Exercice 1 (5 points)

Une charge positive $Q = 2\,10^{-12}C$ est uniformément répartie (avec une densité λ) sur un demi-cercle de centre O et de rayon $R = 30\,cm$ comme indiqué sur la figure 1 ci-dessous :

1. Trouver l'expression puis calculer le champ électrique créé par cette distribution en O. (2 pts)

2. Trouver l'expression puis calculer le potentiel électrique au même point O. (1 pt)

3. Avec quelle énergie cinétique doit-on lancer une charge $q = 5C$ de $x = +\infty$ pour qu'elle s'arrête en O ? (1pt)

4. On place un dipôle $p = 2 \times 10^{-15}C.m$ en O, faisant un angle $\alpha = 60°$ avec l'axe $x'Ox$, après avoir enlevé la charge q. Calculer l'énergie potentiel de ce dipôle. (1pt)

Exercice 2 (6 points)

Une distribution de charge volumique uniforme ($\rho > 0$) crée un champ $\vec{E}$ parallèle à l'axe $x'Ox$ tel que :

$$E(x) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}\ pour\ x < -a; \qquad E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}\ pour\ -a < x < a; \qquad E(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0}\ pour\ x > a$$

1. Déterminer le potentiel $V_1(x)$ dans la région $-a < x < a$ sachant que $V_1(0) = 0V$. (1 pt)

2. Déterminer les potentiels $V_2(x)$ et $V_3(x)$ dans les deux autres régions $x > a$ et $x < -a$. (2 pts)

3. La charge est contenue entre deux plans infinis verticaux placés en $x = -a$ et $x = +a$ (région grise sur la figure 2). Utiliser la surface de Gauss cylindrique S_{G1} (d'axe parallèle à $x'Ox$) pour retrouver l'expression du champ dans la région extérieure aux charges ($x < -a$ et $x > a$). (1.5pts)

4. Même question pour la région intérieure ($-a < x < a$) et la surface de Gauss cylindrique S_{G2}. (1.5pts)

Exercice 3 (9 points)

Le circuit ci-dessous (figure 3) contient deux générateurs réversibles $E_1 = 12V$ et $E_2 = 8V$, de même résistance interne $r = 2.5\Omega$, un condensateur de capacité $C = 0.5\mu F$ et une résistance $R = 5\Omega$.

Régime stationnaire

1. Calculer le courant quand le condensateur est complètement chargé. (1pt)

2. Préciser le rôle du générateur E_2 puis faire un bilan de puissance. (2pts)

3. Calculer la charge finale Q du condensateur. (1pt)

Régime transitoire (charge)

4. Établir l'équation différentielle de la charge q du condensateur et calculer la constante de temps τ. (3pts)

5. Donner la solution de cette équation (sans aucun calcul). (0.5pts)

6. Calculer la l'énergie dissipée dans la résistance R entre $t = 0s$ et $t = \tau$. (1.5pts)

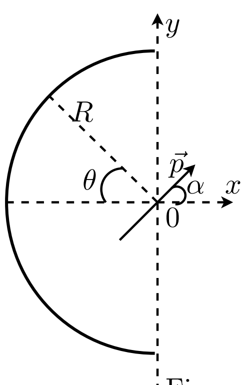

Figure 1

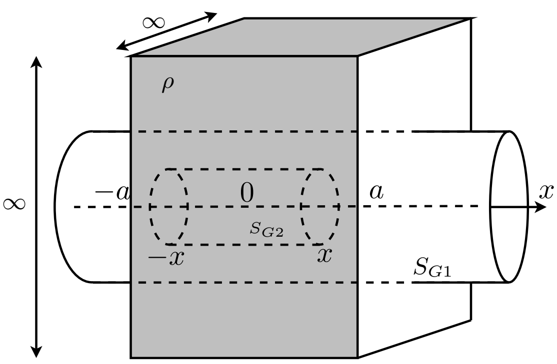

Figure 2

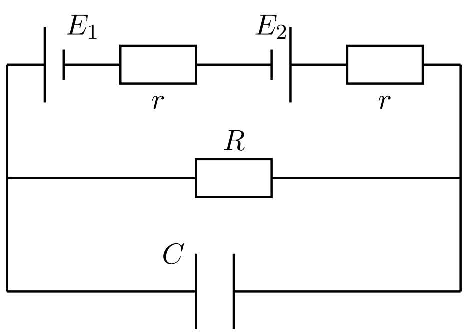

Figure 3

Exercice 1

1. $d\vec{E} = K\frac{dq}{R^2}\vec{u} = K\frac{dq}{R^2}\cos\theta\vec{i} - K\frac{dq}{R^2}\sin\theta\vec{j}$ (0.5). $E_y = 0$ à cause de la symétrie (0.5).

$dq = \lambda R d\theta \implies E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K\frac{\lambda\cos\theta}{R}d\theta = \frac{2K\lambda}{R}$ (0.5). $Q = \lambda 2\pi R$ donc $E_x = K\frac{Q}{\pi R^2} = 0.06V/m$ (0.5)

2. $dV = K\frac{dq}{R}$ (0.5) $\implies V = K\frac{Q}{R} = 0.06V$ (0.5)

3. Force conservative : $E_T(\infty) = E_T(0)$ (0.5) $\implies E_c(\infty) = E_p(0) = K\frac{Qq}{R} = 0.3J$ (0.5)

4. $E_p = -\vec{p}.\vec{E}$ (0.5) soit $E_p - pE\cos\alpha = -6\times 10^{-17}J$ (0.5)

Exercice 2

1. Région $-a < x < a$: $V_1(x) = -\int\frac{\rho x}{\epsilon_0}dx = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + C$. (0.5). $V_1(0) = C = 0$ donc $V_1(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}$. (0.5)

2. Région $x > a$: $V_2(x) = -\int\frac{\rho a}{\epsilon_0}dx = -\frac{\rho a x}{\epsilon_0} + C$ (0.5). $V_1(a) = V_2(a) \implies V_2(x) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}(x - \frac{a}{2})$ (0.5)

Région $x < -a$: $V_3(x) = -\int -\frac{\rho a}{\epsilon_0}dx = \frac{\rho a x}{\epsilon_0} + C$(0.5). $V_1(-a) = V_3(-a) \implies V_3(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(x + \frac{a}{2})$ (0.5).

3. $\Phi = E_2S_2 + E_3S_3 = 2E_2S_2$ car $E_3 = -E_2$ et $S_3 = -S_2$ (0.5). $Q_{int} = \rho S_2 2a$ (0.5) $\implies E_2 = \frac{\rho a}{\epsilon_0} = -E_3$ (0.5)

4. $\Phi = ES + (-E)(-S) = 2ES$ (0.5). $Q_{int} = \rho S 2x$ (0.5) $\implies E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$ (0.5)

Exercice 3

Les deux générateurs sont équivalent à $E = E_1 - E_2 = 4V$ avec une résistance interne $2r = 5\Omega$.

1. Condensateur complètement chargé ($I_C = 0$) et $I = I_R$ (0.5). La maille donne $I = \frac{E}{2r+R} = 0.4A$ (0.5)

2. Le courant réel I entre par la borne positive de E_2. Il fonctionne en récepteur (0.5). Bilan :

$P_f = E_1 I = 4.8W$ (0.5), $P_u = E_2 I = 3.2W$ (0.5), $P_J = (2r+R)I^2 = 1.6W = P_f - P_u$ (0.5)

3. Maille (R,C) : $\frac{Q}{C} = RI$ (0.5), donc $Q = \frac{RE}{2r+R}C = 10^{-6}C$ (0.5)

Maille (I,I_R) : $2rI + RI_R = E$ (0.5). Maille (I_R,I_C) : $\frac{q}{C} - RI_R = 0$ (0.5). Nœud $I = I_R + I_C$ (0.5).

On doit chercher $I_C = \frac{dq}{dt}$ (0.5). On remplace I. Donc : Maille (I,I_R) : $2rI_C + (2r+R)I_R = E$. Maille (I_R,I_C) : $I_R = \frac{q}{RC}$. On remplace I_R et on obtient

Maille (I,I_R) : $2rI_C + (2r+R)\frac{q}{RC} = E \implies \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{2r}$ (0.5) où $\tau = \frac{2rR}{2r+R}C = 1.25\mu s$ (0.5).

4. $q(t) = Q(1 - e^{-t/\tau})$ (0.5)

5. $W_R = \int_0^\infty RI_R^2 dt$ (0.5) or $I_R = \frac{q}{RC}$ donc $W_R = \int_0^\tau \frac{Q^2}{RC^2}(1 - e^{-t/\tau})^2 dt$ (0.5), $W_R = \frac{Q^2\tau}{2RC^2}(4e^{-1} - e^{-2} - 1) = 1.68\,10^{-5}J$ (0.5)