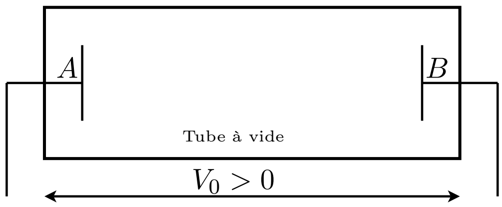
Quatrième partie

Courants Continus

Exercice IV.1

Partie I — Déplacement des électrons dans le vide

Dans un tube à vide se trouve deux plaques parallèles A et B, soumises à une différence de potentiel positif V_A–$V_B = V_0$ (voir figure ci-dessous). On considère que les électrons quittent la plaque B par effet thermoélectrique avec une vitesse supposée nulle.



1. Quelle est la nature du mouvement des électrons ?
2. Donner l'énergie cinétique des électrons lorsqu'ils atteignent A.

Partie II — Déplacement des électrons dans un milieu conducteur ; Loi d'Ohm

1. On considère un conducteur homogène de forme cylindrique et de section S. On soumet les deux extrémités A et B du cylindre à une d.d.p. V_0. On constate que le conducteur est traversé par un courant électrique d'intensité I donnée par : $I = V_0/R$ où R est une constante caractéristique du conducteur appelée résistance.
   a) Représenter les lignes de courant et montrer que le vecteur densité de courant est constant.
   b) Établir la relation qui lie le vecteur densité de courant au vecteur champ électrique .
   c) En déduire le vecteur vitesse de dérive des électrons dans le conducteur.
   d) Comparer au résultat obtenu dans la partie I.

Partie III — Déplacement des électrons dans un milieu conducteur ; Loi de Joule

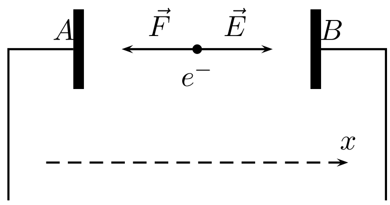
1. Lors de leur déplacement dans un conducteur, les électrons, de vitesse $\vec{v}$, sont soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, où k représente une constante caractéristique du matériau conducteur.
   a) Établir l'équation différentielle du mouvement des électrons soumis à la force électrique et la force de frottement.
   b) Vérifier que la fonction : $v = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$, est solution de l'équation précédente. Déterminer la vitesse limite v_{lim} et la constante de temps τ en fonction du champ électrique E, de la masse m de l'électron, de sa charge électrique e et du coefficient k.
   c) Déterminer le travail de la force de frottement lorsque l'électron se déplace de B à A. Sous quelle forme d'énergie se retrouve-t-il ?

d) Quelle est la puissance calorifique dégagée dans le conducteur lorsqu'il est parcouru par un courant I.

Solution Exercice IV.1

I) Déplacement des électrons dans le vide :

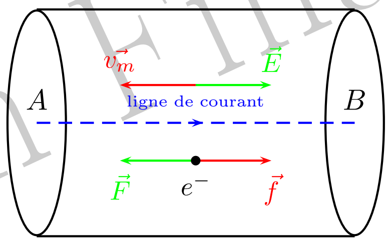
1) Les électrons sont soumis à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ où $q = -e$. Le poids des électrons est négligeable. Leur mouvement est donc accéléré de B vers A avec une accélération $\vec{a} = (q/m)\,\vec{E}$. Sachant que le champ est constant, on a $E = V_0/L$ et $a = -\left(eV_0/mL\right)$ où $L = AB$.



2) La force $\vec{F} = -q\vec{\nabla}V$ dérive d'un potentiel. Par conséquent, l'énergie totale de l'électron se conserve $E_T\,(B) = E_T\,(A)$ et nous avons

$E_c\,(A) + qV_A = E_c\,(B) + qV_B \Rightarrow E_c\,(B) = eV_0$ car $E_c\,(A) = 0$, $q = -e$ et $V_A - V_B = V_0$.

II) Déplacement des électrons dans un milieu conducteur. Loi d'Ohm :



1) Une ligne de courant d'une charge positive est dirigée du potentiel le plus élevé vers potentiel le plus bas. L'homogénéité du cylindre implique que ces lignes sont des droites parallèles à l'axe du cylindre.

2) Comme j et le champ E sont constants, la loi d'Ohm $V = RI$ peut s'écrire $EL = RjS$. D'où $j = (L/RS)\,E = \sigma E$. Cette relation s'écrit sous forme vectorielle, $\vec{i} = \sigma\vec{E}$ car la densité de courant et le champ ont la même direction et le même sens (la conductivité $\sigma = (L/RS)$ est l'inverse de la résistivité $\rho = 1/\sigma$).

3) On sait que $\vec{j} = -en\vec{v}$. Donc $-en\vec{v} = \sigma\vec{E}$, on trouve $\vec{v}_m = -\left(\sigma/ne\right)\vec{E} = -\left(L/RSne\right)\vec{E}$.

4) La vitesse v_m est constante dans un conducteur alors qu'elle augmente uniformément dans le vide.

III) Déplacement des électrons dans un milieu conducteur. Loi de Joule :

1) $\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$ où $\vec{F} = -e\vec{E}$ et $\vec{f} = -k\vec{v}$. Le mouvement étant rectiligne, la projection donne :

$-eE - kv = mdv/dt$ soit $dv/dt + kv/m = (-e/m)\,E$.

2) $dv/dt + (k/m)\,v = (v_{\text{lim}})\,[(1/\tau) - (k/m)]\,[\exp(-t/\tau)] + (k/m)\,(v_{\text{lim}}) = (-e/m)\,E$. L'égalité doit être vérifiée quelque soit le temps t. Le coefficient multiplié par l'exponentielle doit s'annuler ainsi que le terme indépendant du temps : $[(1/\tau) - (k/m)] = 0$ et $(k/m)\,(v_{\text{lim}}) = (-e/m)\,E$. On en déduit que $\tau = m/k$ et $v_{\text{lim}} = -\,(e/k)\,E$.
3) $\vec{f}$ est la seule force non conservative. Donc, $W_B^A\left(\vec{f}\right) = E_T(A) - E_T(B)$. Avec $E_T(A) = \frac{1}{2}mv_{\text{lim}}^2 - eV_A$ et $E_T(B) = -eV_B$, d'où $W_B^A\left(\vec{f}\right) = \frac{1}{2}mv_{\text{lim}}^2 - eV_0 = \frac{1}{2}m\left(e^2/k^2\right)E - eEL \simeq -eEL$. Ce travail se retrouve sous forme de chaleur (effet Joule).
Autres méthodes de calcul de $W_B^A\left(\vec{f}\right)$:
a) $W_B^A\left(\vec{f}\right) = \int_B^A -kvdx \simeq -kv_{\text{lim}}\,(x_A - x_B) = -eEL$ car v_{lim} est très rapidement atteinte (sur une très petite longueur) ce qui est négligeable dans l'intégrale de A à B (régime transitoire négligeable).
b) $W_B^A\left(\vec{f}\right) = \int_B^A -kvdx = \int_{t_B}^{t_A} -kv\frac{dx}{dt}dt = \int_{t_B}^{t_A} -kv^2dt = -kv_{\text{lim}}^2\int_0^{\frac{L}{v_{\text{lim}}}}(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau})dt$ car $t_B = 0\,\text{s}$ et $t_A \simeq \frac{L}{v_{\text{lim}}}$.
Remarque
En toute rigueur, on détermine t_A par $L = x_A - x_B = \int_0^{t_A} vdt = v_{\text{lim}}\int_0^{t_A}(1 - e^{-t/\tau})dt = v_{\text{lim}}\left[t_A + \tau(1 - e^{-t_A/\tau})\right]$. Cette équation est difficile mais elle montre que $L \simeq v_{\text{lim}}t_A$ car $t_A \gg \tau > \tau(1 - e^{-t_A/\tau})$.
4) $W_B^A\left(\vec{f}\right)$ est l'énergie calorifique dégagée par une seule charge dans le conducteur en un temps $T = -L/v_{\text{lim}}$. En ce temps N charges parcourent le conducteur avec $N = IT$. L'énergie dégagée par toutes ces charges est $W(N) = |NW_B^A\left(\vec{f}\right)|$ et la puissance est $P = |NW_B^A\left(\vec{f}\right)/T|$. Soit $P = eELI$.

Exercice IV.2

Un conducteur cylindrique en cuivre, de section $S = 1\,\text{mm}^2$ et de longueur $L = 10\,\text{m}$, est parcouru par un courant constant de $5\,\text{A}$.

1. Calculer le module du vecteur densité de courant.
2. Calculer le nombre d'électrons libres par unité de volume sachant qu'un atome de cuivre libère un électron.
   On donne : La masse atomique du cuivre $M = 64\,\text{g}$, sa masse volumique $\rho_{Cu} = 8900\,\text{kg/m}^3$ et le nombre d'Avogadro $N = 6.023 \times 10^{23}$.
3. Calculer la valeur de la vitesse de dérive des électrons libres.

Solution Exercice IV.2

1. $j = \frac{I}{S} = 5 \times 10^6\,\text{A.m}^{-2}$.
2. Nombre d'atomes $n_A = \frac{\rho_{Cu}}{M}N = 8.38 \times 10^{+28}\,\text{atom/m}^3$. $n = 8.38 \times 10^{+28}\,\text{e}^-/\text{m}^3$.
3. $j = nev$. Donc $v = \frac{j}{ne} = 3.73 \times 10^{-4}\,\text{m/s}$.

Exercice IV.3

Un cylindre homogène en argent, de diamètre d égal à 1.2 mm et de longueur l égale à 42 cm, est parcouru par un courant $I = 50\,\text{A}$ lorsque la d.d.p appliquée entre ses deux bases vaut $V = 0.3\,\text{V}$.

1. Calculer la conductivité σ de l'argent.
2. Sachant que chaque atome d'argent libère un électron pour la conduction, trouver 1e nombre n d'électrons libres par mètre cube. On rappelle que pour l'argent le nombre de masse est $A = 108$ et la masse volumique $\rho = 10.5\,\text{g/cm}^3$.
3. À partir de deux expressions différentes du vecteur densité de courant, trouver la vitesse de dérive des électrons de conduction.
4. Calculer la mobilité μ des porteurs de charges libres pour l'argent.

Solution Exercice IV.3

1) Pour un conducteur cylindrique homogène : $V = RI$ et $\sigma = l/RS$. Donc $\sigma = 4Il/\left(\pi V d^2\right) = 6.19 \times 10^7\,\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$.
2) $\rho = A\left(n_A/N_A\right)$ (N_A est le nombre d'Avogadro) et n_A est la densité d'atomes. Comme un atome libère un seul électron $n = n_A$, la densité électronique est $n = \rho N_A/A$.
3) En module, $j = env = I/S$ ce qui donne $v = IS/ne$. De même $j = env = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$, donc $v = \frac{\sigma V}{enL}$
4) $v = \mu E = \mu V/l$ donc $\mu = lv/V$.

Exercice IV.4

Un fil de cuivre, de section $S = 1\,\text{mm}^2$ et de longueur $1 = 58\,\text{cm}$, transporte une charge de 22500 C en 1 h15 mn. Le cuivre contient 8.4×10^{22} électrons par cm^3.

1. Quelle est l'intensité du courant qui parcourt le fil ?
2. Trouver la vitesse de dérive des électrons.
3. Au cours de leur mouvement, les électrons sont soumis, de la part des ions du réseau, à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$. Sachant que la constante k est égale à 3.7×10^{-17} (MKSA), calculer la résistance du fil de cuivre.

Solution Exercice IV.4

1) Courant : $I = q/t$. 2) Vitesse de dérive : $j = nev_m = I/S$ donc $v_m = I/(neS)$. 3) Résistance : $eE = kv_m$ avec $E = V/l = RI/l$. En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve $RIe/l = kI/(neS)$ et par conséquent $R = kl/\left(ne^2 S\right)$.

Exercice IV.5

Un solénoïde de longueur 10 cm porte 8 couches de spires circulaires de diamètre de 10 cm à raison de 2500 spires par mètre. Le fil est un conducteur dont la conductivité $\sigma = 10^8\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

1. Calculer la résistance du solénoïde.
2. Quelle est l'intensité du courant dans le solénoïde quand il est soumis à une d.d.p de 100 V ?

Solution Exercice IV.5

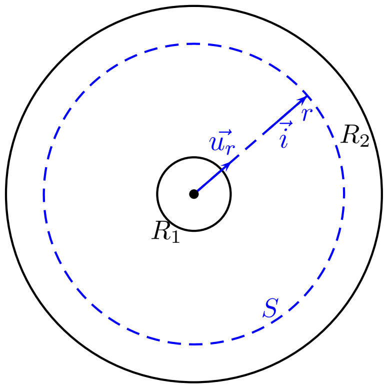
Le diamètre d'une spire, le nombre de couches, le nombre de spires par mètre et la longueur du solénoïde sont respectivement d, n_c, n_s et l.
1) $R = \rho\,(L/S)$ où $\rho = 1/\sigma$ et $L = (\pi d)\,n_c n_s l$.
2) $I = V/R$.

Exercice IV.6

1. On reprend les données de l'exercice III.9 :
   a) En utilisant la loi de joule locale ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$), déterminer la résistance de fuite.
   b) Quelle relation lie la capacité à la résistance de ce condensateur ?
2. On reprend ensuite l'exercice III.10 et on demande :
   a) En appliquant l'expression locale de la loi d'Ohm ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$) donner l'expression de la résistance de ce câble.
   b) Donner la relation liant la résistance à la capacité.

Solution Exercice IV.6

Loi d'Ohm $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$. Circulation du champ $V(B) - V(A) = -\int_A^B \frac{\vec{j}.\vec{dl}}{\sigma}$. On pose $\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{u}$ et on obtient $V(B) - V(A) = -I\int_A^B \frac{\vec{u}.\vec{dl}}{S\sigma}$. Donc $R = -\int_A^B \frac{\vec{u}.\vec{dl}}{S\sigma}$
1.a) Le courant de fuite et un courant radial qui passe de l'armature positive R_1 à l'armature négative R_2 à travers le diélectrique (de conductivité σ très faible). La densité de courant est radiale ($\vec{u} = \vec{u}_r$) et constante sur chaque surface sphérique $S = 4\pi r^2$ (de rayon r compris entre R_1 et R_2).



Par conséquent,

$$R = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\vec{u}_r.\vec{dl}}{\sigma S} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{\sigma 4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

1.b) Pour le conducteur sphérique $C = \varepsilon\frac{4\pi R_1R_2}{R_2-R_1}$. Donc $\frac{C}{R} = (4\pi)^2\frac{\varepsilon}{\rho}$.
2.a) En utilisant les coordonnées polaires dans la base du cylindre, la figure précédente représente maintenant un plan parallèle à cette base. La densité de courant est radiale dans ce plan ($\vec{u} = \vec{u}_r$) et constante sur chaque surface cylindrique $S = 2\pi rl$. Par conséquent,

$$R = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\vec{u}_r.\vec{dl}}{\sigma S} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{\sigma 2\pi rl} = \frac{\rho}{2\pi l}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

2.b) Pour le conducteur cylindrique $C = \varepsilon\frac{2\pi l}{\ln(R_2/R_1)}$. Donc $\frac{C}{R} = (2\pi)^2\frac{\rho}{\varepsilon}$.