Première partie

Interaction Électrique

Non Finalisé

Exercise I.1

1. Déterminer le nombre d'atomes et d'électrons constituant une pièce de monnaie en cuivre ($^{63}_{29}Cu$), neutre, de 3 g.
2. Cette pièce porte à présent une charge $Q = 5 \times 10^{-9}$ C. Déterminer le nombre d'électrons perdus par la pièce et le comparer au nombre d'atomes.

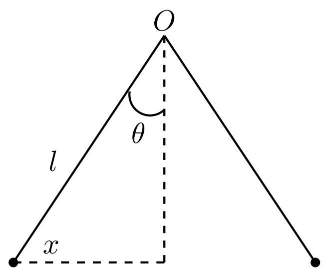
Solution Exercise I.1

Données : $m = 3$ g, $Z = 29$ et $A = 63.546$. Nombre d'Avogadro $N = 6.023 \times 10^{23}$.
1. Le nombre de moles est $n_{moles} = m/A$ (m en g et non en kg). Le nombre d'atomes est $n_A = n_{moles}N = \frac{mN}{A} = 2.8435 \times 10^{22}$. Le nombre d'électrons est $n_Z = Zn_A = ZmN/A = 8.246 \times 10^{23}$.
2. $Q = +5 \times 10^{-9}C$ et $e = 1.6 \times 10^{-19}C$. Le nombre d'électrons perdus est $n_e = Q/e = 3.12 \times 10^{+10}$. Donc $n_e/n_A \sim 10^{-13}$.

Exercise I.2

Deux sphères conductrices identiques de masse $m = 10$ g portent des charges q_1 et q_2. On les met en contact, puis on les sépare.

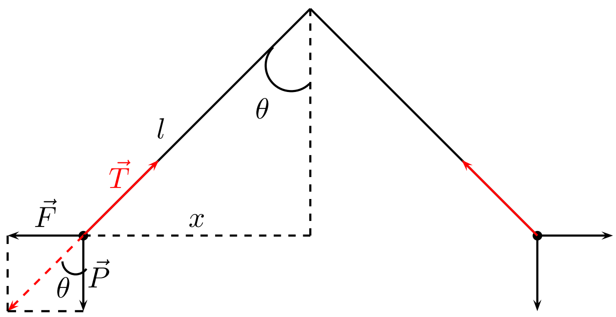
1. Calculer les charges q_1' et q_2' qu'elles prennent dans les cas suivants :
   a) $q_1 = +4 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = 0$ C.
   b) $q_1 = +3 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = +8 \times 10^{-8}$ C.
   c) $q_1 = +3 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = -8 \times 10^{-8}$ C.
   Préciser chaque fois le sens du transfert d'électrons.
2. Les deux masses sont suspendues au même point O par deux fils identiques de Nylon de longueur $l = 80$ cm (figure ci-dessous). En négligeant la masse des fils, calculer la distance $2x$ séparant les deux sphères pour les 3 cas précédents (on supposera que l'angle θ est suffisamment petit et $g = 10\,\text{m/s}^2$).



Solution Exercise I.2

Données : $l = 0.8m$, $K = 9 \times 10^9 C^{-2}m^3kg.s^{-2}$, $m = 10^{-2}kg$, $g = 10m/s^2$

Non Finalisé



1. Comme les sphères sont identiques, elles porteront la même charge après le contact $q'_1 = q'_2 = (q'_1 + q'_2)/2$. Système électriquement isolé$\Rightarrow$conservation de la charge : $q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$,
Donc $q'_1 = q'_2 = (q_1 + q_2)/2$. Le tableau suivant résume les résultats (en C) :

Cas	q_1	q_2	$q_1 + q_2$	$q'_1 = q'_2$
a	4×10^{-8}	0	4×10^{-8}	2×10^{-8}
b	3×10^{-8}	8×10^{-8}	11×10^{-8}	5.5×10^{-8}
c	3×10^{-8}	-8×10^{-8}	-5×10^{-8}	-2.5×10^{-8}

Non Finalisé

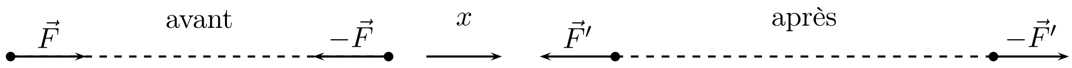
2. Les deux sphères portent la même charge et se repoussent donc par une force $F = K\frac{q'_1 q'_2}{(2x)^2} = K\frac{q'^2_1}{(2x)^2}$.
Géométrie : $\frac{x}{l} = \sin\theta$. La RFD $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$ donne $\frac{F}{P} = \tan\theta$. L'angle étant petit, alors $\sin\theta = \tan\theta$ d'où $\frac{x}{l} = K\frac{q'^2_1}{mg(2x)^2} \Rightarrow x = \left(K\frac{lq'^2_1}{4mg}\right)^{1/3}$
AN. Cas a : $x = 1.93cm$. Cas b : $x = 3.79cm$. Cas c : $x = 2.24cm$.

Exercise I.3

Deux sphères conductrices identiques portant des charges de signes opposés s'attirent avec une force de 0.108 N, quand la distance qui les sépare est $d = 0.5$ m. On les relie à l'aide d'un fil conducteur. Après avoir enlevé le fil, elles se repoussent avec une force de 0.036 N, pour la même distance. Quelle était la charge initiale de chaque sphère ? (Les rayons des sphères sont très négligeables devant la distance d)

Solution Exercise I.3

Données : $F = 0.108N$, $d = 0.5m$, $F' = 0.036N$.
Soient q_1 et q_2 les charges initiales des deux sphères. La force est $F = -K\frac{q_1 q_2}{d^2}$ (car $q_1 q_2 < 0$). Le fil conducteur permet le déplacement des charges d'une sphère à l'autre pour avoir la même charge $q' = \frac{q_1+q_2}{2}$ (Conservation de la charge et sphères identiques).



La force après avoir enlevé le fil est $F' = K\frac{q'^2}{d^2} = K\frac{(q_1+q_2)^2}{4d^2}$. On a donc un système de deux équations du second degré :

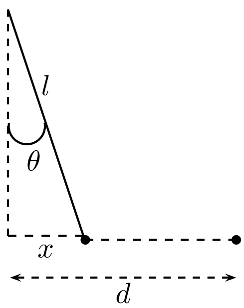
$$\begin{cases} q_1 q_2 = -\frac{Fd^2}{K} \\ (q_1+q_2)^2 = \frac{4F'd^2}{K} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 q_2 = -3.0 \times 10^{-12} \\ q_1 + q_2 = \pm 2.0 \times 10^{-6} \end{cases}$$

La solution dépend du signe ($\pm$) de $q_1 + q_2$. Pour le signe ($-$), on aura ($q_1 = -3.0 \times 10^{-6} C$, $q_2 = 1.0 \times 10^{-6} C$), ou l'inverse ($q_1 = 1.0 \times 10^{-6} C$, $q_2 = -3.0 \times 10^{-6} C$).
Pour le signe ($+$), on aura ($q_1 = -1.0 \times 10^{-6} C$, $q_2 = 3.0 \times 10^{-6} C$), ou l'inverse ($q_1 = 3.0 \times 10^{-6} C, q_2 = -1.0 \times 10^{-6} C$).
On a quatre solutions parce qu'on peut permuter les charges q_1 et q_2, ainsi que leurs signes, sans changer ni F ni F'.

Non Finalisé

Exercise I.4

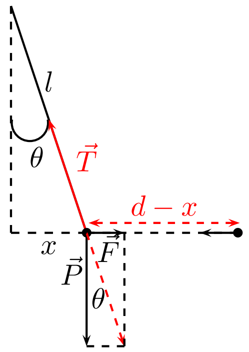
La figure ci-dessous représente un pendule constitué d'un fil de longueur $l = 10\,\text{cm}$ et d'une boule de masse $m = 9\,\text{g}$ portant une charge électrique $Q_1 = +2 \times 10^{-8}\,\text{C}$. On place à une distance $d = 4\,\text{cm}$ de cette boule une charge ponctuelle $Q_2 = -5 \times 10^{-8}\,\text{C}$. On prendra $g = 10\,\text{m/s}^2$.



1. Calculer l'angle θ d'inclinaison du pendule (on le supposera suffisamment petit).
2. Calculer la force électrostatique qui s'exerce sur la boule.

Solution Exercise I.4

Données : $l = 10^{-1}$m, $m = 10^{-2} kg$, $Q_1 = 2 \times 10^{-8} C$, $d = 4 \times 10^{-2} m$, $Q_2 = -5 \times 10^{-8} C$.



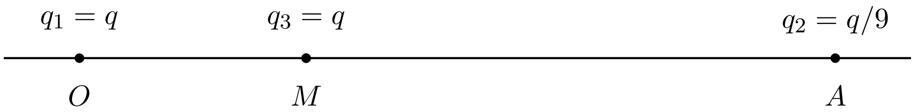
1. Les forces électriques sont attractives. L'approximation du petit angle, permet d'écrire (voir exercice précédent) : $\frac{x}{l} = \sin\theta = \tan\theta = \frac{F}{mg}$ où $F = -K\frac{Q_1Q_2}{(d-x)^2}$ (en module). Donc $\frac{x}{l} = -K\frac{Q_1Q_2}{mg(d-x)^2} \Rightarrow (d-x)^2 = -Kl\frac{Q_1Q_2}{mg}\frac{1}{x} \implies x^3 - 2dx^2 + d^2x + K\frac{lQ_1Q_2}{mg} = 0$. D'où $x^3 - 8\,10^{-2}x^2 + 16\,10^{-4}x - 9\,10^{-6} = 0$
L'équation se simplifie en posant $x = y \times 10^{-2}$ (on travaille en cm). On obtient : $y^3 - 8y^2 + 16y - 9 = 0$. On remarque que $y = 1$ est une solution [1]. L'équation devient alors : $(y-1)(y^2-7y+9) = 0$. Les deux solutions, qui restent, sont celles de $(y^2 - 7y + 9) = 0$. On trouve $y = \frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$.
A ces trois solutions correspondent $x = 1\,\text{cm}$, $x = 1.7\,\text{cm}$ ou $x = 5.30\,\text{cm}$. On constate que la dernière solution correspond à $x > d$ ce qui contredit l'hypothèse de l'exercice [2]. De plus, $\theta = \arcsin\frac{x}{l} = \arcsin(0.53) \simeq 32°$ ce qui ne vérifie pas à l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$. Les deux premières solutions sont acceptables et correspondent à des θ différents tout en vérifiant l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$. On choisit $x = 1cm$ car elle correspond à la meilleure approximation ($\theta = \arcsin(0.1) = 5.7°$ est le plus petit).
2. $F = -K\frac{Q_1Q_2}{(d-x)^2} = \frac{x}{l}mg = 10^{-2}N$.

Non Finalisé

Exercise I.5

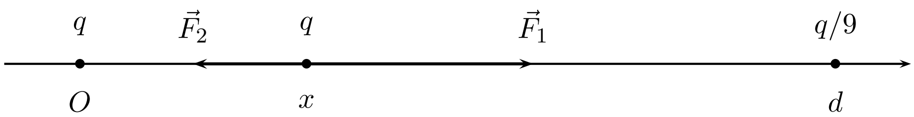
On considère le système de charges ponctuelles représentées sur la figure ci-dessous. Les charges positives $q_1 = q$ et $q_2 = q/9$ sont fixées respectivement aux points O et A distants de d. Soit une charge $q_3 = q$ assujettie à se déplacer le long du segment OA.

1. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur q_3 au point M d'abscisse x.
2. A quelle abscisse x_0, la charge q_3 est dans une position d'équilibre ?
   A.N : $d = 4\,\text{cm}$.



1. Sinon, on peut résoudre graphiquement en représentant la fonction $y^3 - 8y^2 + 16y - 9$
2. Une ancienne version de cet exercice possède une seule solution (réelle) correspondant à $x > d$. Dans la présente version, Q_1, Q_2 et d ont été choisies de façon à avoir trois solutions.

Solution Exercise I.5



1. En valeurs algébriques : $F_1 = K\frac{q^2}{x^2}$ et $F_2 = -K\frac{q^2}{9(d-x)^2}$

$F = K\frac{q^2}{x^2} - K\frac{q^2}{9(d-x)^2} = Kq^2\frac{9(d-x)^2-x^2}{9x^2(d-x)^2} = Kq^2\frac{(3d-2x)(3d-4x)}{9(d-x)^2x^2}$

2. Équilibre : $F = 0 \Rightarrow (3d-2x)(3d-4x) = 0$. Alors $x = \frac{3d}{4} = 3cm$ (l'autre solution $x = \frac{3d}{2}$ est inacceptable car elle correspond à $x > d$).

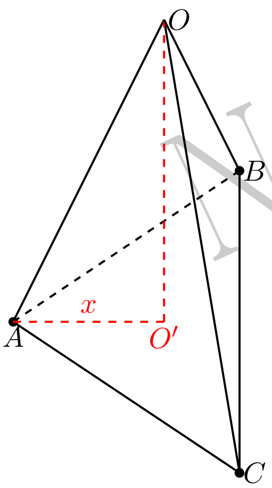
Exercise I.6

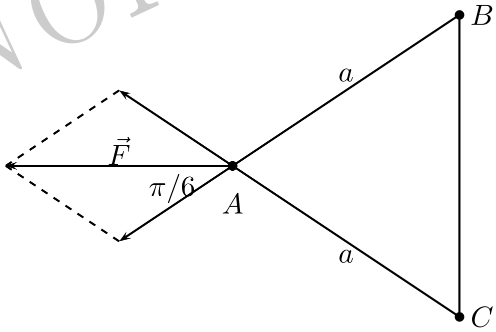
Trois petites boules identiques de masse $m = 10\,\text{g}$, sont suspendues à un même point au moyen de trois fils de soie distincts de longueur $l = 1\,\text{m}$. Ces trois boules de même charge q se positionnent alors au sommet d'un triangle équilatéral de côté $a = 0.1\,\text{m}$. Calculer la charge q.

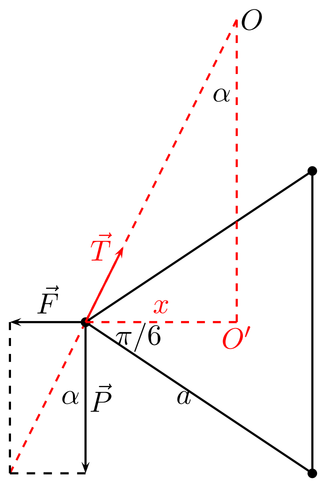
Non Finalisé

Solution Exercise I.6

Données : $m = 10^{-2}kg$, $l = 1m$, $a = 0.1m$







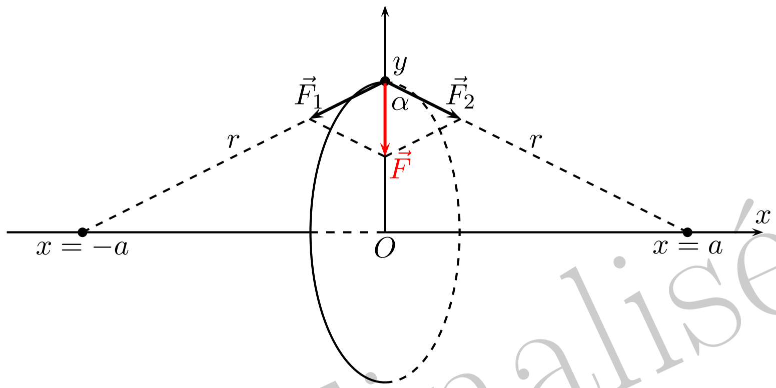
Résultante des forces électriques sur l'une des charges $F = 2K\frac{q^2}{a^2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Le point O est au dessus du centre O' du triangle situé à $x = \frac{2}{3}a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. L'angle α étant petit, on a $\sin\alpha = \tan\alpha \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{a}{l}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2K}{mg}\frac{q^2}{a^2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Donc $q = \sqrt{\frac{a^3mg}{3Kl}} = 6\times10^{-8}C$.

Exercise I.7

Deux charges électriques ponctuelles $(+q)$ sont séparées par une distance $2a$. On place une autre charge ponctuelle mobile dans le plan médiateur du segment $2a$.
Montrer qu'il existe, dans ce plan, un cercle pour lequel la charge mobile est soumise à une force maximale. Déterminer son rayon.

Solution Exercise I.7

Soient O le milieu de $[x=-a, x=+a]$ et y la position de la troisième charge Q (par exemple, de signe opposé à q).



Non Finalisé

A cause de la symétrie, on a $F_1 = F_2 = K\frac{qQ}{r^2}$. La force résultante exercée sur Q est parallèle à $y'Oy$. Par conséquent, $F = 2K\frac{qQ}{r^2}\cos\alpha$ où $r^2 = y^2 + a^2$ et $\cos\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{(y^2+a^2)^{1/2}}$. Donc, $F = 2K\frac{qQy}{(y^2+a^2)^{3/2}}$. Si l'on place Q sur n'importe quel autre point du cercle perpendiculaire à $x'Ox$, de centre O et de rayon $R = y$, on aura une force de même module est dirigée vers O.
Le maximum de F se détermine par $\frac{dF}{dy} = 0$. Ce qui donne
$-2KQq\,\frac{\left(2\,y^2-a^2\right)}{\left(y^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow y = -a/\sqrt{2}$ et $y = a/\sqrt{2}$
On obtient un cercle de rayon $R = a/\sqrt{2}$ et un maximum $F = 2K\frac{qQa}{\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{2}+a^2\right)^{3/2}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}K\frac{Qq}{a^2}$