résulte $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)} = 1$. Autrement dit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(b) On voit que $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} = \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{4}{(2n+1)^2}$.

On en déduit, pour $m \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)} - 8\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Quand on fait tendre m vers $+\infty$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} - 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 2 - 8\Big(\frac{\pi^2}{8}-1\Big) = 10-\pi^2$$

On a donc bien obtenu l'égalité demandée : $\pi^2 = 10 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$.

3. (a) L'application h est continue sur $[1,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment.

D'autre part $h(t) \sim \dfrac{1}{2t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Par comparaison avec les intégrales de Riemann, on sait que cela implique que h est intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'autre part, l'application $t \mapsto t(t+1)(2t+1)$ est croissante positive sur $\mathbb{R}^+$.

Il en découle que l'application h est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $[1,+\infty[$.

(b) h étant décroissante, on $\displaystyle\int_n^{n+1} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \geqslant 2$.

Soient p,q deux entiers tels que $1 \leqslant p < q$.

On somme de $n=p+1$ à $n=q$: $\displaystyle\int_{p+1}^{q+1} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} h(n) \leqslant \int_p^q h(t)\,\mathrm{d}t$.

Quand $q \to +\infty$, on obtient bien : $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_p \leqslant \int_p^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Sur $\mathbb{R}^+$ on a $4t^2 \leqslant (2t+1)^2 \leqslant 4(t+1)^2$ donc $4t^4 \leqslant t(t+1)(2t+1)^2 \leqslant 4(t+1)^2$.

On en déduit, pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$: $\dfrac{1}{2(t+1)^4} \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{1}{2t^4}$.

Par intégration, il en découle, pour tout entier $p \geqslant 1$:

– $\displaystyle\int_p^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4} = -\frac{1}{6}\Big[\frac{1}{t^3}\Big]_p^{+\infty} = \frac{1}{6p^3}$

– $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_{p+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^4} = -\frac{1}{6}\Big[\frac{1}{(t+1)^3}\Big]_{p+1}^{+\infty} = \frac{1}{6(p+2)^3}$

Avec la question précédente, on en déduit : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{6(p+2)^3} \leqslant R_p \leqslant \dfrac{1}{6p^3}$.

(d) On a les équivalences

$$\begin{aligned}\frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{6p^3} \quad &\Leftrightarrow \frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant 10 - S_p - \pi^2 \leqslant \frac{1}{6p^3}\\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \pi^2 - \Big(10 - S_p - \frac{1}{6p^3}\Big) \leqslant \frac{1}{6p^3} - \frac{1}{6(p+2)^3}\end{aligned}$$

En posant $\pi^2 \approx 10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}$ on commet donc une erreur par défaut.

Et cette erreur est majorée par $\Delta_p = \dfrac{1}{6p^3} - \dfrac{1}{6(p+2)^3}$.

Posons $\delta(t) = -\dfrac{1}{6t^3}$: $\exists\, x \in [p, p+2],\ \Delta_p = \delta(p+2) - \delta(p) = 2\delta'(x) = \dfrac{1}{x^4} \leqslant \dfrac{1}{p^4}$.

On a donc prouvé l'encadrement : $0 \leqslant \pi^2 - \Big(10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}\Big) \leqslant \dfrac{1}{p^4}$.