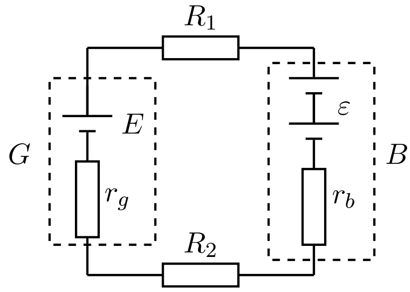
Cinquième partie

Réseaux électriques

Exercice V.1

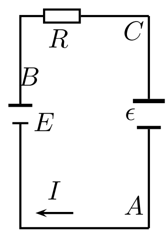
On considère le circuit électrique de la figure ci-contre comprenant un générateur G et une batterie B de f.e.m E et ε, de résistances internes r_g et r_b, respectivement. R_1 et R_2 sont des résistances extérieures.



1. Calculer le courant circulant dans le circuit.
2. Déterminer la d.d.p. aux bornes du générateur G et aux bornes de la batterie B.
3. a) Quelle est la puissance électrique fournie ?
   b) Quelle est la puissance électrique totale dissipée par effet Joule ?
   c) A quelle vitesse l'énergie chimique s'emmagasine-t-elle et où ?

Solution Exercice V.1

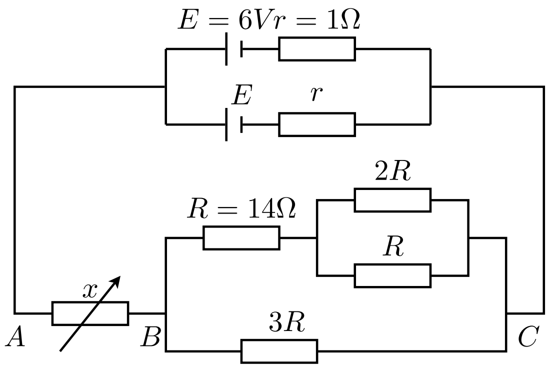
1. On remplace toutes les résistances en série par la résistance équivalente $R = R_1+R_2+r_g+r_b$.
On obtient le schéma équivalent ci-contre.



$V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_A = 0$
$-E + RI + \varepsilon = 0 \Rightarrow I = (E - \varepsilon)/R$. A.N. $R = 3\,\Omega \Rightarrow I = 1.33\,\mathrm{A}$
2. $\Delta V_{Gén} = E - r_g I = 15.85\,\mathrm{V}$ et $\Delta V_{Batt} = \varepsilon + r_b I = 12.13\,\mathrm{V}$
3. Le courant étant positif, il correspond au courant réel. C'est le générateur G qui fournit l'énergie et la batterie B fonctionne comme accumulateur de charges.
a) Puissance fournie $P = EI = 21.33\,\mathrm{W}$
b) Puissance totale dissipée par effet Joule : $P' = RI^2 = 5.33\,\mathrm{W}$.
c) L'énergie chimique W s'emmagasine dans la batterie à la vitesse $(dW/dt) = P_u = P - P' = \varepsilon I = 16\,\mathrm{W}$.

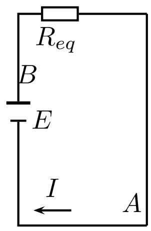
Exercice V.2

Le circuit ci-contre comporte, deux générateurs identiques de f.e.m E et de résistance interne r, une résistance variable x et un assemblage de résistances entre B et C.



1. Trouver la résistance R_{BC} équivalente à la portion (BC) du circuit.
2. Exprimer l'intensité du courant traversant la résistance x en fonction de E, r, x et R_{BC}.
3. a) Trouver la puissance dissipée dans la résistance x.
   b) Pour quelle valeur de la résistance x cette puissance est-elle maximale ?

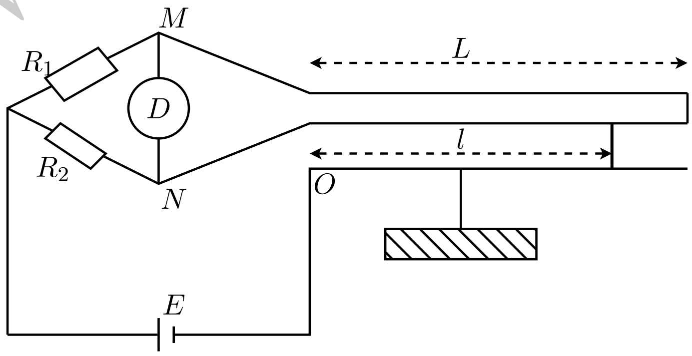
Solution Exercice V.2



1) La résistance équivalente à R et $2R$ (en parallèle) est $R_1 = 2R^2/3R = 2R/3$.
La résistance équivalente à R et R_1 (en série) est $R_2 = R + 2R/3 = 5R/3$.
La résistance équivalente à $3R$ et R_2 (en parallèle) est $R_{BC} = (3R \times 5R/3) / (3R + 5R/3) = 15R/14$ A.N. $R_{BC} = 15\,\Omega$.
2) Les deux générateurs identiques en parallèle sont équivalent à un seul générateur de même f.e.m E et de résistance interne $r/2$. Cette résistance est en série avec x et R_{BC}. Le circuit équivalent est représenté dans la figure ci-contre où $R_{eq} = x + R_{BC} + r/2$. Le courant I est celui qui traverse la résistance x :
$V_A - V_B + V_B - V_A = 0 \Rightarrow -E + R_{eq}I = 0 \Rightarrow I = E/R_{eq} = E/\left(x + R_{BC} + r/2\right)$
3-a) $P_x = xI^2 = E^2x/\left(x + R_{BC} + r/2\right)^2$
3-b) $dP/dx = E^2\left(\frac{(x+R_{BC}+r/2)^2-2x(x+R_{BC}+r/2)}{(x+R_{BC}+r/2)^4}\right) = E^2\left(\frac{(x+R_{BC}+r/2)(-x+R_{BC}+r/2)}{(x+R_{BC}+r/2)^4}\right)$
Le maximum correspond à $dP/dx = 0 \Rightarrow x = R_{BC} + r/2 = 15.5\,\Omega$. La deuxième solution $x = -\left(R_{BC} + r/2\right)$ n'est pas acceptable.

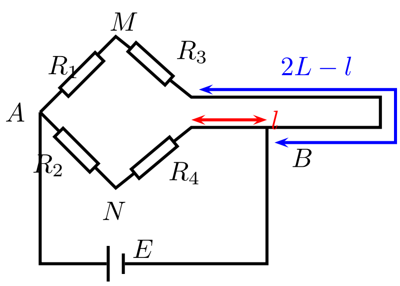
Exercice V.3

On utilise un « pont de Weatstone » muni d'un détecteur D (figure ci-dessous) pour localiser un défaut dans un câble électrique souterrain, formé de deux fils conducteurs de longueur L chacun et de résistance λ par unité de longueur. Pour cela, on relie les fils l'un à l'autre à l'une des extrémités et on monte à l'autre extrémité le dispositif de détection. Le défaut situé à la distance l de O est par exemple provoqué par la mise accidentelle du fil en contact avec la gaine protectrice reliée à la terre. Trouver la distance l connaissant R_1 et R_2 à l'équilibre du pont (le détecteur de courant D indique $I_D = 0$). A. N. : $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $L = 20\,\text{km}$.



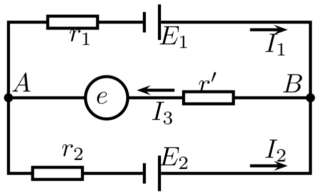
Solution Exercice V.3

Le défaut est situé au point B. C'est un contact entre le fil et la terre qui est liée à la borne négative du générateur. Soit R_3 la résistance correspondant



à $L + (L - l)$: $R_3 = \lambda\,(2L - l)$. Soit R_4 la résistance correspondant à l :
$R_4 = \lambda l$.
$I_D = 0 \Rightarrow V_M = V_N$. On aura donc
$R_1 I_1 = R_2 I_2$ et $R_3 I_1 = R_4 I_2 \Rightarrow R_1/R_3 = R_2/R_4 \Rightarrow R_1 \lambda l = R_2 \lambda\,(2L - l) \Rightarrow l = 2L \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
A.N. $l = 15\,\mathrm{km}$

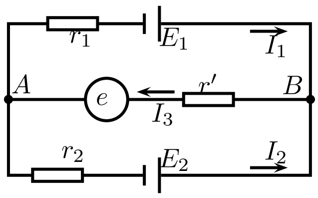
Exercice V.4



On considère le circuit de la figure ci-contre comportant un générateur de f.e.m $E_1 = 100\,\mathrm{V}$ et un générateur réversible de f.e.m $E_2 = 50\,\mathrm{V}$, de résistances internes respectives $r_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $r_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$ et un récepteur de f.c.e.m e et de résistance interne $r' = 100\,\Omega$.

1. Établir les expressions des intensités des courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans les différentes branches du circuit.
2. Quelle condition doit vérifier la f.c.e.m e du récepteur pour que le dispositif puisse fonctionner ?
3. Calculer I_1, I_2 et I_3 pour $e = 60\,\mathrm{V}$.
4. L'élément de f.e.m E_2 fonctionne-t-il comme générateur ou comme récepteur ? Justifier votre réponse.

Solution Exercice V.4



1. Utilisons le fait que $(V_A - V_B)$ soit la même pour chacune des trois branches entre les nœuds A et B.
Branches 1 et 2 : $r_1 I_1 - E_1 = r_2 I_2 - E_2$
Branches 1 et 3 : $r_1 I_1 - E_1 = -e - r' I_3$
Loi des nœuds : $I_1 + I_2 = I_3$
Réécrivons les deux premières équations en remplaçant I_3 par $I_1 + I_2$

$$r_1 I_1 - r_2 I_2 = E_1 - E_2$$
$$\left(r_1 + r'\right) I_1 + r' I_2 = E_1 - e$$

Par élimination, on trouve
$I_1 = (E_1 - E_2)\, r' + (E_1 - e)\, r_2 / \left(r_1 r' + r_1 r_2 + r' r_2\right)$
$I_2 = -\,(E_1 - E_2)\,(r_1 + r') + (E_1 - e)\, r_1 / \left(r_2 r_1 + r_2 r' + r_1 r'\right)$

En simplifiant, on a

$$I_1 = \frac{(r_2 + r')\,E_1 - r'E_2 - er_2}{r_1 r_2 + r_1 r' + r_2 r'}$$
$$I_2 = \frac{-r'E_1 + (r_1 + r')\,E_2 - er_1}{r_1 r_2 + r_1 r' + r_2 r'}$$
$$I_3 = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2 - e\,(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 + r_1 r' + r_2 r'}$$

2) Il faut que le courant qui traverse le récepteur soit positif : $I_3 > 0 \Rightarrow e < 83\,\mathrm{V}$.

3) $e = 60\,\mathrm{V} > e_2 \Rightarrow I_2 < 0$. Le calcul donne $I_1 = 0.83\,\mathrm{mA}$, $I_2 = -0.15\,\mathrm{mA}$, $I_3 = 0.68\,\mathrm{mA}$.

4) E_2 fonctionne comme récepteur car le courant réel entre par la borne positive de ce générateur ($I_2 < 0$).

Remarque supplémentaire :

Expliquons plus en détail la question 2 en considérant les cas suivants :

$I_1 > 0 \Rightarrow e < (1 + r'/r_2)\,E_1 - r'/r_2 E_2 \Rightarrow e < e_1$ avec $e_1 = E_1 + (E_1 - E_2)\,r'/r_2 = 102.5\,\mathrm{V}$

$I_2 > 0 \Rightarrow e < -r'/r_1 E_1 + (1 + r'/r_1)\,E_2 \Rightarrow e < e_2$ avec $e_2 = E_2 - (E_1 - E_2)\,r'/r_1 = 45\,\mathrm{V}$

$I_3 > 0 \Rightarrow e < (r_2 E_1 + r_1 E_2)\,/\,(r_1 + r_2) \Rightarrow e < e_3$ avec $e_3 = E_1 - (E_1 - E_2)\,r_1/\,(r_1 + r_2) = 83\,\mathrm{V}$

Le tableau suivant considère tous les cas :

	$e > 102.5$	$102.5 > e > 83$	$83 > e > 45$	$45 > e$
I_1	< 0	> 0	> 0	> 0
I_2	< 0	< 0	< 0	> 0
I_3	< 0	< 0	> 0	> 0
	Impossible	Impossible	Possible	Possible

Le cas $e > 102.5$ est impossible car les deux générateurs fonctionnent en récepteur (pas de générateur dans le circuit). Le cas $102.5 > e > 83$ est impossible car $E_1 > E_2$, $r_1 < r_2$ et la d.d.p V aux bornes des deux générateurs est la même. Par conséquent, $|I_1| > |I_2| \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 > 0$ contrairement au résultat du tableau.

Exercice V.5

On considère le circuit électrique représenté sur la figure I ci-dessous.

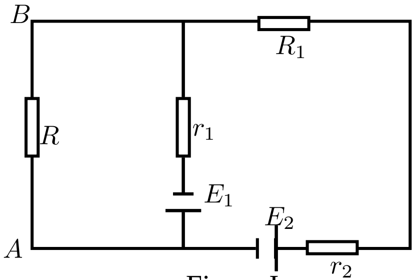


Figure I

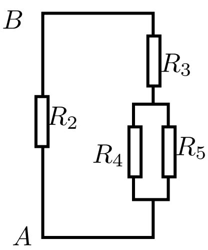


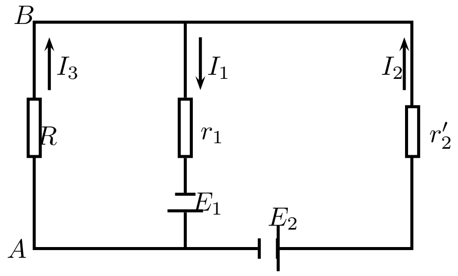
Figure II

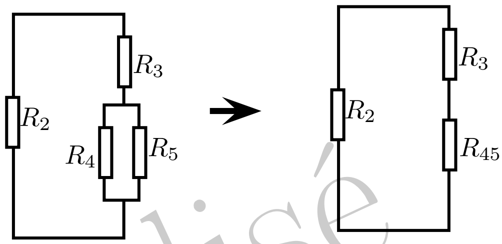
A.N. $E_1 = 12\,\mathrm{V}$, $E_2 = 6\,\mathrm{V}$, $r_1 = r_2 = 2\,\Omega$, $R = 5\,\Omega$, $R_1 = 10\,\Omega$.
$R_2 = 10\,\Omega$, $R_4 = R_5 = 4\,\Omega$.

1. Calculer les intensités des courants I_1, I_2 et I_3 circulant respectivement dans les résistances r_1, r_2 et R.
2. La résistance R est, en réalité, constituée par l'association de résistances comme l'indique la figure II.
   a) Calculer la résistance R_3.
   b) Déterminer la puissance dissipée dans la résistance R_3.

Solution Exercice V.5

Remplaçons les résistances r_2 et R_1 par la résistance équivalente $r_2' = r_2 + R_1$





On calcule $(V_A - V_B)$ dans les trois branches :
Branches 1 et 3 : $-E_1 + I_1 r_1 = -RI_3$
Branches 2 et 3 : $I_2 r_2' + E_2 = -RI_3$
Loi des nœuds : $I_1 = I_3 + I_2 \Rightarrow I_3 = I_1 - I_2$
En éliminant I_3, le système devient :

$$\begin{aligned}(r_1 + R)\, I_1 - RI_2 &= E_1\\ -RI_1 + \left(R - r_2'\right) I_2 &= E_2\end{aligned}$$

La solution est :

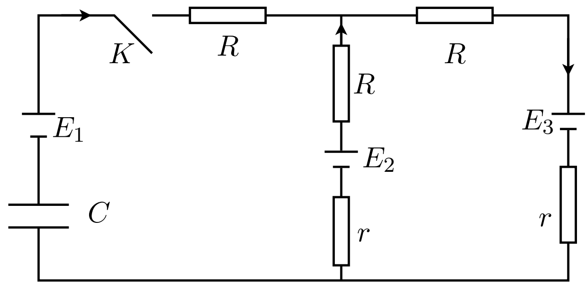
$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{(r_2' - R)\, E_1 - RE_2}{Rr_2' - Rr_1 + r_1 r_2'}\\ I_2 &= \frac{-RE_1 - (R + r_1)\, E_2}{Rr_2' - Rr_1 + r_1 r_2'}\\ I_3 &= \frac{r_2' E_1 + r_1 E_2}{Rr_2' - Rr_1 + r_1 r_2'}\end{aligned}$$

2-a) $R_4 = R_5 \Rightarrow R_{45} = R_4/2$
(R_3 et R_{45} en série) et R_2 en parallèle $\Rightarrow R = \frac{R_2(R_3 + R_4/2)}{R_2 + R_3 + R_4/2}$, Donc $R_3 = \frac{2RR_2 + RR_4 - R_2R_4}{-2R + 2R_2}$

2-b) $P = R_3 I^2 = R_3 \left(\frac{(V_A - V_B)}{R_3 + R_4/2}\right)^2 = R_3 \left(\frac{R I_3}{R_3 + R_4/2}\right)^2$

Exercice V.6

Soit le circuit électrique de la figure ci-dessous comportant trois générateurs réversibles de résistances internes r. On donne : $E_1 = 2E_2 = 3E_3 = 12\,\mathrm{V}$, $r = 15\,\Omega$, $R = 3r$ et $C = 10\,\mu\mathrm{F}$. A l'instant $t = 0\,\mathrm{s}$, on ferme l'interrupteur K.



Partie I — Le condensateur C étant entièrement chargé

1. Calculer les intensités des courants électriques débités par les générateurs en respectant les sens donnés sur le schéma du circuit.
2. Quelle est la charge Q_0 du condensateur ? Déduire alors la d.d.p aux bornes du condensateur.
3. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur ?
4. Quels sont les générateurs qui fonctionnent comme des récepteurs ?
5. Établir le bilan d'énergie du circuit.

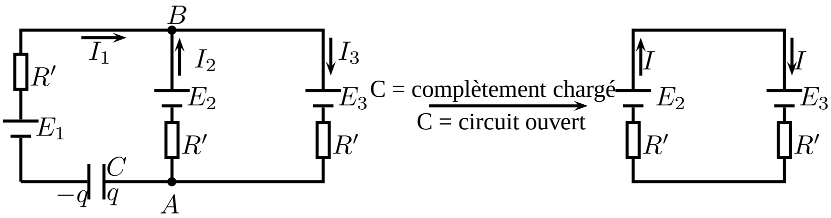
Partie II — Étude du régime transitoire

Le condensateur étant initialement entièrement déchargé, on ferme alors l'interrupteur K à $t = 0\,\mathrm{s}$.

1. Donner l'équation différentielle qui régit l'évolution de la charge $q(t)$ au cours du temps.
2. Déterminer l'expression de $q(t)$.
3. Au bout de combien de temps le condensateur est-il chargé à 99.9 % ?
4. faire le bilan d'énergie du circuit.

Solution Exercice V.6

Remplaçons R et r par $R' = R + r = 4r$ dans chaque branche. Les équations se simplifient énormément en y écrivant directement $3E$ au lieu de E_1 et $\frac{3}{2}E$ au lieu de E_2 ($E = E_3$). Nous ne l'avons pas fait en préférant une présentation générale.



I) Le condensateur est entièrement chargé :

1. Le condensateur étant complètement chargé, le courant I_1 est nul et le circuit correspondant devient ouvert. Le circuit global se réduit à une seule maille comme représentée dans le schéma. Donc $I_2 = I_3 = I$. Calculons $(V_A - V_B)$ dans les branches 2 et 3 :
$R'I - E_2 = -R'I - E_3$, ce qui donne un courant positif (réel) $I = (E_2 - E_3)/2R' = E_3/4R' = E_3/16r$. A.N. $I = 0.05\,\text{A}$.
2. Calculons $(V_A - V_B)$ dans les branches 1 et 2 :
$Q_0/C - E_1 + R'I_1 = R'I_2 - E_2$ avec $I_1 = 0$ et $I_2 = I$. Donc $Q_0 = C\left(E_1 - \frac{1}{2}E_2 - \frac{1}{2}E_3\right) = (7/4)\,E_3 C = 7\,10^{-5}\,\text{C}$.
La d.d.p aux bornes du condensateur est $V_0 = Q_0/C = (7/4)\,E_3 = 7\,\text{V}$.
3. $U_0 = (1/2)\,V_0^2 C = 24.5\,10^{-5}\,\text{J}$
4. E_3 fonctionne en récepteur car le courant réel I entre par sa borne positive.
5. Bilan d'énergie :
Puissance fournie par E_2 : $P_2 = E_2 I = 0.3\,\text{W}$
Puissance reçue par E_3 : $P_3 = E_3 I = 0.2\,\text{W}$
Puissance dissipée par effet Joule : $P_J = P_2 - P_3 = 2R'I^2 = 0.1\,\text{W}$

II) Étude du régime transitoire ($i_1 \neq 0$) :

1. Équation différentielle : Calculons $(V_A - V_B)$
Branches 1 et 2 : $q/C - E_1 + R'i_1 = R'i_2 - E_2$ (1)
Branches 2 et 3 : $R'i_2 - E_2 = -R'i_3 - E_3$ (2)
Loi des nœuds : $i_1 + i_2 = i_3$ (3)
On doit chercher le courant dans **la branche du condensateur** : $i_C = i_1 = dq/dt$ (4)
Remplaçons i_3 dans (2) pour obtenir :
Branches 1 et 2 : $q/C + R'i_1 - R'i_2 = E_1 - E_2$ (1')
Branches 2 et 3 : $R'i_1 + 2R'i_2 = E_2 - E_3$ (2')
Éliminons i_2 en calculant $2 \times (1') + (2')$. On obtient
$\frac{3}{2}R'i_1 + \frac{q}{C} = E_1 - \frac{1}{2}(E_2 + E_3)$
En utilisant l'équation (4), on arrive à $dq/dt + q/\tau = E/R_1$ où $\tau = (3/2)\,R'C = 6rC$, $R_1 = (3/2)\,R' = 6r$ et $E = E_1 - \frac{1}{2}(E_2 + E_3) = (7/4)\,E_3$
2. L'équation sans second membre $(dq/dt + q/\tau = 0)$ a pour solution $q_s = A\exp(-t/\tau)$

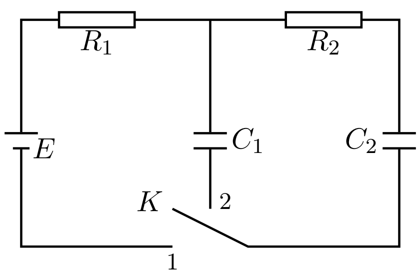
La solution particulière q_p correspond à la charge finale atteinte quand $i_1 = dq/dt = 0$. Cette charge a déjà été calculée dans (I-2). On peut la retrouver aussi à partir de l'équation différentielle $q_p/\tau = E/R_1 \Rightarrow q_p = CE = Q_0$.
La solution générale est $q(t) = q_s + q_p = Ae^{-t/\tau} + CE$. La charge initiale étant nulle $q(0) = 0 \Rightarrow A = -CE$. On a :

$$q(t) = EC\left(1 - \exp\frac{-t}{\tau}\right); \quad \tau = 6rC, \quad E = \frac{7}{4}E_3$$

3. L'équation $q(t) = \alpha EC$ où $\alpha = 0.999$ devient $1 - \alpha = \exp(-t/\tau) \Rightarrow t = -\tau \ln(1-\alpha)$
A.N. $\tau = 0.3\,\text{ms} \Rightarrow t = 2.3\tau = 0.69\,\text{ms}$
4. Bilan :
Énergie fournie par E_1 : $W_1 = Q_0E_1 = 3Q_0E_3$, $W_1 = 0.84\,\text{mJ}$
Énergie emmagasinée dans le condensateur : $U_C = \frac{1}{2}Q_0V_0 = \frac{7}{8}Q_0E_3 = 0.245\,\text{mJ}$
Énergie $W_{2,3}$ utilisée dans E_2 et E_3 : Comme la charge Q_0 est transportée par i_1, les courants $i_2 = \frac{E_2-E_3}{2R'} - \frac{i_1}{2}$ et $i_3 = i_1 + i_2 = \frac{E_2-E_3}{2R'} + \frac{i_1}{2}$ montrent que la moitié de la charge Q_0 a traversé E_2 et l'autre moitié a traversé E_3. Par conséquent,
$W_{2,3} = \frac{1}{2}Q_0E_2 + \frac{1}{2}Q_0E_3 = \frac{5}{4}Q_0E_3$, $W_{2,3} = 0.35\,\text{mJ}$
Énergie dissipée par effet Joule : $W_J = W_1 - U_C - W_{2,3} = \frac{7}{8}Q_0E_3 = U_C$, $W_J = 0.245\,\text{mJ}$.
Vérification :
Le courant $i_1(t) = dq/dt = \frac{Q_0}{\tau}\exp\frac{-t}{\tau}$ traverse la résistance R' de la branche 1, sa moitié $(i_1/2)$ traverse R' dans la branche 2 et l'autre moitié traverse R' dans la branche 3. On ne prend pas en considération le bilan du courant permanent $\frac{E_2-E_3}{2R'} = I$ car il a déjà été établi dans la première partie (I.5). Donc,
$W_J = \int_0^\infty R' i_1^2 dt + \int_0^\infty R'\left(\frac{i_1}{2}\right)^2 dt + \int_0^\infty R'\left(\frac{i_1}{2}\right)^2 dt = \frac{3R'}{2}\int_0^\infty i_1^2 dt$
$W_J = \frac{3R'}{2}\left(\frac{Q_0}{\tau}\right)^2 \int_0^\infty \left(\exp\frac{-t}{\tau}\right)^2 dt = \frac{3R'}{2}\left(\frac{Q_0}{\tau}\right)^2 \frac{1}{2}\tau = \frac{Q_0^2}{2C}$
On retrouve bien $W_J = U_C = \frac{1}{2}Q_0V_0$

Exercice V.7

On considère le circuit de la figure ci-contre, formé d'un générateur de f.e.m E et de deux résistances R_1 et R_2 ; C_1 et C_2 sont les capacités de deux condensateurs initialement non chargés.



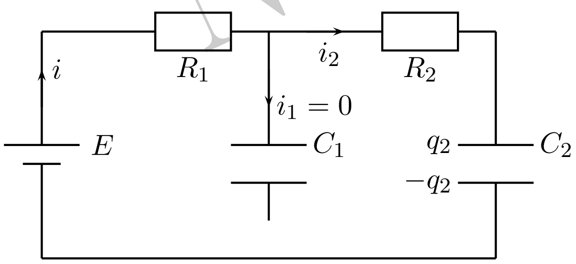
1. L'interrupteur K étant en position 1 :
   a) Établir l'équation différentielle régissant la charge du condensateur C_2.
   b) En déduire l'expression de la charge $q_2(t)$ et celles des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ traversant respectivement les résistances R_1 et R_2.
2. Le condensateur C_2 étant entièrement chargé :

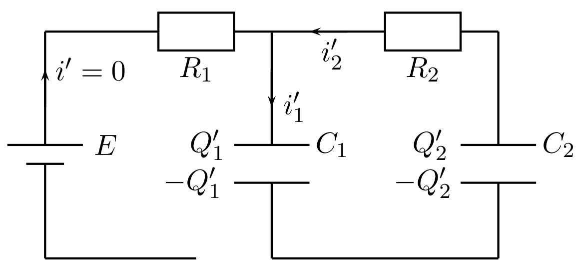
a) Quelle est l'énergie W_G fournie par le générateur ?
b) Quelle est l'énergie W_{C_2} emmagasinée par C_2 ?
c) Quelle a été l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans le réseau ?
d) Quelles sont les charges Q_1 et Q_2 respectives de C_1 et C_2 ?

3. Le condensateur C_2 étant toujours entièrement chargé, on met l'interrupteur K en position 2, déterminer à l'état d'équilibre final :
   a) Les charges Q'_1 et Q'_2 de C_1 et C_2, respectivement.
   b) Les énergies W'_{C_1} et W'_{C_2} emmagasinées respectivement par C_1 et C_2.
   c) En déduire l'énergie W'_J dissipée dans le réseau.

Solution Exercice V.7

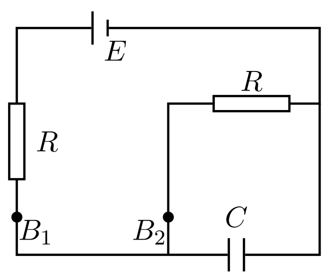
1.a. K en 1 : un seul courant $i_1 = 0\,\text{A} \implies i = i_2 = dq_2/dt$. Résistance équivalente $R = R_1 + R_2$.
Loi des mailles : $-E + Ri_2 + q_2/C_2 = 0$. D'où $dq_2/dt + q_2/\tau = E/R$ avec $\tau = RC_2$.
1.b. $q_2(t) = Ae^{-t/\tau} + B$. Avec $q_2(0) = 0C \implies A = -B$. La constante $B = Q_{2f} = q_{2p}$ correspond à la charge complète Q_{2f} ou la solution particulière q_{2p} et se détermine par $i_2 = dq_{2p}/dt = 0\,\text{A}$.
Donc $-E + R \times 0 + Q_{2f}/C_2 = 0$. Soit $B = Q_{2f} = q_{2p} = EC_2$ et $q_2(t) = EC_2(1 - e^{-t/\tau})$
$i_1 = 0\,\text{A}$ et $i_2 = dq_2/dt = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$
2.a. $W_G = EQ_{2f} = E^2C_2$. 2.b. $W_{C_2} = \frac{Q_{2f}^2}{2C} = \frac{1}{2}E^2C_2$. 2.c. $W_J = W_G - W_{C_2} = \frac{1}{2}E^2C_2$. 2.d. $Q_1 = 0\,\text{C}$ et $Q_2 = EC_2$.
3.a. Équilibre : $i'_2 = 0\,\text{A}$. Loi des mailles $-Q'_2/C_2 + R_2 \times 0 + Q'_1/C_1 = 0$. Conservation de la charge $Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = EC_2$. La solution des deux équations est $Q'_1 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E$ et $Q'_2 = \frac{C_2^2}{C_1+C_2}E$.
3.b. $W'_{C_1} = \frac{Q_1'^2}{2C_1} = \frac{C_1C_2^2}{2(C_1+C_2)^2}E^2$, $W'_{C_2} = \frac{Q_2'^2}{2C_2} = \frac{C_2^3}{2(C_1+C_2)^2}E^2$. Comme C_2 joue le rôle d'un générateur $W'_J = W'_{C_2} - W'_{C_1} = \frac{C_2^2(C_2-C_1)}{2(C_1+C_2)^2}E^2$





Exercice V.8

Détermination de la vitesse d'un projectile.



On considère le circuit ci-contre dans lequel E est un générateur continu de f.e.m $300\,\mathrm{V}$, r et R des résistances de valeurs respectives $5000\,\Omega$ et $10000\,\Omega$ et C un condensateur de capacité $0.3\,\mu\mathrm{F}$.
B_1et B_2 sont deux points séparés par une distance de $4\,\mathrm{cm}$.

1. Initialement, la capacité est supposée entièrement chargée. Calculer la d.d.p et la charge aux bornes du condensateur.
2. Un projectile coupe successivement les deux fils aux points B_1 et B_2 et, pendant le temps mis pour aller de B_1 à B_2, le condensateur se décharge partiellement dans la résistance R. La différence de potentiel entre ses armatures diminue ainsi de $12\,\mathrm{V}$. Quelle est, en m/s, la vitesse du projectile entre B_1 et B_2 ?
3. On réalise la mesure de B_1B_2 à $\pm 1\,\mathrm{mm}$ et celles des tensions initiale et finale aux bornes de C à $\pm 0.1\,\mathrm{V}$. Quelle incertitude relative résulte-t-il sur la détermination de la vitesse ? (négliger les incertitudes sur C et R).

Solution Exercice V.8

1. Charge complète : $I_C = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 = I$. Les d.d.p aux bornes du condensateur et de la résistance R sont égales. Par conséquent,
$V_0 = RI = RE/(R + r) = 2E/3 = 200\,\mathrm{V}$
$Q_0 = VC = 60\,\mu\mathrm{C}$
2. On a une décharge du condensateur entre $t = 0\,\mathrm{s}$ (moment où B_1 est coupé) et t (moment où B_2 est coupé) :
$q(t) = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \Rightarrow V(t) = V_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ avec $\tau = RC = 3\,\mathrm{ms}$ et $V(t) = V = V_0 - 12 = 188\,\mathrm{V}$
Donc $\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) = \frac{V}{V_0} \Rightarrow t = \tau \ln(V_0/V) \Rightarrow v = \frac{d}{\tau \ln(V_0/V)} = 215.5\,\mathrm{m/s}$
3. $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \ln(V_0/V)}{|\ln(V_0/V)|} = 0.16\%$
La dérivée du logarithme $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \Delta(\ln x) = \ln(x + \Delta x) - \ln(x) = \frac{\Delta x}{x}$
$\Delta \ln(V_0/V) = \frac{\Delta(V_0/V)}{(V_0/V)} = \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{\Delta V}{V} \simeq 2\frac{\Delta V}{V_0}$
$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta d}{d} + \left|\frac{2}{\ln(V_0/V)}\right| \frac{\Delta V}{V_0} \simeq 4\%$

Solution des Exercices de la partie V

Dans ce corrigé, nous avons utilisé la convention suivante pour une résistance, un récepteur ou un condensateur placé entre A et B :
$V_A - V_B = RI$, e ou $\frac{q}{C}$ si le courant algébrique I circule de A vers B.
$V_A - V_B = -RI$, $-e$ ou $\frac{-q}{C}$ si le courant algébrique I circule de B vers A.
Pour un générateur :
$V_A - V_B = E$ si A est la borne positive. $V_A - V_B = -E$ si A est la borne négative.