Troisième partie

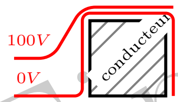
Conducteurs

Exercise III.1

Par temps normal, quand on s'élève verticalement à partir de la surface de la mer ou de celle d'un endroit désert et plat, le potentiel électrique augment d'environ 100 volts par mètre. Il y a ainsi un champ électrique vertical dont le sens indique l'existence d'une charge négative à la surface de la Terre. Cela signifie que, dehors, le potentiel à la hauteur de votre nez est supérieur d'environ 200 volts à celui qui existe au niveau de vos pieds. Cela pourrait suggérer de placer une paire d'électrodes à un mètre l'une au dessus de l'autre et d'utiliser la différence de potentiel de 100 volts pour alimenter des ampoules électriques. On pourrait également se demander pourquoi on ne reçoit pas de décharges électriques du fait de la d.d.p. de 200 V existant entre le niveau des pieds et celui du nez. Qu'en pensez-vous ?

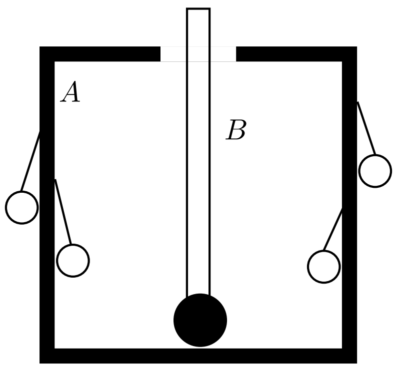
Solution Exercise III.1

Un conducteur quelconque (circuit d'une ampoule ou être humain) constitue un volume équipotentiel. Les lignes de champ et les équipotentielles de l'atmosphère se déforment en son voisinage pour que sa surface soit au même potentiel. Pour un corps humain, cette déformation est due à des charges négatives qui vont de la terre vers sa tête. Il n'y aura donc jamais de différence de potentiel entre la tête et les pieds du corps humain qui constitue un seul conducteur avec la terre.



Exercise III.2

De petits pendules métalliques sont fixés aux parois, intérieure et extérieure, d'un conducteur creux A initialement neutre. Un deuxième conducteur B, chargé, est introduit dans A en le tenant par un manche isolant et on réalise le contact.

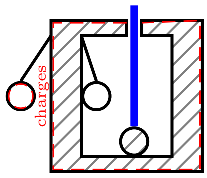


1. Représentez, qualitativement, les positions prises par les pendules avant et pendant le contact.

2. Obtient-on un résultat différent si on réalise le même travail sur la paroi extérieure du conducteur A ?

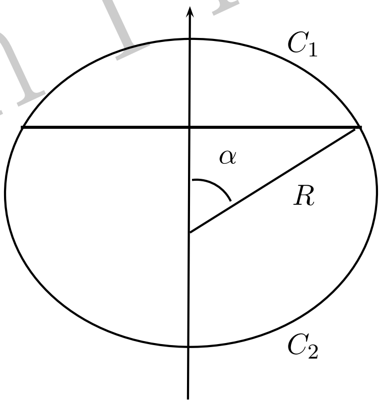
Solution Exercise III.2

Après contact sur la paroi externe ou interne, A et B constitueront un seul conducteur creux isolé. Les charges se répartiront sur la paroi externe et sur les pendules métalliques externes. Ces derniers s'écarteront de la paroi externe par répulsion de leurs charges de même signe que celles de la paroi. Les pendules internes non chargés restent en contact avec la paroi interne qui est neutre aussi. La démonstration se fait en choisissant une surface de Gauss à l'intérieur du conducteur A où le champ est nul. Le flux de ce dernier à travers cette surface et la charge à l'intérieur de celle-ci sont par conséquent nuls (voir le cours pour les détails).

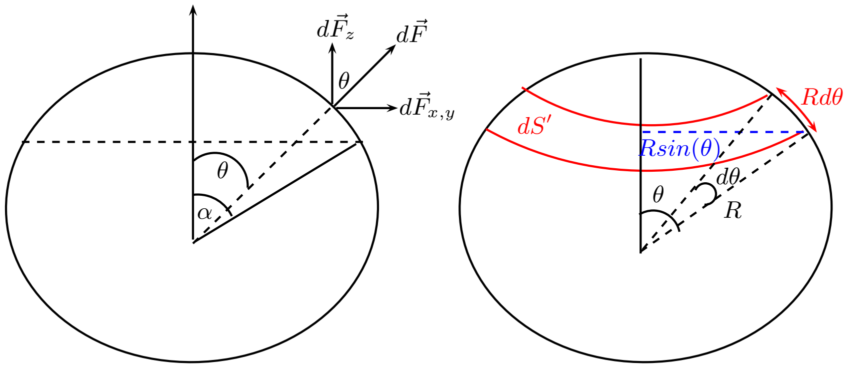


Exercise III.3

Une sphère métallique de rayon R est portée à un potentiel électrique V. Elle est constituée de deux calottes sphériques C_1 et C_2 (voir figure). Donner, en fonction de V et α, les résultantes des forces électrostatiques qui agissent sur les deux calottes.



Solution Exercise III.3



Le champ juste à l'extérieur d'un conducteur (normal à la surface) est $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Dans la surface chargée, le champ moyen est $E_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. La force appliquée à dq est $dF = dqE_m$. A cause de la symétrie, on calcule la composante sur Oz uniquement $dF_z = dF\cos\theta = dq\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cos\theta$. Les charges qui se trouvent sur la surface dS' de la couronne comprise entre θ et $\theta + d\theta$ donnent la même valeur de dF_z. Par conséquent, on choisit $dq = \sigma dS'$ où $dS' = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ (comme pour un cylindre de hauteur $Rd\theta$ et de rayon $R\sin\theta$). Alors, $F_{1z} = \int dF_z = \int_0^\alpha \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{2\epsilon_0}\sin^2\alpha$. Le potentiel d'un conducteur sphérique est $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$, donc $F_{1z} = \frac{1}{2}\pi\epsilon_0 V^2 \sin^2\alpha$. La force appliquée à toute la sphère est nulle (symétrie), par conséquent $F_{2z} = -F_{1z}$.

Remarque : En coordonnées sphériques, la méthode générale est de choisir $dq = \sigma dS$ où $dS = R^2 d\Omega = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Ainsi,

$$F_{1z} = \int_0^\alpha d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} R^2 \sin\theta\cos\theta$$

On obtient le même résultat car l'intégrant ne dépend pas de φ de sorte que $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

Exercise III.4

Soit une sphère conductrice, de rayon a, portant une charge Q.

1. Calculer son énergie interne.
2. On décharge cette sphère en la reliant à la terre par un fil conducteur. Que devient l'énergie préalablement emmagasinée ?
3. Cette sphère avait été chargée à l'aide d'un générateur de f.e.m. constante V. Quelle est l'énergie fournie par le générateur ? La retrouve-t-on sous forme d'énergie potentielle ? Expliquer.

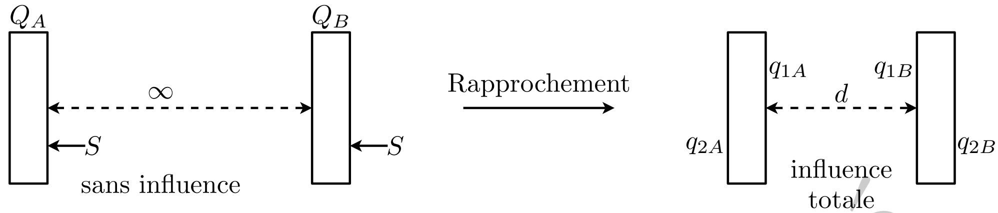
Solution Exercise III.4

1. $U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$. Pour un conducteur sphérique $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \implies C = 4\pi\epsilon_0 a$. D'où $U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$.
2. Cette énergie se dissipe entièrement sous forme de chaleur par effet Joule.

3. Le générateur a fourni l'énergie $W_0 = QV$. On retrouve la moitié sous forme d'énergie potentielle $U = \frac{1}{2}QV$. L'autre moitié a été perdue sous forme de chaleur durant la charge.

Exercise III.5

Deux conducteurs A et B parallélépipédiques identiques portent les charges respectives $Q_A = 4\,\mu$C et $Q_B = -3\,\mu$C quand ils ne sont pas en influence. On les rapproche à une distance d à laquelle on suppose que l'influence est totale et que l'équilibre est atteint. Dans ce cas, les surfaces S en regard portent des charges q_{1A} et q_{1B}, respectivement. Les surfaces externes portent les charges q_{2A} et q_{2B}, respectivement. La charge sur la surface latérale est négligeable.



1. Donner les relations entre q_{1A} et q_{1B}, entre q_{1A} et q_{2A} puis entre q_{1B} et q_{2B} en justifiant.
2. Rappeler l'expression du champ électrique créé par une charge q_{1A} uniformément répartie sur une surface S assimilée à un plan infini. Exprimer le résultat en fonction de q_{1A} et S.
3. En déduire l'expression du champ électrique total créé par les quatre charges q_{1A}, q_{2A}, q_{1B} et q_{2B} à l'intérieur du conducteur A, en fonction de Q_A, Q_B et q_{1A}.
4. En utilisant le fait que le conducteur A soit en équilibre, déterminer les expressions des charges q_{1A}, q_{2A}, q_{1B} et q_{2B} en fonction de Q_A et Q_B. Application numérique $Q_A = 6\,\mu$C et $Q_B = -2\,\mu$C.
5. Vérifier que le conducteur B est en équilibre.
6. Calculer la différence de potentiel entre A et B sachant que $S = \pi \times 10^{-2}\,\text{m}^2$ et $d = 2 \times 10^{-2}\,$mm.

Solution Exercise III.5

1. Influence totale $q_{1A} = -q_{1B}$, Conservation des charges $q_{1A} + q_{2A} = Q_A$, $q_{1B} + q_{2B} = Q_B$.
2. A droite de S, on a $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2S\varepsilon_0}$. A gauche, on a $E = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{-q}{2S\varepsilon_0}$.
3. $E_A = \frac{q_{2A} - q_{1A} - q_{1B} - q_{2B}}{2S\varepsilon_0}$. Donc $E_A = \frac{Q_A - 2q_{1A} - Q_B}{2S\varepsilon_0}$.
4. $E_A = 0 \implies q_{2A} - q_{1A} - Q_B = 0$, or $q_{1A} + q_{2A} = Q_A$. Donc $q_{1A} = \frac{Q_A - Q_B}{2} = 4\,\mu$C, $q_{2A} = \frac{Q_A + Q_B}{2} = 2\,\mu$C. $q_{1B} = -q_{1A} = \frac{Q_B - Q_A}{2} = -4\,\mu$C, $q_{2B} = Q_B - q_{1B} = \frac{Q_A + Q_B}{2} = 2\,\mu$C.
5. $E_B = \frac{q_{1B} - q_{2B} + q_{1A} + q_{2A}}{2S\varepsilon_0}$, $E_B = \frac{2q_{1B} - Q_B + Q_A}{2S\varepsilon_0} = 0\,$V/m.
6. Entre les deux conducteurs,$E = \frac{Q_A - Q_B}{2S\varepsilon_0}$ et $V_A - V_B = \frac{Q_A - Q_B}{2S\varepsilon_0} d = 36\,$V.

Exercise III.6

Soit une sphère conductrice A portée à un potentiel constant par rapport au sol, par l'intermédiaire d'un générateur (figure a).

1. Que doit-on supposer pour admettre que la charge est uniformément répartie sur la sphère ? Représenter qualitativement la répartition de la charge.
2. On approche de A un conducteur B neutre et isolé (figure b). Décrire de façon qualitative ce qui se passe sur les conducteurs A, B et dans le générateur pendant le rapprochement. Représenter qualitativement les répartitions des charges sur A et sur B :
   a) pour une distance donnée d.
   b) pour une distance infinie (préciser l'infini).

Les deux conducteurs étant immobiles et distants l'un de l'autre d'une longueur d, on relie B à la terre au moyen d'un fil conducteur (figure c).
Décrire qualitativement ce qui se passe. Représenter les nouvelles répartitions des charges, après le branchement. Comparer les charges portées par A dans les cas de figures a, b et c. Conclusion ?

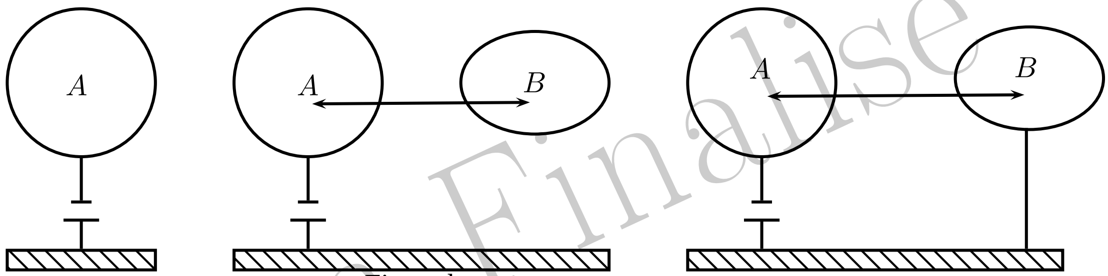


Figure a Figure b Figure c

3. On se propose maintenant de reprendre le problème précédent dans un cas particulier qui permet l'évaluation des charges et donc, une conclusion quantitative.
   - A est une sphère conductrice de rayon R_1, portée au potentiel V.
   - B est une sphère creuse, de rayons intérieur R_2 et extérieur R_3, concentrique à la sphère A. On donne : $V = 1000\,\mathrm{V}$; $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$; $R_2 = 11\,\mathrm{cm}$ et $R_3 = 20\,\mathrm{cm}$.

   a) Calculer la charge Q_0 de A dans le cas de la figure d.
   b) Calculer la charge Q_1 de A dans le cas de la figure e et déterminer, en fonction de Q_1, les charges Q_2 et Q_3 portées par les deux faces de B. Exprimer, toujours en fonction de Q_1, les champs électriques $\vec{E}_e$ et $\vec{E}_i$ créés dans les régions : $r > R_3$, et $R_1 < r < R_2$, respectivement. En faisant circuler $\vec{E}_e$ et $\vec{E}_i$ entre les bornes où ils sont définis, en déduire Q_1. Noter que $V_B = V_2(r = R_2) = V_3(r = R_3)$ et prendre égal à zéro le potentiel à l'infini et au sol.
   c) Calculer la charge Q'_1 portée par A dans le cas de la figure f où B est relié au sol par un fil conducteur (utiliser la même méthode).

d) Comparer Q_0, Q_1 et Q_1' ; en conclure. Sur quel paramètre et dans quel sens faudrait-il jouer pour augmenter Q_1', V et R_1 gardant les mêmes valeurs ?

e) Décrivez qualitativement ce qui se passerait si, à partir des cas e et f, on reliait A et B par un fil conducteur. Quelle charge circulerait dans chacun des cas ? Faire le calcul numérique des charges et des potentiels finaux de A et B, de même que les énergies libérées dans chacun des cas.

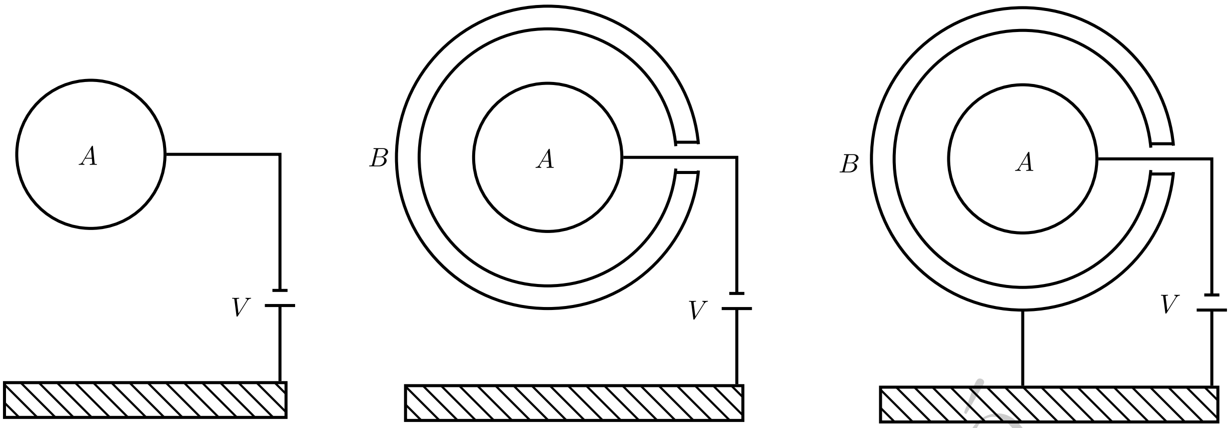


figure d figure e figure f

Solution Exercise III.6

1) Pour que la charge soit uniformément répartie sur la surface, il faut que cette dernière soit dépourvue de pointes et d'aspérités (voir pouvoir des pointes dans le cours). Cette charge est négative et répartie en surface.

2-a) Le conducteur A de charge Q crée un champ en son voisinage. Quand le conducteur neutre B est à une distance d de A, il ressent ce champ et ses charges positives $+|q|$ sont attirées par les charges négatives de A, alors que les charges négatives $-|q|$ sont repoussées (B reste neutre $+|q| - |q| = 0$). Les charges $+|q|$ de B créent un champs dans A plus grand que celui créé par les chargent $-|q|$, modifient le potentiel de A et attirent plus de charges négatives de A. Ces charges sont fournies par le générateur qui les transfère de la terre vers A pour garder le même potentiel V. La charge de A devient Q' avec $|Q'| > |Q|$. En chaque point de l'espace (y compris les conducteurs), le champ est la somme des champs créés par Q', $+|q|$ et $-|q|$: $\vec{E} = \vec{E}_{Q'} + \vec{E}_{+|q|} + \vec{E}_{-|q|}$. Ce processus de répartition des charges dans A et B s'arrête quand le champ $\vec{E}$ devient nul à l'intérieur de chaque conducteur qui sera donc en équilibre.

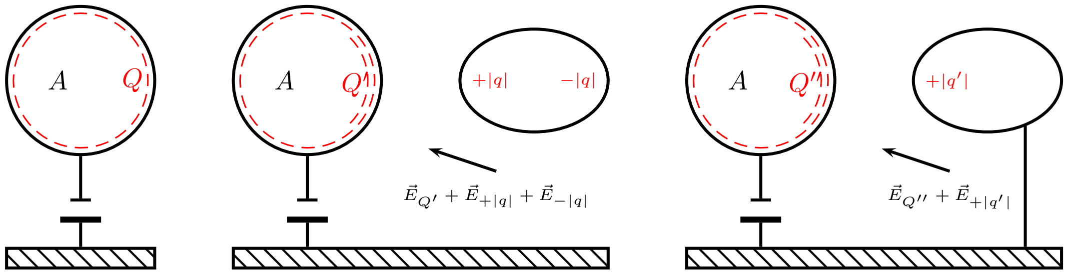


figure (a) figure (b) figure (c)

2-b) Si B est à l'infini, rien ne se passe car B ne ressent pas le champ créé par A (l'infini correspond en fait à une distance pour laquelle le champ créé par A est négligeable).
2-c) Si B est relié à la terre tout en étant à une distance d, ses charges négatives sur le côté opposé à A passent à la terre et le champ dans A augmente, ce qui nécessite d'avantage de charges négatives fournies par le générateur. La charge de A devient Q''.
En résumé, bien que le potentiel de A soit constant, sa charge augmente à cause du rapprochement de B puis augmente encore à cause du lien de B avec la terre ($|Q''| > |Q'| > |Q|$). La capacité de A a donc augmenté par influence de B.
3-a) $Q_0 = V_A C$ et $V_A = V$. Pour une sphère, $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V$ et $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ (voir le cours pour les détails).
3-b) C'est le cas d'une influence totale avec conservation de la charge de B qui est neutre, les relations du cours sont applicables : $Q_1 = -Q_2 = Q_3$. Pour calculer Q_1, il faut la lier au potentiel V_A (la seul donnée que l'on a). Le théorème de Gauss nous permet de calculer le champ en fonction de Q_1 puis l'intégrale du champ nous permettra alors de déduire le potentiel en fonction de Q_1.

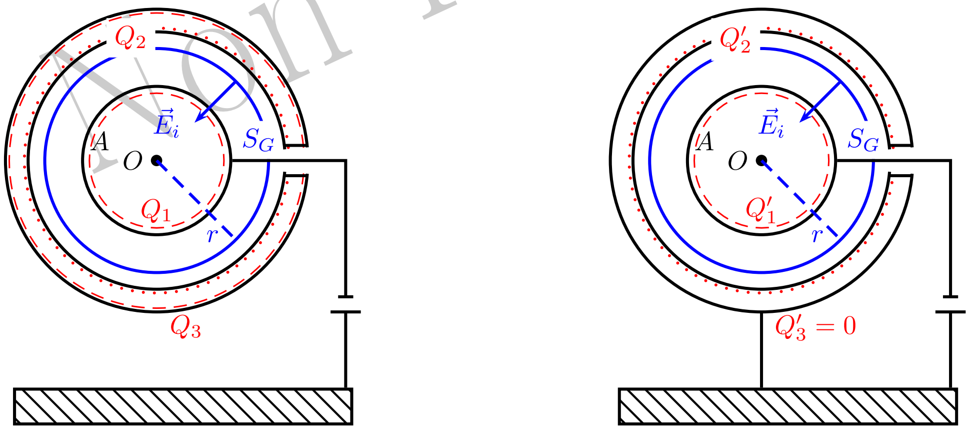


figure (e) figure (f)

Calcul du champ : Par application du théorème de Gauss on détermine que le champ (radial à cause de la symétrie) vérifie : $E 4\pi r^2 = Q_{int}/\varepsilon_0$ où r est le rayon de la surface de Gauss.
Pour $r > R_3$, on a $E = E_e$ et $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1$ de sorte que $E_e = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

Pour $R_3 > r > R_2$, c'est l'intérieur du conducteur B et donc $E = 0$ (c'est ce qui nous a permis d'écrire $Q_1 = -Q_2$ car dans ce cas $Q_{int} = Q_1 + Q_2 = 0$).
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $E = E_i$ et $Q_{int} = Q_1$ de sorte que $E_i = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$.
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur du conducteur A et donc $E = 0$.
Calcul du potentiel : $dV = -\vec{E}.d\vec{l} = -Edr$ (car $\vec{E} = E\vec{u}_r$). Par conséquent, $V(r) = -\int Edr$.
Pour $r > R_3$, on a $V(r) = V_e(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_e = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r$ (on choisit $C_e = 0$ car $V_e(\infty) = 0$)
Pour $R_3 > r > R_2$, on a $V(r) = V_B(r) = V_B$ (potentiel constant à l'intérieur de B). La continuité du potentiel en R_3 s'écrit $V_B(R_3) = V_e(R_3) \Rightarrow V_B = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_3$.
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $V(r) = V_i(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_i$. La continuité en R_2 donne $V_i(R_2) = V_B(R_2) \Rightarrow Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_2 + C_i = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_3$. Par conséquent, $V_i = (Q_1/4\pi\varepsilon_0)[1/r + (1/R_3 - 1/R_2)]$
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur de A et

$$V(r) = V_A = V_i(R_1) = (Q_1/4\pi\varepsilon_0)[1/R_1 + 1/R_3 - 1/R_2]$$

Ainsi,

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 + 1/R_3 - 1/R_2]$$

3-c) Le conducteur B et le sol constituent un seul conducteur ($V_B = 0$) et la charge à la surface externe de B passe au sol ($Q'_3 = 0$). Le même raisonnement conduit à :
Pour $r > R_3$, on a $E_e = 0$ car $Q_{int} = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 = Q'_1 + Q'_2 = 0$. Par conséquent, $V_e(r) = C_e$ comme $V_e(\infty) = 0$ (ou bien par continuité en R_3, $V_e(R_3) = V_B = 0$), alors $C_e = 0$.
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $E_i = Q'_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$ et $V(r) = V_i = Q'_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_i$. La continuité en R_2 donne $V_i(R_2) = V_B \Rightarrow Q'_1/4\pi\varepsilon_0 R_2 + C_i = 0$ ce qui permet de déduire $V_i = (Q'_1/4\pi\varepsilon_0)[1/r - 1/R_2]$.
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur de A et

$$V(r) = V_A = V_i(R_1) = \left(Q'_1/4\pi\varepsilon_0\right)[1/R_1 - 1/R_2]$$

Ainsi

$$Q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - 1/R_2]$$

d) Réécrivons $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/(1/R_1)$, $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - (1/R_2 - 1/R_3)]$ et $Q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - 1/R_2]$. Comme $1/R_2 >$
$(1/R_2 - 1/R_3) > 0$, on voit facilement que $|Q'_1| > |Q_1| > |Q_0|$ (on compare les valeurs absolues car V_A est négatif et donc les charges aussi). Pour augmenter Q'_1, il faut diminuer R_2 (Rapprocher les conducteurs A et B formant le condensateur).
Remarque : la capacité dans le cas (f) est $C = 4\pi\varepsilon_0/[1/R_1 - 1/R_2] = 4\pi\varepsilon_0 (R_1 R_2)/[R_2 - R_1]$. On peut retrouver la capacité du condensateur plan comme limite où $d = R_2 - R_1 << R_1 \Rightarrow (R_1 R_2) \approx R_1^2 \Rightarrow C \approx$

$4\pi\varepsilon_0 R_1^2/d = \varepsilon_0 S/d$.

e) Figure e : A et B constitueront un seul conducteur de potentiel V et de charge $Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 V R_3$ répartie sur la surface externe de B. La charge Q_1 passe de A vers B et la charge $Q_2 - Q_1$ fournie par le générateur passe de la terre vers B). L'énergie libérée est $\Delta U = U_f - U_i$ avec $U_f = Q_2 V/2$ et $U_i = Q_1 V/2$ donc $\Delta U = (Q_2 - Q_1)\,V/2$. On voit maintenant que c'est $(Q_2 - Q_1)$ qui a réellement circulé (en subissant une variation de potentiel). Le générateur a fourni $(Q_2 - Q_1)\,V$ dont la moitié a été dissipée sous forme de chaleur.

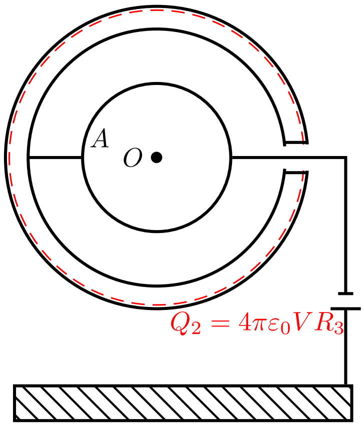


figure (e)

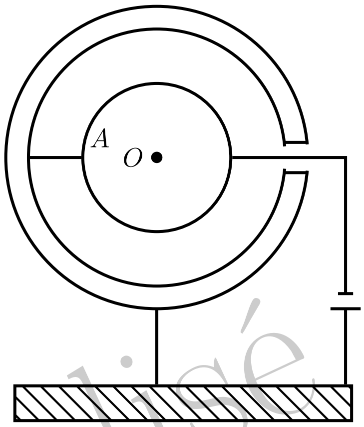


figure (f)

Figure f : Premier cas (A est isolé du générateur avant de le relier à B) : Après l'isolement, $V = V_A$ et rien ne change. Après le lien entre A et B, toute la charge Q'_1 circule de A vers B pour neutraliser la charge $Q'_2 = -Q'_1$. La charge et le potentiel deviennent nuls à la fin. Comme le potentiel de B était déjà nul, on a $U_i = (1/2)\,Q'_1 V_A + (1/2)\,Q'_2 V_B = (1/2)\,Q'_1 V$ et $U_f = 0$. Donc $\Delta U = -(1/2)\,Q'_1 V$. Elle est libérée sous forme chaleur (effet Joule).

Deuxième cas (A reste lié au générateur) : Si le générateur est idéal (fournit un potentiel constant V), la charge circulerait en permanence dans le circuit fermé terre, générateur, A et B. L'équilibre n'est jamais atteint ce qui ne correspond pas aux conditions de ce cours. Par contre, un générateur réel s'épuise et tous les potentiels et toutes les charges deviennent nuls à la fin. Tout se passe comme si la charge Q'_1 a circulé de A vers B. Le générateur passe de l'énergie U_G à 0. L'énergie libérée est $\Delta U = U_f - U_i$ avec $U_f = 0$ et $U_i = (1/2)\,Q'_1 V + U_G$, donc $\Delta U = -(1/2)\,Q'_1 V - U_G$. Remarquons que si le conducteur a une résistance nulle, il s'agira alors d'un court-cricuit.

Exercise III.7

On considère un condensateur idéal, constitué de deux conducteurs plans, de surfaces S et distants de e_0. On applique une d.d.p. V_0 entre ses armatures.

1. Calculer :
   a) la charge Q du condensateur ;
   b) l'énergie potentielle emmagasinée ;
   c) la force agissant sur chacune des armatures.
2. On isole le condensateur de la source. Une des armatures étant fixe, on approche l'autre jusqu'à e_1 ($e_0 > e_1$), (figure I).
   Expliquer, qualitativement, les phénomènes qui se produisent au cours de ce déplacement (transport de charge, variation de potentiel, de capacité,........)
   Montrer, à travers un bilan précis, que le principe de conservation de l'énergie est vérifié.
3. On réalise maintenant le même déplacement tout en gardant le générateur branché au condensateur (figure II). Mêmes questions que précédemment (ne pas oublier de tenir compte, dans le bilan, de l'énergie mise en jeu dans le générateur)
4. Refaire les bilans d'énergie du 2°) et du 3°) dans le cas d'un déplacement de e_0 à e_1 lorsque $e_0 < e_1$.

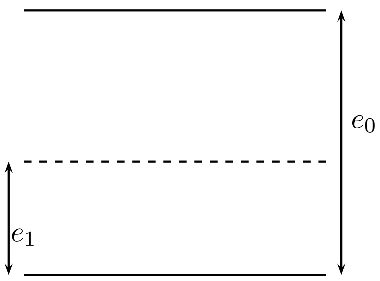


Figure I

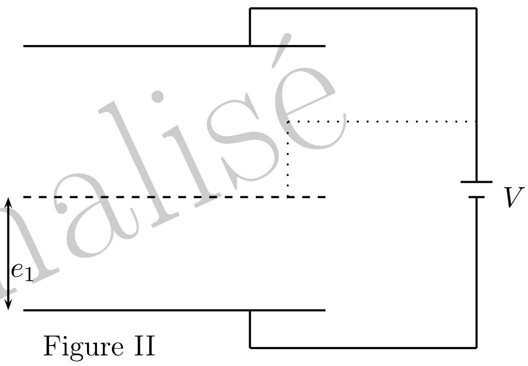


Figure II

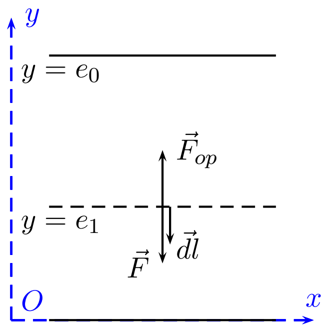
Solution Exercise III.7

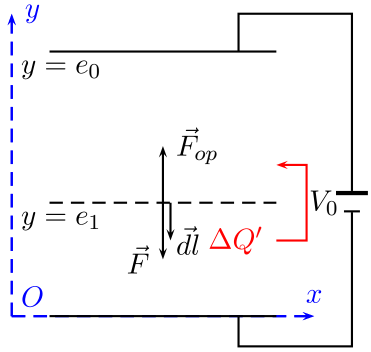
1-a) $Q = C_0V_0$ avec $C_0 = (\varepsilon_0 S/e_0)$. Rappel : $V_0 = Ee_0$ et $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/S\varepsilon_0 \Rightarrow Q = (S\varepsilon_0/e_0)\,V_0$.
1-b) C'est l'énergie interne $U = QV_0/2 = Q^2/2C_0 = (1/2)\,C_0V_0^2$
1-c) C'est la force moyenne $F = QE_m$ où $E_m = -\sigma/2\varepsilon_0 = -Q/2S\varepsilon_0$. Donc, $F = -Q^2/2S\varepsilon_0$. On retrouve le même résultat avec la relation $F = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_Q$ avec $C_0 = \varepsilon_0 S/y$ (voir la fin du cours sur les conducteurs).
2-a) Explication : Quand un opérateur ($\vec{F}_{op}$) déplace une armature, la charge sur chaque armature (isolée électriquement) est conservée et la capacité doit augmenter car l'influence augmente par rapprochement. Le potentiel doit diminuer. La relation $Q = C_1V_1$, où $C_1 = (\varepsilon_0 S/e_1)$, montre que la différence de potentiel doit diminuer ($V_1 = (e_1/e_0)\,V_0$).

$e \searrow$	$C = \varepsilon_0 S/e \nearrow$	$Q = C^{te}$	$V = Q/C \searrow$	$U = Q^2/2C \searrow$	$F = Q^2/2\varepsilon_0 S = C^{te}$

2-b) Bilan d'énergie :
Variation de l'énergie interne $\Delta U = Q^2/2C_1 - Q^2/2C_0 = \left(Q^2/2S\varepsilon_0\right)(e_1 - e_0)$. Le condensateur cède de l'énergie car $\Delta U < 0$.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée : la force $F = -Q^2/2S\varepsilon_0$ est constante de sorte que $W = F\,(e_1 - e_0) = \left(Q^2/2S\varepsilon_0\right)(e_0 - e_1)$.





On voit bien que $\Delta U = -W$ ce qui correspond bien à la définition de l'énergie interne. L'énergie perdue par le condensateur est récupérée par le milieu extérieur (voir remarque b à la fin de l'exercice).

3-a) Explication : cette fois, c'est la différence de potentielle qui est maintenue constante par le générateur. La capacité augmente par augmentation de l'influence (rapprochement) et la charge aussi car les armatures ne sont pas isolées électriquement. $Q_1 = C_1V_0$.

$e \searrow$	$C = \varepsilon_0 S/e \nearrow$	$V = C^{te}$	$Q = VC \nearrow$	$U = V^2C/2 \nearrow$	$F = Q^2/2\varepsilon_0 S \nearrow$

3-b) Bilan d'énergie :

Variation de l'énergie interne : $\Delta U = \left(C_1V_0^2/2\right) - \left(C_0V_0^2/2\right) = \left(V_0^2S\varepsilon_0/2\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. Le condensateur reçoit de l'énergie car $\Delta U > 0$.

Énergie fournie par le générateur : $U_{\Delta Q} = V_0\,(Q_1 - Q_0) = V_0^2\,(C_1 - C_0) = \left(V_0^2 S\varepsilon_0\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. La charge positive ΔQ passe de la borne négative à la borne positive à travers le générateur. Elle voit son potentiel augmenter de V_0 et son énergie potentielle augmenter de $U_{\Delta Q}$. Cette dernière est l'énergie fournie par le générateur.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée : Pour chaque position y de l'armature, on a $Q = V_0C$ avec $C = \varepsilon_0 S/y$. La force $F = -Q^2/2S\varepsilon_0 = -\left(S\varepsilon_0/2y^2\right)V_0^2$ varie donc avec la distance y entre les deux armatures (On retrouve le même résultat avec la relation $F = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_V$). Le travail est alors $W = \int_{e_0}^{e_1} F\,dy = -\int_{e_0}^{e_1}\left(S\varepsilon_0/2y^2\right)V_0^2\,dy = \left(V_0^2S\varepsilon_0/2\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. Comme dans le cas précédent, ce travail positif correspond à une perte d'énergie du condensateur récupérée par le milieu extérieur.

On voit que $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$: Lors du déplacement, le condensateur reçoit l'énergie fournie par le générateur et cède de l'énergie au milieu extérieur. La variation totale de son énergie est égale à la somme des deux variations.

4) Dans ce cas, on retrouve évidemment les mêmes résultats changés de signe.

Générateur débranché : $\Delta U = -W > 0$. Le condensateur reçoit de l'énergie cédée par le milieu extérieur.

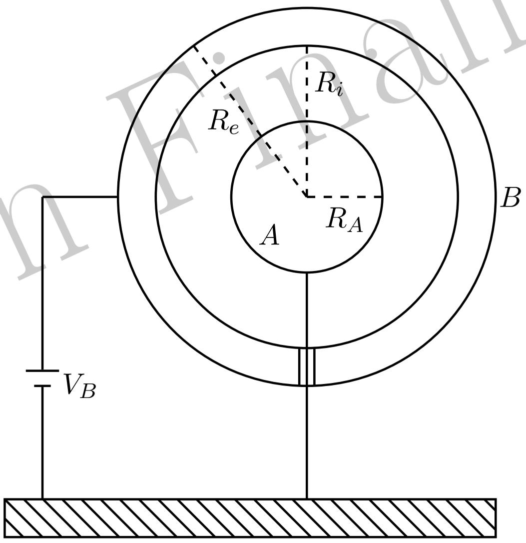
Générateur branché : $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$ avec $\Delta U = \left(V_0^2S\varepsilon_0/2\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$, $U_{\Delta Q} = \left(V_0^2S\varepsilon_0\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$ et $W = \left(V_0^2S\varepsilon_0/2\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$. Le condensateur reçoit l'énergie W du milieu extérieur mais ne la

garde pas et la transfère au générateur. De plus, il cède l'énergie ΔU au générateur. Ce dernier reçoit donc $U_{\Delta Q} = \Delta U + W$.
Remarques : a) $U_{\Delta Q} = -V_0\,(Q_1 - Q_0)$ car la charge positive $\Delta Q = (Q_1 - Q_0)$ passe de l'armature positive à l'armature négative (le condensateur se décharge par diminution de l'influence à potentiel constant).
b) En général, on parle d'énergie cédée au milieu extérieur par le condensateur si $W > 0$ car $\Delta U = -W < 0$), et d'énergie reçue du milieu extérieur si $W < 0$ ($\Delta U > 0$). Le milieu extérieur peut être vu comme un opérateur qui applique une force égale et opposée à la force électrostatique (car l'armature doit se déplacer à une vitesse constante très faible).

Exercise III.8

Une sphère A, reliée au sol, est placée au centre d'une coquille sphérique B portée à un potentiel V_B par rapport au sol (voir figure ci-dessous).

1. Donner les expressions du champ et du potentiel électriques :
   a) dans la région comprise entre les deux sphères ($R_A < r < R_i$) ;
   b) à l'extérieur de B ($r > R_e$).
2. Trouver les expressions des charges portées par les surfaces intérieure et extérieure de la sphère B.



Solution Exercise III.8

1.a. Pour $R_A < r < R_i$, on a $E_a(r) = K\frac{Q_A}{r^2}$ par application du théorème de Gauss à la sphère A (voir cours). Donc $V_a(r) = K\frac{Q_A}{r} + C_A$. La constante se détermine par $V_a(R_A) = K\frac{Q_A}{R_A} + C_A = 0$ (A est liée à la terre). Donc $V_a(r) = KQ_A(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_A})$
1.b. Pour $r > R_e$, on a $E_b(r) = K\frac{Q}{r^2}$ et $V_b(r) = K\frac{Q}{r} + C_B$, où $C_B = 0\,\mathrm{V}$ car $V_b(\infty) = 0\,\mathrm{V}$, et $Q = Q_A + Q_i + Q_e = Q_e$ à cause de l'influence totale ($Q_i = -Q_A$).

2. On a deux équations $V_a(R_i) = V_B$, $V_b(R_e) = V_B$

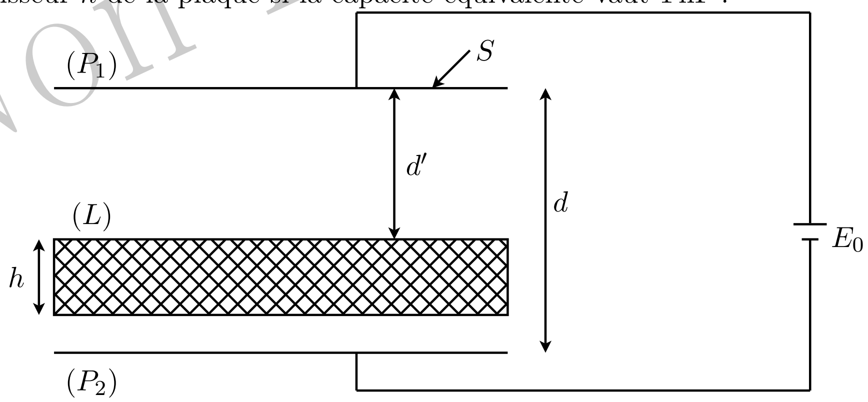
$$KQ_A\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_A}\right) = V_B \tag{1}$$
$$K\frac{Q_e}{R_e} = V_B \tag{2}$$

Par conséquent, $Q_A = -\frac{V_B}{K}\frac{R_iR_A}{(R_i-R_A)} = -Q_i$ et $Q_e = \frac{V_BR_e}{K}$. Remarque : la charge totale de B est passée de $0\,\mathrm{C}$ à $Q_B = Q_i + Q_e = \frac{V_B}{K}\frac{R_iR_A+R_iR_e-R_AR_e}{(R_i-R_A)} \neq 0\,\mathrm{C}$. Elle n'a pas été conservée car B n'est pas isolé.

Exercise III.9

Soit un condensateur plan idéal formé par deux armatures (P_1) et (P_2) conductrices de surfaces $S = 226\,\mathrm{cm}^2$ et séparées par du vide d'épaisseur $d = 0.3\,\mathrm{mm}$.

1. Le condensateur est branché à un générateur de f.e.m $E_0 = 120\,\mathrm{V}$.
   a) Retrouver l'expression de la capacité du condensateur et la calculer.
   b) Calculer la charge portée par chaque armature ainsi que l'énergie emmagasinée.
   c) Déterminer les forces qui s'exercent sur les armatures.
2. On introduit parallèlement entre les armatures une plaque conductrice (L), neutre, de même dimensions et d'épaisseur h (figure ci-dessous). Le générateur étant branché :
   a) Expliquer qualitativement ce qui se passe et représenter la nouvelle répartition des charges.
   b) Donner l'expression de la capacité équivalente du système.
   c) Quelle est l'épaisseur h de la plaque si la capacité équivalente vaut $1\,\mathrm{nF}$?



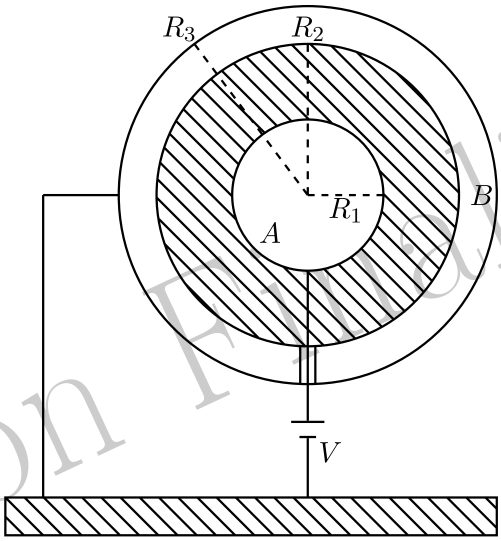
Solution Exercise III.9

1.a. Chaque armature est considérée comme un plan infini qui crée un champ constant $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ où $Q = \sigma S$. Le champ dû aux deux armatures est $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$. La différence de potentiel est donc $E_0 = V = Ed = \frac{dQ}{S\epsilon_0}$ (attention : ne pas confondre la fem E_0 et le champ E). La capacité est $C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0\frac{S}{d}$, A.N. $C = \frac{226\times10^{-4}}{4\times\pi\times9\times10^9\times0.3\times10^{-3}} = 66.61\,\mathrm{nF}$.

1.b. $Q = CE_0$, $U = \frac{1}{2}CE_0^2$.
1.c. C'est la force moyenne $F = QE_m$ où $E_m = \sigma/2\varepsilon_0 = Q/2S\varepsilon_0$. Donc, $F = Q^2/2S\varepsilon_0$.
2.a. La plaque est en influence (totale). La charge $-Q$ se déplace vers la surface en face de P_1 et la charge Q vers la surface en face de P_2.
2.b. On a deux condensateurs en série de capacités $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d'}$ et $C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{(d-d'-h)}$. La capacité équivalente est $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\epsilon_0}{S(d-h)}$, d'où $C_{eq} = \frac{S(d-h)}{\epsilon_0}$.
3.b. $h = d - \frac{\epsilon_0 C_{eq}}{S}$

Exercise III.10

La figure ci-dessous représente un condensateur sphérique formé de deux conducteurs A (de rayon R_1) et B (de rayons R_2 et R_3) séparés par un milieu isolant de permittivité ε et résistivité ρ.



1. Représenter la répartition de charge sur les conducteurs A et B.
2. Déterminer le champ électrique à l'intérieur du condensateur ($R_1 \leq r \leq R_2$).
3. Trouver l'expression de la différence de potentielle entre les deux conducteurs.
4. Déduire la capacité de ce condensateur.

Solution Exercise III.10

1. L'influence totale implique $Q(R_1) = Q$ et $Q(R_2) = -Q$. Conservation de la charge de B (supposé neutre) : $Q(R_2) + Q(R_3) = 0$. Donc $Q(R_3) = Q$.
2. $\vec{E}(r) = \vec{E}_A(r) + \vec{E}_B(r)$ avec $\vec{E}_A(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r2}\vec{u}_r$ (Théorème de Gauss pour l'extérieur de A) et $\vec{E}_B(r) = \vec{0}$ (intérieur de B). Donc $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r2}$.

3. $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E(r)dr$. Donc $V_B - V_A = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$.
4. $|V_B - V_A| = \frac{|Q|}{C} \implies C = 4\pi\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$.

Exercise III.11

Part I

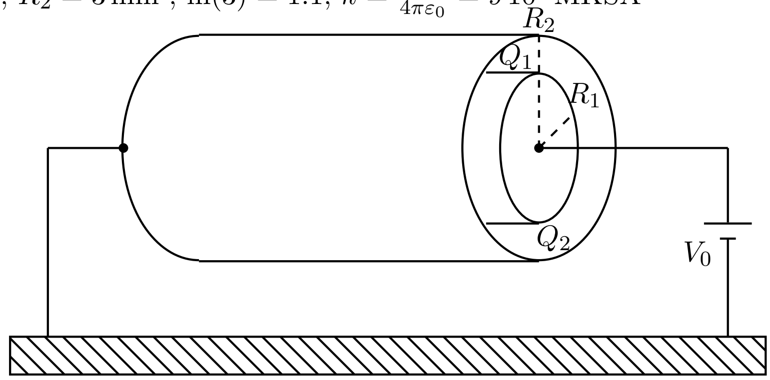
Un conducteur de forme quelconque homogène, en équilibre électrostatique, porte une charge Q.

1. Que vaut le champ électrique à l'intérieur de ce conducteur ?
2. Que vaut le potentiel électrique à l'intérieur de ce conducteur ?
3. Où est située la charge Q ?

Part II

Nous disposons maintenant d'un câble coaxial, cylindrique, constitué de deux cylindres conducteurs infiniment longs, d'axe Oz, séparés par le vide. Le premier est plein de rayon R_1, de potentiel V_0 et porte une charge Q_1. Le second est creux, de rayon R_2 est relié au sol (voir figure).

1. Quel est le signe de Q_1 ?
2. L'ensemble étant à l'équilibre, quelle est la charge Q_2 de la face interne du cylindre externe.
3. Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, la direction, le sens et le module du champ électrique entre les deux conducteurs ($R_1 < r < R_2$).
4. a) En utilisant la circulation du champ électrique ($dV = -\vec{E}.\vec{dl}$), donner l'expression de la charge Q_1.
   b) Déduire l'expression de la capacité du câble coaxial.
   c) Calculer cette capacité par unité de longueur.
   A.N : $R_1 = 1\,\mathrm{mm}$, $R_2 = 3\,\mathrm{mm}$, $\ln(3) = 1.1$, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\,10^9$ MKSA



Solution Exercise III.11

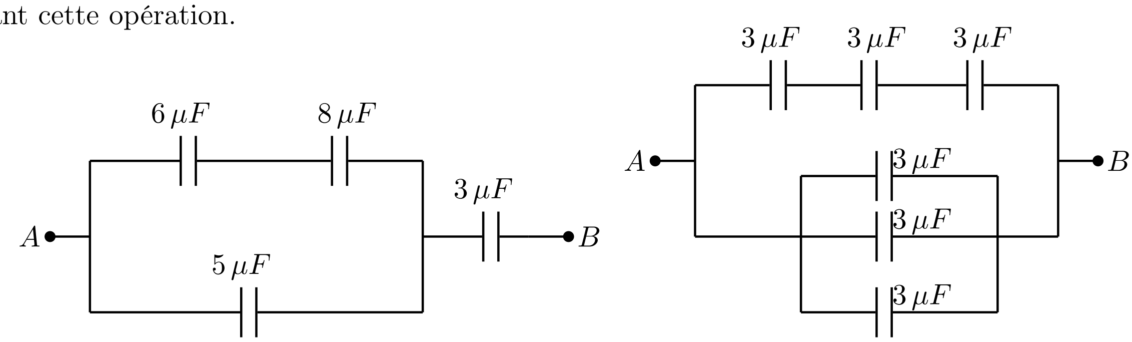
I. Voir cours.

II. Indication voir exercice II.10

Exercise III.12

Soient deux associations de condensateurs représentées sur la figure ci-dessous.

1. Calculer les capacités équivalentes aux deux associations.
2. Dans chacun des cas, on applique entre A et B une d.d.p. de $1000\,\mathrm{V}$ puis on débranche la source et on réalise un court-circuit entre A et B. Calculer la quantité de charge qui a circulé et l'énergie libérée durant cette opération.



Solution Exercise III.12

Schéma de gauche : $C_1 = \frac{6*8}{6+8} + 5 = \frac{59}{7}\,\mu\mathrm{F} = 8.43\mu F$ et $C_{eq} = \frac{\frac{59}{7}*3}{\frac{59}{7}+3} = \frac{177}{80}\,\mu\mathrm{F} = 2.21\,\mu\mathrm{F}$.
Dans les deux cas la charge qui a circulé et l'énergie libérée sont celles du condensateur équivalent, $Q = C_{eq}V$ et $U = \frac{1}{2}C_{eq}V^2$.