**AHMED FIZAZI**
**Maître assistant chargé de cours**

# CAHIER

**De la**

# MECANIQUE DU POINT MATERIEL

**(Version en Français)**

## COURS SIMPLIFIES
## 100 EXERCICES CORRIGES

**(Enoncés en arabe et en français)**

## LEXIQUE DE TERMINOLOGIE

**(français-arabe, Arabe-français)**

**Destiné aux étudiants de première année de l'enseignement supérieur**

## LMD

**Science de la matière et sciences technologiques**

http://sites.google.com/site/fizaziphysique
http://sites.google.com/site/physiquefizazi

# Sommaire


Préface........................................................ ii
Introduction_Principales branches de la mécanique…................................ vii
Le programme……………………………………………………………….. ix
**I. RAPPELS MATHEMATIQUES**………………………………………….............. 1
**I-A. L'ANALYSE DIMENSIONNELLE**………………………………………….. 1
1. Les unités……………………………….............................................. 1
a. Les unités fondamentales……………………………………………...................... 1
b. Les unités dérivées………………………………………………...................... 1
c. Les unités secondaires………………………………………………..................... 1
d. Unité supplémentaire………………………………………………...................... 1
e. Les multiples et les sous multiples………………………………………………..... 1
2. Les équations aux dimensions…………………………………………………............ 2
a. Définition……………………………….............................................. 2
b. Quel est l'intérêt de cette expression ? …………………………………......... 2
c. Comment définir $\alpha, \beta, \gamma$ ? ……………………………………........................ 2
d. Généralisation…………………………………………………………………... 4
**EXERCICES 1.1 à 1.6**…………………………….................................... 5
**SOLUTION DES EXERCICES 1.1 à 1.6**………………………………… 7
I-B. **CALCUL D'INCERTITUDES**……………………………………………............... 9
1. La grandeur physique………………………………..................................... 9
2. Notion de mesure………………………………......................................... 9
3. Théorèmes des incertitudes ………………………………............................ 10
**EXERCICES 1.7 à 1.12**……………………………….............................. 13
**SOLUTION DES EXERCICES 1.7 à 1.12**……………………………… 14
II. **RAPPELS SUR LE CALCUL VECTORIEL**………………………………… 17
1. Grandeur scalaire……………………………………..................................... 17
2. Grandeur vectorielle……………………………………................................. 17
3. Représentation graphique d'un vecteur…………………………………......... 14
4. Le vecteur unitaire………………………………........................................... 17
5. La somme géométrique des vecteurs…………………………………................ 17
6. Les composantes d'un vecteur………………………………………..................... 20
7. Le produit scalaire…………………………………......................................... 23
8. Le produit vectoriel…………………………………....................................... 24
9. Le produit mixte……………………………………………………………… 26
10. Moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace……………………… 26
11. Moment d'un vecteur par rapport à un axe…………………………………… 26
12. Gradient, divergence, rotationnel…………………………………….................. 27
13. Le Laplacien……………………………………........................................... 29
**EXERCICES 2.1 à 2.7**………………………………………........................ 31
**SOLUTION DES EXERCICES 2.1 à 2.7**……………………………….. 33
III. **PRINCIPAUX SYSTEMES DE COORDONNEES**…………………………….. 36
1. Repères d'inertie galiléens………………………………………....................... 36
2. Principaux référentiels galiléens ……………………………………................. 36
3. Les coordonnées cartésiennes………………………………………................... 37
4. Les coordonnées polaires……………………………………………………… 38
5. Les coordonnées cylindriques……………………………………..................... 39
6. Les coordonnées sphériques……………………………………......................... 40

7. Les coordonnées curvilignes…………………………………….......................... 42
**EXERCICES 3.1 à 3.7**…………………………………….............................. 43
**SOLUTION DES EXERCICES 3.1 à 3.7……………………………………** 45
IV. **LA CINEMATIQUE**……………………………………........................... 51
A. Les caractéristiques du mouvement……………………………………............ 51
1. Introduction……………………………................................................. 51
2. Position du mobile………………………….......................................... 51
3. Les équations horaires…..………………………....................................... 52
4. Le vecteur vitesse……………………………........................................ 53
5. Le vecteur accélération……………………………………………………… 54
**EXERCICES 4.1 à 4.6**……………………………………....................... 57
**SOLUTION DES EXERCICES 4.1 à 4.6**…………………………………… 59
B. **LE MOUVEMENT RECTILIGNE**…………………………………….......... 64
1. Le mouvement rectiligne uniforme…………………………………............... 64
2. Le mouvement rectiligne uniformément accéléré……………………………… 65
3. Le mouvement rectiligne à accélération variable……………………………….. 66
4. Le mouvement rectiligne sinusoïdal………………………………….............. 67
**EXERCICES 4.8 à 4.13**……………………………………......................... 71
**SOLUTION DES EXERCICES 4.8 à 4.13**………………………………… 73
C. **LE MOUVEMENT PLAN**……………………………………....................... 77
1. Etude du mouvement en coordonnées polaires……………………………… 77
2. Les composantes normale et tangentielle de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet……………………………………………………………………. 79
**EXERCICES 4.14 à 4.21**……………………………………........................ 81
**SOLUTION DES EXERCICES 4.14 à 4.21……………………………..** 85
D. **LE MOUVEMENT DANS L'ESPACE……………………………………...** 93
1. Etude du mouvement en coordonnées cylindriques …………………………… 93
2. Etude du mouvement en coordonnées sphériques……………………………… 95
**EXERCICES 4.22 à 4.27**……………………………………....................... 99
**SOLUTION DES EXERCICES 4.22 à 4.27**…………………………… 102
E. **LE MOUVEMENT RELATIF**…………………………………….................... 108
1. Changement de repère……………………………...................................... 108
2. Vitesse relative de deux mobiles……………………………….................... 108
3. Conventions et symboles……………………………………........................ 110
4. Cas du mouvement de rotation……………………………………..................... 115
**EXERCICES 4.28 à 4.35**……………………………………........................ 120
**SOLUTION DES EXERCICES 4.28 à 4.35**…………………………….. 124
V. **LA DYNAMIQUE**……………………………………................................ 138
1. Principe d'inertie galiléen……………………………................................ 138
2. La quantité de mouvement……………………………................................ 138
3. Les autres lois de Newton……………………………................................. 139
4. Notion de force et loi de force……………………………………...................... 140
5. Mouvement d'un projectile dans le champ de gravitation terrestre…………….. 141
6. Loi de la gravitation universelle…………………………………………………… 142
7. Forces de liaison ou forces de contact ...…………………………………….. 145
8. Forces de frottement……………………………………………………………….. 145
9. Les forces élastiques……………………………………………………………… 147
10. Les forces d'inertie ou pseudo forces……………………………………….. 148
11. Moment d'une force………………………………………………………….. 150
12. Le moment cinétique…………………………………………………………. 152

**EXERCICES 5.1 à 5.20**…………………………………………………….. 156
**SOLUTION DES EXERCICES 5.1 à 5.20**………………………………… 167
VI. **TRAVAIL ET ENERGIE**……………………………………………………… 195
1. Travail et Puissance……………………………………………………….. 195
2. Energie cinétique………………………………………………………….... 198
3. Les force conservatives ou dérivant d'un potentiel…………………………..…. 199
4. Energie potentiel…………………...………………………………………… 200
5. Expression de champ de force conservative à partir de l'énergie potentielle dont il dérive………………………………………………………………………………. 203
6. L'énergie mécanique………………………………………………………… 205
7. Collision de particules……………………………………………………….. 209
8. Discussion des courbes de l'énergie potentielle……………………………… 211
9. Forces non conservatives…………………………………………………….. 213
**EXERCICES 6.1 à 6.15**…………………………………………………….. 214
**SOLUTION DES EXERCICES 6.1 à 6.15**………………………………… 221
**LEXIQUE DE TERMINOLOGIE FRANÇAIS-ARABE**………………………….. 239
**LEXIQUE DE TERMINOLOGIE ARABE-FRANÇAIS**…………………………... 246


**ANNEXES**


**1. Alphabet grec**……….………………………………………………………….. 253
**2. Gradient, divergence et Laplacien dans différentes coordonnées**…………….. 254
**3. Formules de dérivation**…………………………………………………………… 257
**4. Formules d'intégration**…………………………………………………………… 259
**5. Quelques équations différentielles**……………………………………………. 261
**6. Formulaire trigonométrique**…………………………………………………….. 263

**OUVRAGES**……………………………………………………………………………. 265

# B-I/ CALCUL DES INCERTITUDES
# حـــســاب الإرتـــيـــابــات

## 1/ La grandeur physique (المقدار الفيزيائي ):

Une grandeur physique est tout ce qui prend, dans des conditions bien déterminées, une valeur numérique définie qui peut varier (augmenter ou diminuer) si ces conditions elles mêmes varient.

## 2/ Notion de mesure (مفهوم القياس) :

De la mesure de toute grandeur physique ne peut résulter qu'une valeur approchée et ce pour les raisons suivantes :

- Les erreurs systématiques : Ce sont celles qu'entraîne l'emploi de méthodes ou d'instruments imparfaits.

Dans toutes les mesures précises, les erreurs systématiques sont autant que possible éliminées par un contrôle soigneux des instruments de mesure et, souvent aussi, par l'emploi successif de différentes méthodes.

- Les erreurs accidentelles qui sont imputables à l'imperfection des sens de l'opérateur. Ces erreurs peuvent être minimisées par le bon choix des méthodes de mesure appropriées, des instruments perfectionnés et en s'exerçant à la pratique des mesures.

En résumé le résultat de toute mesure comporte une erreur !!

Quelque soit la précision de la mesure d'une grandeur $X$, nous n'obtenons qu'une valeur approchée $x$. La différence entre la valeur exacte et la valeur approchée s'appelle **erreur absolue** (الخطأ المطلق ) qu'on désigne par $\delta x$ :

$$\boxed{\delta x = x - x_0} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Cette erreur est en général inconnue. Partant des caractéristiques de l'appareil utilisé et de la méthode utilisée, nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue sous le nom de **incertitude absolue** (إرتياب مطلق) de la grandeur $X$ .

$$\boxed{|\delta x| \leq \Delta x} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Nous déduisons que la valeur exacte est comprise entre deux valeurs limites connues : $x - \Delta x$ et $x + \Delta x$ .

Pour plus de précision, nous pouvons donner une définition mathématique à l'incertitude absolue en suivant le raisonnement suivant :

Soit une grandeur $X = f(x, y, z)$ où $x, y$ et $z$ représentent des grandeurs mesurables comportant des incertitudes.

L'incertitude absolue de $X$ , c'est-à-dire $\Delta X$ , est matérialisée par la différentielle $dX$ telle que $\Delta X \leq |dX|$.

Puisque le signe de l'erreur est inconnu il est tout à fait logique de prendre la valeur absolue pour les différentielles.

Sachant que $dX = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz$

L'incertitude absolue $\Delta X$ de $X$ s'écrit donc :

$$\boxed{\Delta X \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z} \qquad \textbf{(1.7)}$$

- **Définition** : On appelle **incertitude relative** (الإرتياب النسبي) d'une grandeur $X$ le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée, soit $\frac{\Delta X}{X}$**,** et elle est égale au module de la différentielle logarithmique :

$$\boxed{\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right|} \qquad \textbf{(1.8)}$$

## 3/ Théorème des incertitudes (نظرية الارتيابات):

- **Incertitude absolue d'une somme algébrique** (الارتياب المطلق لمجموع جبري):
  - **L'incertitude absolue d'une somme algébrique de nombres incertains est égale à la somme arithmétique des incertitudes absolues de ces nombres.**

Soit la somme algébrique : $y = nu + pv - qw + k$ où $n, p$ et $q$ sont des coefficients constants et positifs, k une constante sans incertitude et $\Delta u, \Delta v$ et $\Delta w$ les incertitudes absolues respectives de $u, v$ et $w$. L'incertitude absolue de $y$ est $\Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w$ .

$$\boxed{y = nu + pv - qw + k \Rightarrow \Delta y = |n|\Delta u + |p|\Delta v + |q|\Delta w} \qquad \textbf{(1.9)}$$

**Important** : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme :

$$\boxed{y_0 = (y \pm \Delta y)\,u} \qquad \textbf{(1.10)}$$

$y_0$ : valeur exacte $\quad$ $y$ : valeur approchée

$\Delta y$ : incertitude absolue $\quad$ $u$ : unité de la grandeur

**Exemple 1.6 :** En déterminant la masse $M$ par la méthode de la double pesée, on obtient $m_1 = 12.762g$ et $m_2 = 57.327g$ . Sachant que l'incertitude absolue sur $m_1$ et $m_2$ est de $\Delta m = \pm 2mg$ , calculer $M$ et $\Delta M$ .

**Réponse** :

$$M = m_2 - m_1 \Rightarrow M = 44.565g$$
$$\Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 4mg = 0.004g$$

Ainsi, le résultat s'écrit toujours sous la forme ci-dessous de telle façon que, le nombre de chiffres significatifs après la virgule dans la valeur approchée, soit le même que dans l'incertitude absolue.

$$\boxed{M = (44.565 \pm 0.004)g}$$

Tandis que l'incertitude relative sur $M$ est :

$$\frac{\Delta M}{M}=\frac{0.004}{44.565}\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{M}=9.10^{-5}}$$

ou

$$\frac{\Delta M}{M}=\frac{\Delta m_1+\Delta m_2}{m_2-m_1}\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{M}=9.10^{-5}}$$

❖ **L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient (الارتاب النسبي لجداء أو كسر)**

Nous devons distinguer deux cas :

**Premier cas : grandeurs indépendantes.**

**Enoncé du théorème :** L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient dont les grandeurs sont indépendantes les unes des autres est égale à la somme arithmétique des incertitudes relatives sur chaque terme.

**Preuve mathématique** :

Soit le produit $y=ku^n v^p w^{-q}$ où $n,p$ et $q$ sont des nombres réels et $k$ une constante connue avec exactitude ; les incertitudes absolues sur $u,v$ et $w$ sont respectivement $\Delta u$ , $\Delta v$ et $\Delta w$.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation

$$\log y=\log\left[ku^n v^p w^{-q}\right]$$

D'après les propriétés du logarithme nous pouvons écrire :

$$\log y=\log k+\ n\log u+p\log v-q\log w$$

Ecrivons à présent la différentielle logarithmique et développons ensuite :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+n\frac{du}{u}+p\frac{dv}{v}-q\frac{dw}{w}$$

Nous arrivons à l'expression de l'incertitude relative (après avoir changé le signe – en signe +) et en prenant l'incertitude absolue des nombres :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=|n|\frac{\Delta u}{u}+|p|\frac{\Delta v}{v}+|q|\frac{\Delta w}{w}} \qquad \textbf{(1.11)}$$

Nous retiendrons la règle générale qui gère ce type de calcul :

- Remplacer tous les symboles $di$ par $\Delta i$
- Changer le signe – par le signe +
- Prendre les grandeurs qui ne contiennent pas de $\Delta$ en valeurs absolues

**Deuxième cas : grandeurs dépendantes les unes des autres.**

Soit $$y=k\frac{u^\alpha v^\beta}{(u+v)^\gamma t^\delta}$$

En suivant la même démarche que précédemment nous obtenons :

$$\log y=\log k+\ \alpha\log u+\beta\log v-\gamma\log(u+v)-\delta\log t$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+\alpha\frac{du}{u}+\beta\frac{dv}{v}-\gamma\frac{du}{u+v}-\gamma\frac{dv}{u+v}-\delta\frac{dt}{t}$$

Factorisons tous les termes ayant le même $di$ et changeons le signe – par le signe + :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+du\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+dv\left(\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right)-\delta\frac{dt}{t}$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\left|\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right|\Delta u+\left|\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right|\Delta v+\left|\frac{\delta}{t}\right|\Delta t} \qquad \textbf{(1.12)}$$

**Exemple1.7 :** Calculer l'incertitude relative puis l'incertitude absolue de l'énergie électrique exprimée par la formule $Q=RI^2t$ .

**Réponse :** selon le théorème de l'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient, nous pouvons écrire :

$$Q=RI^2t \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}$$

Nous en déduisons l'expression de l'incertitude absolue sur $Q$ :

$$\Delta Q=Q\left(\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}\right)$$

# EXERCICES ** تـــمــــاريـــن

**Exercice 1.7**

Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieur $(D_1)$ et extérieur $(D_2)$ et on trouve :

$D_1 = (19,5 \pm 0,1)mm$ , $D_2 = (26,7 \pm 0,1)mm$

Donner le résultat de la mesure et sa précision.

**تمرين 7.1**

لقياس سمك اسطوانة مجوفة نقيس القطرين الداخلي $(D_1)$ و الخارجي $(D_2)$ فنجد:

$D_2 = (26,7 \pm 0,1)mm$ ، $D_1 = (19,5 \pm 0,1)mm$

إعط نتيجة القياس و دقته.

**Exercice 1.8**

Soit à déterminer la masse volumique $(\rho)$ de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse $(m)$ et de son arête $(a)$ . Ecrire le résultat de la mesure.

**التمرين 8.1**

نريد تعيين الكتلة الحجمية $(\rho)$ لمادة مكعب متجانس انطلاقا من قياس كتلته $(m)$ و ضلعه $(a)$.أكتب نتيجة القياس.

**Exercice 1.9**

La densité $(\delta)$ d'un corps solide par application du théorème d'Archimède est : $\delta = \dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$

Où $m_1, m_2, m_3$ sont les résultats de trois mesures de masses effectuées, successivement, avec la même balance. Trouver l'incertitude relative sur $\delta$ .

**التمرين 9.1**

الكثافة $(\delta)$ لجسم صلب بتطبيق نظرية أرخميدس هي : $\delta = \dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$

حيث $m_3, m_2, m_1$ تمثل نتائج ثلاث قياسات متتالية للكتل باستعمال نفس الميزان. جد الإرتياب النسبي لـــ $\delta$ .

**Exercice 1.10**

Calculer l'incertitude relative sur la mesure de la capacité $(C)$ d'un condensateur équivalent à deux condensateurs montés :

a/ en parallèle b/ en série , et cela en fonction des précisions sur $(C_1)$ et $(C_2)$ .

**التمرين 10.1**

أحسب الارتياب النسبي المرتكب على قياس السعة $(C)$ لمكثفة مكافئة لمكثفتين موصلتين على:

ا/ التفرع ب/ التسلسل ، و ذلك بدلالة الدقة على كل من $(C_1)$ و $(C_2)$.

**Exercice 1.11**

Soit l'expression : $\mu = \dfrac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1} - m_1$

Calculer l'incertitude absolue sur $\mu$ en fonction des incertitudes absolues $\Delta\theta_m, \Delta\theta_2, \Delta\theta_1, \Delta m_2, \Delta m_1$ .

**التمرين 11.1**

لتكن العبارة : $\mu = \dfrac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1} - m_1$

أحسب الارتياب المطلق على $\mu$ بدلالة الارتيابات المطلقة $\Delta\theta_m, \Delta\theta_2, \Delta\theta_1, \Delta m_2, \Delta m_1$ .

**Exercice 1.12**

Soit la relation : $y = y_0.e^{-wt}$ .

Calculer l'incertitude absolue sur $y$ en fonctions des incertitudes absolues $\Delta\omega, \Delta t, \Delta y_0$ .

**التمرين 12.1**

لتكن العلاقة : $y = y_0.e^{-wt}$

أحسب الارتياب المطلق على $y$ وذلك بدلالة الارتيابات المطلقة $\Delta y_0, \Delta t,, \Delta\omega$ .

## Corrigés des exercices 1.7 à 1.12: حلول التمارين من 7.1 إلى 12.1

### Exercice1.7 :

Calculons d'abord l'épaisseur du cylindre : $\boxed{e = \frac{D_2 - D_1}{2}}$ ; $\boxed{e=3,6mm}$

L'incertitude absolue sur l'épaisseur est donc : $\boxed{\Delta e = \frac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2}}$ ; $\boxed{\Delta e = \pm 0,1mm}$

Ecrivons le résultat de la mesure : $\boxed{e = (3,6 \pm 0,1)\,mm}$

Nous en déduisons l'incertitude relative : $\frac{\Delta e}{e} = \frac{0,1}{3,6} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta e}{e} = 0,03 = 3\%}$

### Exercice 1.8 :

Calcul de la masse volumique : $\boxed{\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}}$ $\boxed{\rho=3,041 g/cm^3}$

Nous déduisons l'incertitude absolue de l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \boxed{\Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}\right)} \quad \boxed{\Delta\rho \simeq 0,02\,g/cm^3}$$

D'où l'incertitude relative : $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0,0063 = 6,3\ ^0/_{00}$

Ecriture du résultat de la mesure : $\boxed{\rho = (3,04 \pm 0.02)\,g/cm^3}$

**Remarque importante :**

Le nombre des chiffres significatifs conservés dans un résultat ne doit jamais impliquer une précision supérieure à celle des données.

Un calcul ne peut qu'aboutir à un résultat dont l'incertitude sera au moins égale à celle de la donnée la moins précise.

### Exercice 1.9 :

Nous avons l'expression : $\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$

Remarquons que les trois masses sont dépendantes.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membre de l'équation :

$$\log\delta = \log(m_2 - m_1) - \log(m_3 - m_1)$$

Passons à la différentielle logarithmique :

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{d(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1} - \frac{d(m_3 - m_1)}{m_3 - m_1}$$

Développons : $\frac{d\delta}{\delta} = \frac{dm_2}{m_2 - m_1} - \frac{dm_1}{m_2 - m_1} - \frac{dm_3}{m_3 - m_1} + \frac{dm_1}{m_3 - m_1}$

Factorisons : $\frac{d\delta}{\delta} = dm_1\left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1}\right) + \frac{dm_2}{m_2 - m_1} - \frac{dm_3}{m_3 - m_1}$

Passons à présent aux incertitudes relatives, en remplaçant $di$ par $\Delta i$ et en changeant le signe $(-)$ des facteurs communs par le signe $(+)$ , et en supposant $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m$ (puisque nous utilisons la même balance). Il vient :

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \Delta m\left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1}\right) + \frac{\Delta m}{m_2 - m_1} + \frac{\Delta m}{m_3 - m_1}$$

Nous obtenons à la fin : $\boxed{\dfrac{\Delta\delta}{\delta} = \dfrac{2\Delta m}{m_3 - m_1}}$

**Exercice 1.10 :**

**a/ Groupement en parallèle :**

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en parallèle est donnée par la formule : $C = C_1 + C_2$.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

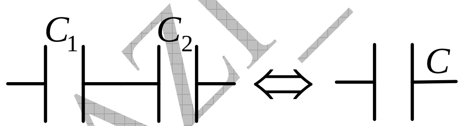
$$\log C = \log\left(C_1 + C_2\right) \Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1 + C_2} + \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

L'incertitude relative est donc :

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1 + C_2} + \frac{\Delta C_2}{C_1 + C_2}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1}\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{\Delta C_2}{C_2}\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)}$$

**b/ Groupement en série :**

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en série est donnée par la formule :




$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

$$\log C = \log\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \Rightarrow \log C = \log C_1 + \log C_2 - \log\left(C_1 + C_2\right)$$

L'incertitude relative est donc :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1} + \frac{dC_2}{C_2} - \frac{dC_1}{C_1 + C_2} - \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

Factorisons : $\dfrac{dC}{C} = dC_1\left(\dfrac{1}{C_1} - \dfrac{1}{C_1 + C_2}\right) + dC_2\left(\dfrac{1}{C_2} - \dfrac{1}{C_1 + C_2}\right)$

L'expression précédente peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1}\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{dC_2}{C_2}\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Finalement l'incertitude relative demandée est :

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C}=\frac{\Delta C_1}{C_1}\left|1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right|+\frac{\Delta C_2}{C_2}\left|1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right|}$$

**Exercice 1.11 :**

Ecrivons l'expression donnée sous la forme : $\mu+m_1=\frac{m_2\left(\theta_2-\theta_m\right)}{\theta_m-\theta_1}$

En introduisant la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons :

$$\log\left(\mu+m_1\right)=\log m_2+\log\left(\theta_2-\theta_m\right)-\log\left(\theta_m-\theta_1\right)$$

La différentielle logarithmique de l'expression précédente est :

$$\frac{d\left(\mu+m_1\right)}{\mu+m_1}=\frac{dm_2}{m_2}+\frac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\frac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$$

Ou bien : $\frac{d\mu}{\mu+m_1}=-\frac{dm_1}{\mu+m_1}+\frac{dm_2}{m_2}+\frac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\frac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$

C'est-à-dire :

$$d\mu=-dm_1\frac{\mu+m_1}{\mu+m_1}+dm_2\frac{\mu+m_1}{m_2}+d\theta_2\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}+d\theta_1\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}$$

Et en fin, l'incertitude absolue demandée est :

$$\boxed{\Delta\mu=+\Delta m_1+\Delta m_2\left(\frac{\mu+m_1}{m_2}\right)+\Delta\theta_2\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}\right)+\Delta\theta_m\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}+\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)+\Delta\theta_1\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)}$$

**Exercice 1.12 :**

Après introduction de la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons : $\log y=\log y_0+\log e^{-\omega t}$

Sa différentielle est :

$$\log y=\log y_0+\log e^{-\omega t}\Rightarrow\log y=\log y_0-\omega t$$

$$d\left(\log y\right)=d\left(\log y_0\right)-d\left(\omega t\right)$$

Posons $X=\omega t\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dt}{t}\Rightarrow dX=X\left[\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dt}{t}\right]$

D'où :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dy_0}{y_0}-\omega t\left(\frac{d\omega}{\omega}+\frac{dt}{t}\right)$$

On passe à l'incertitude relative pour en déduire l'incertitude absolue :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta y_0}{y_0}+\omega t\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}+\frac{\Delta t}{t}\right)\Leftrightarrow\Delta y=y\left[\frac{\Delta y_0}{y_0}+t\Delta\omega+\omega\Delta t\right]}$$

# II/ RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL
# تذكير بالحساب الشعاعي

## 1/ GRANDEUR SCALAIRE(المقدار السلمي)

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

**Exemple** : le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie…

## 2/ GRANDEUR VECTORIELLE(المقدار الشعاعي)

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

**Exemple :** le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique…

## 3/ REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN VECTEUR (التمثيل البياني لشعاع) :

Un vecteur est représenté par un segment orienté (figure2.1).

$\vec{V}$ : représente le vecteur (avec ses quatre caractéristiques).

$\left\|\vec{V}\right\| = \left|\vec{V}\right| = V$ : représente le module ou l'intensité du vecteur.

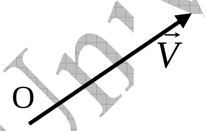



**Fig 2.1: représentation d'un vecteur**

## 4/ LE VECTEUR UNITAIRE (شعاع الواحدة): c'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre un).

On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{V} = \vec{u}V = V\vec{u} \qquad (2.1)$$

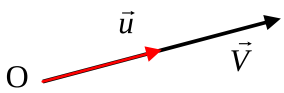



**Fig 2.2: vecteur unitaire**

## 5/LA SOMME GEOMETRIQUE DES VECTEURS (الجمع الهندسي للأشعة) :

Cette opération fait appel au dessin, c'est pour cette raison qu'on la qualifie de géométrique.

- **La somme de deux vecteurs** : c'est une opération commutative.

On calcule le module du vecteur résultant à partir de la **loi des cosinus (قانون جيوب التمام )** que nous démontrerons plus tard :

$$\boxed{D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}} \qquad (2.2)$$

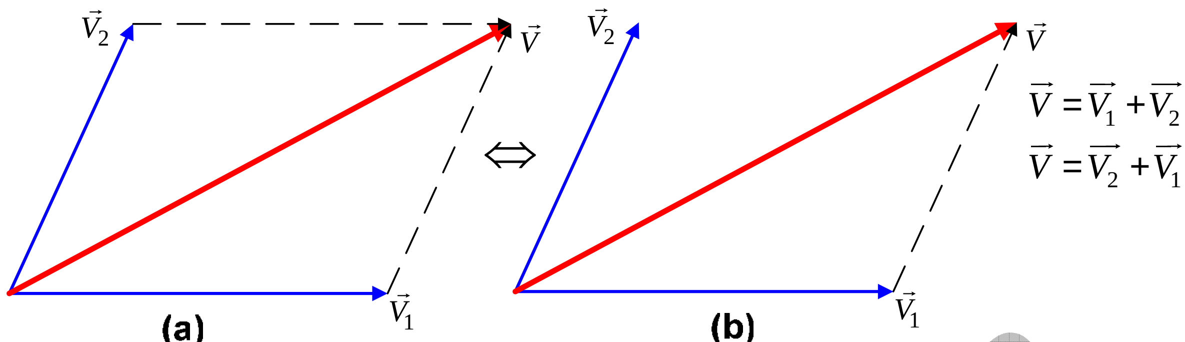



Fig 2.3: Somme de deux vecteurs

Pour déterminer la direction de $\vec{V}$, il suffit de chercher la valeur de l'angle $\alpha$ (figure 2.4). Raisonnons à partir du triangle **ACD** de la figure 2.5 **:**

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{CD}{V} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{CD}{V_2} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_2}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \boxed{V.\sin\alpha = V_2.\sin\theta} \qquad \textbf{(2.3)}$$

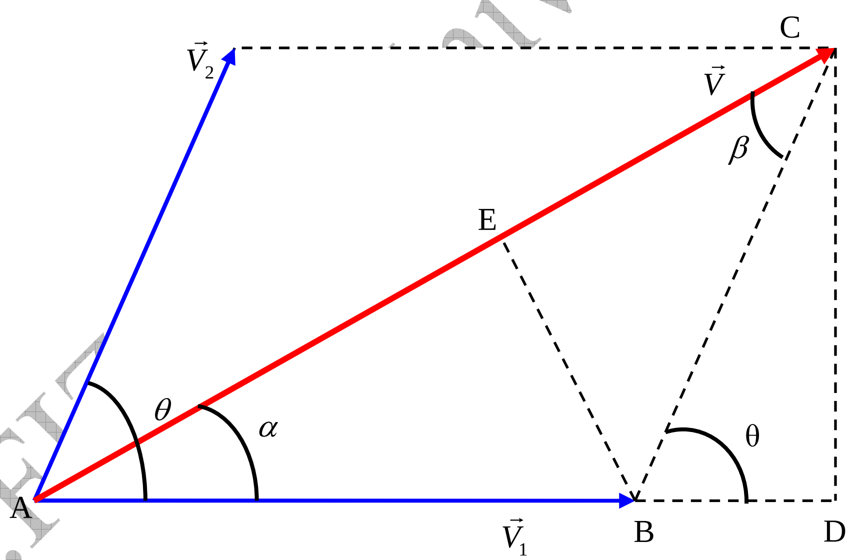



Fig 2.4: relative à la démonstration de la loi des sinus

De même dans le triangle **BEC** nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} \sin\beta = \dfrac{BE}{BC} \\ \sin\alpha = \dfrac{BE}{AB} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{V_2}{\sin\alpha} = \frac{V_1}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_2.\sin\beta = V_1.\sin\alpha} \qquad \textbf{(2.4)}$$

De (2.3) et (2.4) nous pouvons en déduire la formule générale (2.5), appelée loi des sinus (قانون الجيوب):

$$\boxed{\frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_1}{\sin\beta}=\frac{V_2}{\sin\alpha}} \qquad \textbf{(2.5)}$$

- **Cas particulier :** Si $\theta=\pi/2$ alors $V=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$ et $\tan\alpha=\frac{V_2}{V_1}$
- **La somme géométrique de plusieurs vecteurs :** (voir figure2.5)

$$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3+\vec{V}_4+\vec{V}_5$$

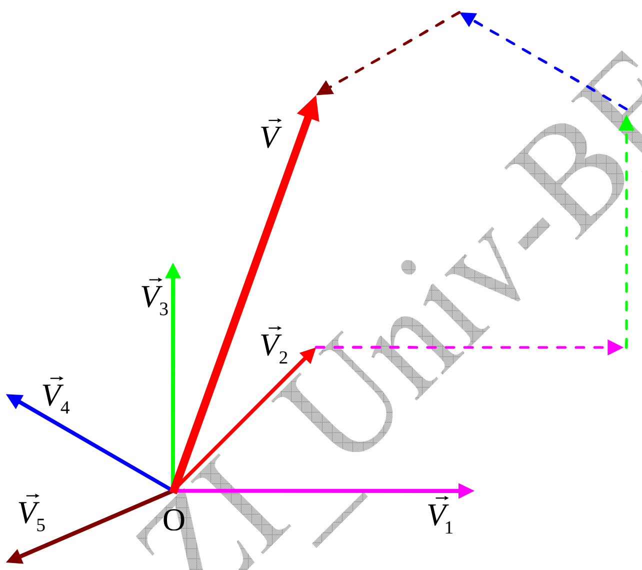



**Fig 2.5: Somme de plusieurs vecteurs**

- **La soustraction de deux vecteurs :** (طرح شعاعين) figure 2.6

Géométriquement, le vecteur $\vec{D}$ représente le résultat de la soustraction entre les deux vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_1$. Nous pouvons écrire : $\vec{D}=\vec{V}_2-\vec{V}_1$

Cette équation peut aussi s'écrire : $\vec{D}=\vec{V}_2+(-\vec{V}_1)$

La soustraction de vecteurs est anticommutative, c'est ce qui ressort de la figure 2.6 : $\vec{D}\,'=-\vec{D}$

- Le module du vecteur $\vec{D}$ :

$$\boxed{D=\sqrt{V_1^2+V_2^2-2V_1V_2\cos\theta}} \qquad \textbf{(2.6)}$$

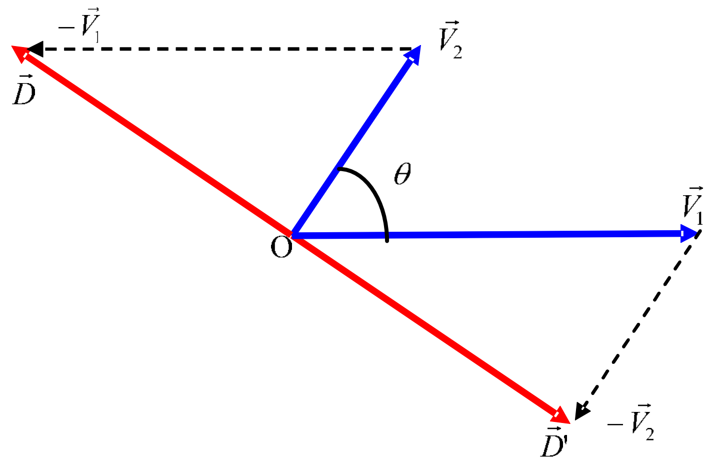



**Fig 2.6: Différence de deux vecteurs**

## 6/ COMPOSANTES D'UN VECTEUR (مركبات شعاع) :

Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de deux vecteurs ou plus (le nombre de possibilités est illimité).

Dans le plan, soit le repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j})$ :

- **En coordonnées rectangulaires** : on décompose le vecteur $\vec{V}$ suivant l'axe des X et l'axe des Y, comme indiqué sur la figure2.7.

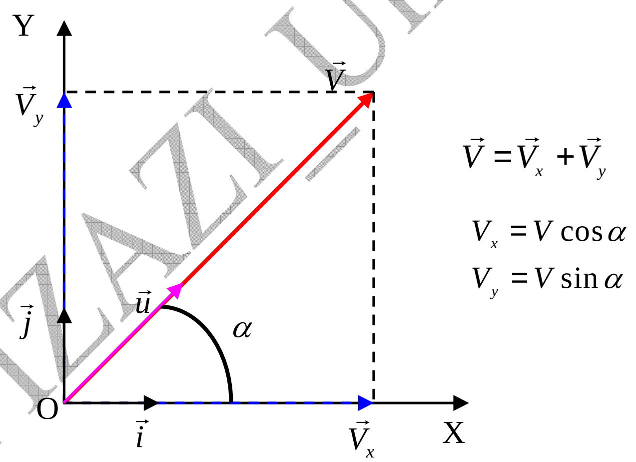



**Fig 2.7: Composantes d'un vecteur**

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, respectivement dans les directions des deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_x=\vec{i}.V_x \quad , \quad \vec{V}_y=\vec{j}.V_y \quad ;$$

$$\vec{V}=\vec{V}_x+\vec{V}_y \quad ; \quad \vec{V}=\vec{i}.V_x+\vec{j}.V_y \; ; \tag{2.7}$$

$$\vec{V}=\vec{i}.V\cos\alpha+\vec{j}.V\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V}=V(\vec{i}.\cos\alpha+\vec{j}.\sin\alpha)}$$

Or $\vec{V}=\vec{u}.V$ , d'où :

$$\boxed{\vec{u} = \vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Quant à la norme du vecteur $\vec{V}$, elle vaut : $V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$

En utilisant les coordonnées x et y nous pouvons aussi écrire : $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Exemple 2.1 :** Trouver la résultante des deux vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\Re\ (O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

**Réponse :**

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 + x_2) + \vec{j}(y_1 + y_2) \longrightarrow \boxed{V = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}}$$

**Exemple 2.2 :** Trouver la différence des deux vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\Re\ (O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

**Réponse :**

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 - x_2) + \vec{j}(y_1 - y_2) \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

- **Dans l'espace :** dans le repère R $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (base orthonormée), nous remarquons que $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \Rightarrow \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y + \vec{k}.V_z$ . (figure 2.8)

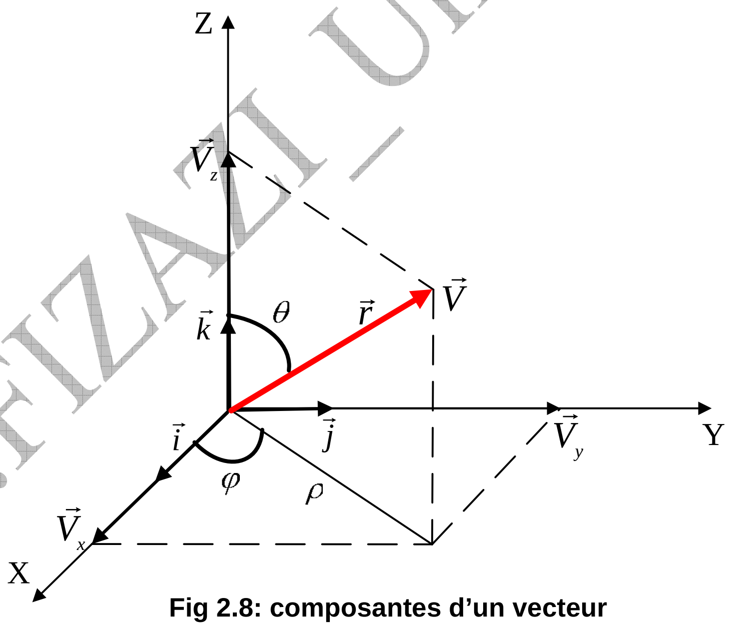



**Fig 2.8: composantes d'un vecteur**

Nous pouvons nous assurer géométriquement que :

$$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \qquad \Rightarrow \qquad V_z = r.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \quad \Rightarrow \rho = r.\sin\theta;$$

$$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x = \rho.\cos\varphi \Rightarrow V_x = r.\sin\theta.\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y = \rho.\sin\varphi \Rightarrow V_y = r\sin\theta.\sin\varphi$$

**En résumé :**

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= V\sin\theta.\cos\varphi \\ V_y &= V.\sin\theta.\sin\varphi \\ V_z &= V.\cos\theta \end{aligned}} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Quant au module du vecteur $\vec{V}$ il est égal à : $V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$

Ou en coordonnées cartésiennes : $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

❖ **Remarque** : En notant par $\alpha$ et $\beta$ les angles respectifs formés par le vecteur $\vec{V}$ avec les axes $OX$ et $OY$, et de la même façon que nous avons obtenu l'équation 2.9, il vient :

$$\boxed{V_x = V.\cos\alpha \quad , \quad V_y = V.\cos\beta \quad , \quad V_z = V.\cos\theta} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Nous pouvons en déduire l'expression :

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1} \qquad \textbf{(2.11)}$$

**Exemple 2.3 :** Trouver la distance qui sépare les deux points $A(10,-4,4)u$ et $B(10,6,8)u$, représentés dans le repère rectangulaire $\Re\ (O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, avec $u = unité$.

**Réponse :**

En représentant les deux points dans le repère, on se rend compte que la distance demandée n'est autre que le module du vecteur $\vec{D}$, qui est la différence entre les deux vecteurs : $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

Soit :

$$\vec{D} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) \Rightarrow \vec{D} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{D} = \vec{i}(0) + \vec{j}(10) + \vec{k}(4) \Rightarrow D = \sqrt{116} = 10.77u$$

**Exemple 2.4 :** Trouver la résultante des cinq vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = (4\vec{i} - 3\vec{j})\ u; \vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 2\vec{j})\ u; \vec{V}_3 = (2\vec{i} - 6\vec{j})u; \vec{V}_4 = (7\vec{i} - 8\vec{j})u; \vec{V}_5 = (9\vec{i} + \vec{j})u$$

**Réponse :**

$$\vec{V} = (4-3+2+7+9)\vec{i} + (-3+2-6-8+1)\vec{j} \Rightarrow V = 19\vec{i} - 14\vec{j} \Rightarrow V = \sqrt{361+196} = 23.60u$$

Pour trouver la direction du vecteur $\vec{V}$, nous partons de l'expression $\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$, $\alpha$ est l'angle formé par le vecteur $\vec{V}$ et l'axe $OX$ :

$$\tan\alpha = -14/19 \approx 0,737 \Rightarrow \alpha \approx 36,38°$$

## 7/ LE PRODUIT SCALAIRE (الجداء السلمي) :

❖ Définition : On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le nombre réel

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 \ : \ \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1.V_2.\cos(\vec{V}_1.\vec{V}_2)} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Ou
$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\|^2 - \left\|\vec{V}_1\right\|^2 - \left\|\vec{V}_2\right\|^2\right]} \qquad \textbf{(2.13)}$$

❖ Cas particulier :

Si $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$, alors $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

Si $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, alors :

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$$

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V} = V_1 V_2$$

**Exemple:**

Le travail de la force $\vec{F}$ qui provoque un déplacement $\overrightarrow{AB}$ est donné par la formule $W = F.AB.\cos\alpha$ tel que $\alpha = (\vec{F}; \overrightarrow{AB})$ (on lit $W$ est le produit scalaire de $\vec{F}$ par $\overrightarrow{AB}$), on écrit :

$$\vec{W} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad W = F.AB.\cos\alpha$$

Démontrons à présent la relation $(2.2)$ comme nous l'avons promise :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \ ; \ \vec{V}^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2\vec{V}_1\vec{V}_2 \ ; \ \vec{V}_1^2 = \vec{V}_1.\vec{V}_1 = V_1 V_1 \cos(\vec{V}_1 \vec{V}_1) = V_1^2;$$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos(\vec{V}_1 \vec{V}_2) \Rightarrow V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos(\vec{V}_1 \vec{V}_2)}$$

❖ Expression analytique du produit scalaire (العبارة التحليلية للجداء السلمي)

**Dans le plan**(في المستوى) **:** Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ contenus dans le plan, tel que :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} ; \ \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Dans le repère $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j})$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \left(x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j}\right).(x_2.\vec{i} + y_2.\vec{j}) = x_1.x_2.\vec{i}.\vec{i} + x_1.y_2.\vec{i}.\vec{j} + x_2.y_1.\vec{j}.\vec{i} + y_1.y_2.\vec{j}.\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{j}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{j} = 0 \\ \\ \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2.} \qquad \textbf{(2.14)}$$

**Dans l'espace** (في الفضاء) **:**

Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le repère $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$ :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 1 \end{array}} \text{ هام } \quad \vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2} \qquad \textbf{(2.15)}$$

❖ **Propriétés du produit scalaire** (خصائص الجداء السلمي) **:**

**Commutatif** (تبديلي) $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_2.\vec{V}_1$

**Non associatif** (غير تجميعي)**:** $\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2.\vec{V}_3\right)$ n'existe pas car le résultat serait un vecteur.

**Distributif (توزيعي) par rapport à la somme vectorielle :**

$$\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right) = \vec{V}_1.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\vec{V}_3$$

❖ **Exemple 2.5 :** Calculer l'angle compris entre les deux vecteurs : $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

**Réponse :**

Partant de l'expression du produit scalaire, on peut écrire :

$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}$$

Donc :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_1 = -3 + 4 - 3 = -2 \;\; ; \;\; V_1 = \sqrt{9+4+1} = 3{,}74 \;\; ; \;\; V_2 = \sqrt{1+4+9} = 3{,}74$$

$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2} = \frac{-2}{14} = -0{,}143 \Rightarrow \theta = (\vec{V}_1\vec{V}_2) = 96{,}2°$$

## 8/ LE PRODUIT VECTORIEL (الجداء الشعاعي) :

❖ **Définition :** On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire au plan qu'ils constituent.

Nous écrivons par convention : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$

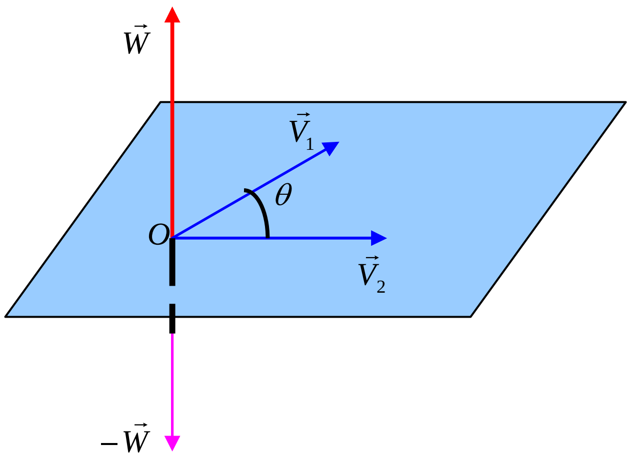



**Fig 2.9: produit vectoriel**

❖ **caractéristiques du vecteur** $\vec{W}$ (مميزات الشعاع)

$\vec{W}$ est **perpendiculaire** au plan formé par les deux vecteurs, son sens est déterminé par la règle de la main droite (l'index indiquant $\vec{W}$), son module est donné par la formule 2.16 :

$$\boxed{W = \left|\vec{W}\right| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1.\vec{V}_2)} \qquad \textbf{(2.16)}$$

Important :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}\ ;\ \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}\ ;\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \left|\vec{i} \wedge \vec{j}\right| = \left|\vec{i} \wedge \vec{k}\right| = \left|\vec{j} \wedge \vec{k}\right| = 1 \end{array}}$$

**Remarque** : la grandeur $W = \left|\vec{W}\right| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1;\vec{V}_2)$ représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ce qui laisse sous entendre la possibilité de lier un vecteur à une certaine surface.

**Méthode utilisée pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs** :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} ;\ \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes dans le repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on peut écrire :

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{W} = \left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right)\vec{i} - \left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right)\vec{j} + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)\vec{k}$$

Le module du vecteur est donné par l'expression :

$$\boxed{W = \sqrt{\left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right)^2 + \left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right)^2 + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)^2} = V_1 . V_2 . \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)} \qquad \textbf{(2.17)}$$

➢ **Propriétés du produit vectoriel** (خصائص الجداء الشعاعي)

**Anticommutatif** (تبديلي مضاد) $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

**Non associatif** (غير تجميعي): $\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) \neq \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) \wedge \vec{V}_3$

**Distributif** (توزيعي) **par rapport à la somme vectorielle :**

$$\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) + \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3\right)$$

❖ **Exemple 2.6 :** Calculer le vecteur $\vec{W}$, produit des deux vecteurs : $\vec{V}_1 = (2,1,-1)$ et $\vec{V}_2 = (1,0,-2)$, en déduire l'angle $\theta$ compris entre eux.

**Réponse :**

$$\vec{W} = \left[(1\times -2) - (0\times -1)\right].\vec{i} - \left[(2\times -2) - (1\times -1)\right].\vec{j} + \left[(2\times 0) - (1\times 1)\right].\vec{k} \Rightarrow \vec{W} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$V_1 = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$V_2 = \sqrt{1^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$W = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} = 3,74$$

$$W = V_1 . V_2 . \sin\theta = 3,74 \Rightarrow \sin\theta = \frac{W}{V_1 . V_2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3,74}{\sqrt{30}} = 0,683 \Rightarrow \theta = 43,06°$$

## 9/ LE PRODUIT MIXTE (الجداء المختلط):

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est la quantité scalaire définie par :

$$\vec{V}_1 . \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \left(y_2 z_3 - y_3 z_2\right) x_1 - \left(x_2 z_3 - x_3 z_2\right) y_1 + \left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right) z_1 \qquad \textbf{(2.18)}$$

## 10/ MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UN POINT DE L'ESPACE (عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء)

❖ **Définition :** Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est le vecteur défini par :

$$\boxed{\vec{\tau}_O = \vec{OA} \wedge \vec{V}} \qquad \textbf{(2.19)}$$

❖ **Remarque :**

$\left\|\vec{\tau}_O\right\| =$ au double de l'aire du triangle $AOB$. (Figure2.10-a-)

## 11/ MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UN AXE (عزم شعاع بالنسبة لمحور)

❖ **Première définition :** Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal à la projection de ce vecteur par rapport à un point quelconque de cet axe.

❖ **Deuxième définition :** Le moment du vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe $\Delta$, d'origine $O$ et de vecteur unitaire $\vec{u}$, est égal au produit mixte :

$$\boxed{\tau_{\Delta} = \overrightarrow{\tau_O}.\vec{u} = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}\right).\vec{u}} \qquad \textbf{(2.20)}$$

❖ **Remarque** : Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est une grandeur scalaire, par contre le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est un vecteur (Figure2.10-b-)

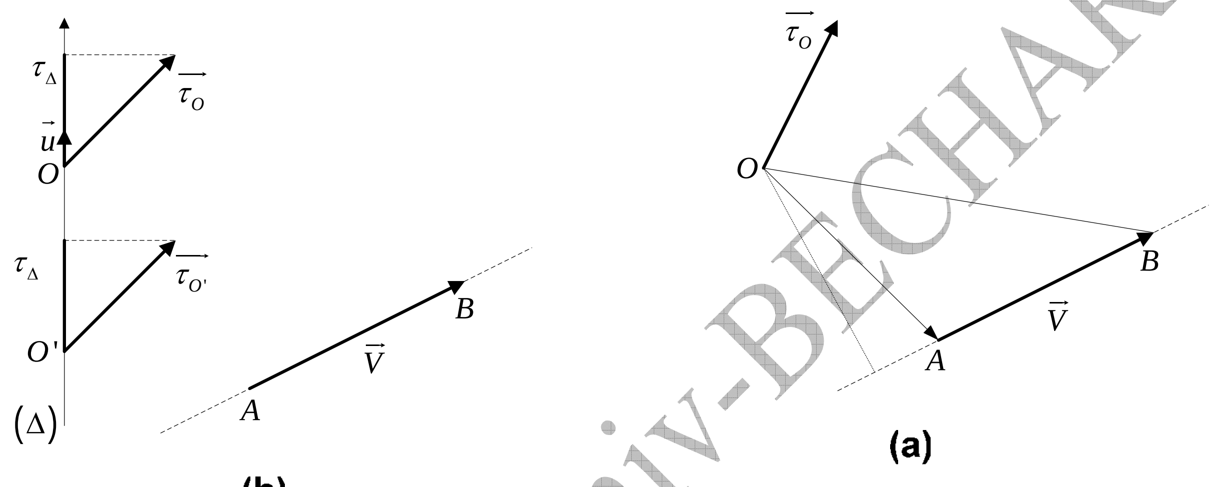



**Fig 2.10: Moment d'un vecteur**

## 12/GRADIENT, DIVERGENCE ET ROTATIONNEL (التدرج، التباعد و الدوران) :

❖ **Définitions :**

- On dit que la fonction $f(x, y, z)$ est un champ scalaire si la fonction $f(x, y, z)$ est un scalaire.
- On dit que la fonction $\vec{V}(x, y, z)$ est un champ vectoriel si la fonction est vectorielle.
- On définit l'opérateur **(المؤثر)** différentiel vectoriel $\vec{\nabla}(nabla)$ par :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}} \qquad \textbf{(2.21)}$$

**Où :**

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à $x, y$ et $z$.

Nous allons définir le gradient, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

## ➢ LE GRADIENT (التدرج ):

Si $f(x,y,z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}} \qquad \textbf{(2.22)}$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = f = 3x^2y^3z$.

**Réponse :** $\overrightarrow{grad}\, f = 6xy^3z.\vec{i} + 9x^2y^2z.\vec{j} + 3x^2y^3.\vec{k}$

## ➢ LA DIVERGENCE (التباعد ):

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$\boxed{div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}} \qquad \textbf{(2.23)}$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer la divergence de la fonction vectorielle

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

**Réponse :** $div\vec{V} = 2y - 3z^2 + 0 = 2y - 3z^2$

## ➢ LE ROTATIONNEL (الدوران ):

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right).\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right).\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).\vec{k}} \qquad \textbf{(2.24)}$$

**Démarche à suivre :**

a/ Etablir la matrice suivante :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = A + B + C$$

b/ Pour calculer $A, B, C$ il suffit de se rappeler de la règle du produit vectoriel :

$$A=\begin{vmatrix} +\vec{i} & \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)$$

$$B=\begin{vmatrix} & -\vec{j} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & & V_z \end{vmatrix} = -\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

$$C=\begin{vmatrix} & & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \\ V_x & V_y & \end{vmatrix} = +\vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

c/ On arrive à l'expression finale (2.24) :

$$\begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right) -\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer le rotationnel du vecteur :

$$\vec{V}(x,y,z)=2xy\vec{i}-3yz^2\vec{j}+9xy^3\vec{k}$$

**Réponse :**

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V})=\left(27xy^2-6yz\right).\vec{i}-(9y^3-0).\vec{j}+(0-2x).\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V})=\left(27xy^2-6yz\right).\vec{i}-9y^3\vec{j}-2x\vec{k}$$

## 13/ LE LAPLACIEN (اللابلاسيان) :

❖ **Définitions :**

- **En coordonnées cartésiennes :**
  - ➢ Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(f)=\vec{\nabla}^2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \qquad \textbf{(2.25)}$$

➢ Le Laplacien d'une fonction vectorielle est égal à la divergence de son gradient :

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2(\vec{V})=\frac{\partial^2\overrightarrow{V_x}}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\vec{k}} \qquad \textbf{(2.26)}$$

**<u>REMARQUE</u>**

**Vous trouverez, à la fin de ce document en annexe, un formulaire regroupant le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien dans les différentes coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.**

# EXERCICES ** تمارين

**تنبيه: في كل تمارين هذه السلسلة نعتبر أن طويلات الأشعة معبّر عنها بنفس الوحدة.**

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.1**<br>On considère , dans un repère orthonormé OXYZ, les trois vecteurs : $\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ , $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .<br>a/ calculer les modules de $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$,<br>b/ calculer les composantes ainsi que les modules des vecteurs : $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ et $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$,<br>c/ déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$,<br>d/ calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ et en déduire l'angle formé par les deux vecteurs.<br>e/ calculer le produit vectoriel $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$. | **تمرين 1.2**<br>في معلم متجانس و متعامد $OXYZ$، نعتبر الأشعة الثلاثة التالية: $\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.<br>ا/ أحسب طويلة كل من $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$.<br>ب/ أحسب مركبات و طويلات الأشعة $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ و $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$<br>ج/ عين شعاع الواحدة المحمول على $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$<br>د/ أحسب الجداء السلمي $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ ثم إستنتج الزاوية المحصورة بينهما.<br>ه/ أحسب الجداء الشعاعي $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.2**<br>Montrer que les grandeurs de la somme et de la différence de deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ exprimées en coordonnées rectangulaires sont respectivement :<br>$S = \left[ (A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2 \right]^{1/2}$<br>$D = \left[ (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \right]^{1/2}$ | **التمرين2.2**<br>تحقق من إن مقدراي المجموع و الفرق لشعاعين $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ المعبر عنهما بالإحداثيات المستطيلة على التوالي هما:<br>$S = \left[ (A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2 \right]^{1/2}$<br>$D = \left[ (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \right]^{1/2}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.3**<br>Trouver la sommes des trois vecteurs : $\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ، $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ، $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$ .<br>Calculer le module de la résultante ainsi que les angles qu'elle forme avec $OY, OX$ et $OZ$ . | **التمرين3.2**<br>أوجد محصلة مجموع الأشعة التالية :<br>$\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$ .<br>أحسب طويلة المحصلة و الزوايا التي تصنعها مع كل من $OY, OX$ و $OZ$. |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.4**<br>a/ Montrer que la surface d'un parallélogramme est $\lvert \vec{A} \wedge \vec{B} \rvert$ tels que $\lvert \vec{A} \rvert$ et $\lvert \vec{B} \rvert$ sont les côtés du parallélogramme formé par les deux vecteurs .<br>b/ Prouver que les vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont | **التمرين4.2:**<br>ا/ برهن أن مساحة متوازي الأضلاع هي $\lvert \vec{A} \wedge \vec{B} \rvert$ حيث $\lvert \vec{A} \rvert$ و $\lvert \vec{B} \rvert$ ضلعي متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين. |

| | |
|---|---|
| perpendiculaires si $\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|$ | ب/ برهن أن الشعاع $\vec{A}$ يكون عموديا على الشعاع $\vec{B}$ إذا تحققت العلاقة $\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.5**<br>Soit le vecteur :<br>$\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$<br>Montrer que $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ | **التمرين5.2**<br>إذا كان الشعاع:<br>$\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$<br>برهن أن $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.6**<br>Soient les deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$<br>Trouver $\alpha, \beta$ pour que $\vec{B}$ soit parallèle à $\vec{A}$, puis déterminer le vecteur unitaire pour chacun des deux vecteurs. | **التمرين6.2**<br>ليكن الشعاعان $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ; $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$<br>عين $\beta, \alpha$ بحيث يوازي الشعاع $\vec{B}$ الشعاع $\vec{A}$، ثم عين شعاعي الواحدة الموافقة لكل منهما. |

| | |
|---|---|
| **Exercice 2.7**<br>La résultante de deux vecteurs a 30 unités de long et forme avec eux des angles de 25° et 50°.<br>Trouver la grandeur des deux vecteurs. | **التمرين7.2**<br>محصلة شعاعين طولها 30 وحدة و تصنع معهما زاويتين °25 و °50.<br>أوجد طويلة الشعاعين. |

## Corrigés des exercices 2.1 à 2.7 : حلول التمارين من 1.2 إلى 7.2

**Exercice2.1 :**

a/ $\boxed{\left|\vec{V_1}\right| = 6,40}$ , $\boxed{\left|\vec{V_2}\right| = 5,38}$ , $\boxed{\left|\vec{V_3}\right| = 5,91}$

b/ $\boxed{\vec{A} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$ , $\boxed{\vec{B} = 9\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k}}$

c/ $\boxed{\vec{C} = 8\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}}$ $\quad \dfrac{\vec{C}}{C} = \vec{u}_c \Rightarrow \boxed{\vec{u}_c = \dfrac{8}{\sqrt{35}}\vec{i} - \dfrac{5}{\sqrt{35}}\vec{j} + \dfrac{7}{\sqrt{35}}\vec{k}}$

d/

$$\vec{V}_1.\vec{V}_3 = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_3 = 15 + 4 + 12 \ , \ \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_3 = 31}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_3}{V_1V_3} \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{31}{\sqrt{41}.\sqrt{35}} = \frac{31}{37,88} \ , \ \cos\alpha \simeq 0,176 \Rightarrow \boxed{\alpha = 79,86°}$$

e/ $\boxed{\vec{V_2} \wedge \vec{V}_3 = 5\vec{i} - 26\vec{j} - 17\vec{k}}$

**Exercice2.2 :**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = \left(A_x + B_x\right)\vec{i} + \left(A_y + B_y\right)\vec{j} + \left(A_z + B_z\right)\vec{k}$$

$$S = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \left(A_x - B_x\right)\vec{i} + \left(A_y - B_y\right)\vec{j} + \left(A_z - B_z\right)\vec{k}$$

$$D = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

**Exercice2.3 :**

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \ , \ \vec{V} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \boxed{V \simeq 8,54}$$

$$V_x = V.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_x}{V} = \frac{6}{8,54} \ , \ \cos\alpha \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 45,6°}$$

$$V_y = V.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{V_y}{V} = \frac{6}{8,54} \ , \ \cos\beta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\beta \simeq 45,6°}$$

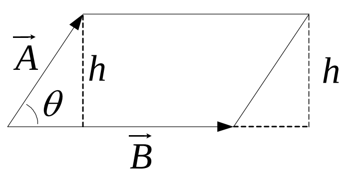
$$V_z = V.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{V_z}{V} = \frac{1}{8,54} \ , \ \cos\theta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\theta \simeq 83,1°}$$

**Exercice2.4 :**

a/ surface du parallélogramme : $S = h.\left|\vec{B}\right|$

On remarque sur la figure que : $h = \left|\vec{A}\right|\sin\theta$

Donc : $S = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$



On en déduit que : $S = \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$

Rappelons-nous que la surface d'un triangle de côtés $\left|\vec{A}\right|$ et $\left|\vec{B}\right|$ est égale à :

$$S_0 = \frac{1}{2}\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$$

b/ soient les deux vecteurs :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

En égalisant les deux dernières expressions, et en développant nous arrivons au résultat : $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$, qui n'est autre que le produit scalaire $\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$.

**Exercice2.5 :**

Ecrivons les deux expressions des deux vecteurs :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 2y \\ 2xz^2 - 2 \end{pmatrix}$$

En calculant le produit vectoriel de ces deux vecteurs nous trouvons que le résultat est zéro :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 2xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

**Exercice2.6 :**

Pour que les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient parallèles il faut que la relation $\vec{B} = \lambda.\vec{A}$ soit vérifiée, avec $\lambda$ constante.

Partant de cela on peut écrire :

$$\frac{\vec{B}}{\lambda} = \vec{A} \Rightarrow \quad \frac{\vec{B}}{\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-3}{\lambda} \\ \frac{4}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

On en déduit la valeur de $\lambda$ et par la suite les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{\lambda}=1 \Rightarrow \boxed{\lambda=2} \\ \dfrac{-3}{\lambda}=\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha=-1,5} \\ \dfrac{4}{\lambda}=\beta \Rightarrow \boxed{\beta=2} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{B}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On s'assure des deux résultats en calculant $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$

Les vecteurs unitaires correspondant à chacun des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont :

$$\boxed{\vec{A}=\vec{i}-1,5\vec{j}+2\vec{k}} \quad \frac{\vec{A}}{A}=\vec{u}_A \Rightarrow \boxed{\vec{u}_A=\frac{1}{\sqrt{7,25}}\vec{i}-\frac{1,5}{\sqrt{7,25}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{7,25}}\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{B}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}} \quad \frac{\vec{B}}{B}=\vec{u}_B \Rightarrow \boxed{\vec{u}_B=\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}}$$

**<u>Exercice2.7</u> :**

Des données nous pouvons en déduire que l'angle entre les deux vecteurs est :

$$180-(25+50)=105°$$

Appliquons la formule **2.9** pour trouver les deux composantes :

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50}=\frac{V_y}{\sin 25}$$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50} \Rightarrow \boxed{V_x=\frac{\sin 50}{\sin 105°}V} \Rightarrow \boxed{V_x=23,8}$$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_y}{\sin 25} \Rightarrow \boxed{V_y=\frac{\sin 25}{\sin 105°}V} \Rightarrow \boxed{V_y=13,1}$$

# III/ PRINCIPAUX SYSTEMES DE COORDONNEES
# الأنظمة الرئيسية للإحداثيات

Afin de déterminer la position instantanée d'un point matériel, nous devons choisir d'abord un repère parmi les différents repères les plus utiles. Dans ce qui suit nous allons rappeler les principaux systèmes de coordonnées.

## 1/ REPERES D'INERTIE OU GALILEENS (المعالم العطالية أو الغليلية):

(Galilée 1564-1642)

Pour déterminer la position d'un mobile dans l'espace, nous devons choisir avant tout un corps solide, que nous appelons référentiel, auquel nous associons des axes de coordonnées.

- **Définition :** tout ensemble de systèmes d'axes de coordonnées, lié à un corps solide $S$ qui est le référentiel (المرجع), constitue un repère (المعلم ) lié à ce corps solide $S$.

**Exemple :** la table (référentiel) + 3 axes = repère lié à la table.

La terre (référentiel) + 3 axes quelque soit leur origine commune = repère lié à la terre.

Les repères galiléens sont constitués d'un système libre (c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme).

Dans un référentiel galiléen $R$ donné, on repère une position ponctuelle $M$ à l'aide de trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle, donc la position est définie par quatre nombres réels comme par exemple $\left(X,Y,Z,t\right)$.

Si on note la position d'un point $M$ par $\vec{r}=\overrightarrow{OM}(x,y,z,t)$ au temps $t$, son mouvement dans le repère $R$ est défini par l'application $t\mapsto \vec{r}(t)$.

## 2/ PRINCIPAUX REFERENTIELS GALILEENS (أهم المراجع الغليلية)

- **Repère Copernic** (Copernic1473-1543)

Ce repère est défini par trois axes issus du centre du système solaire et dirigés vers trois étoiles fixes choisies convenablement. (Figure 3.1)

Ce système est utilisé pour l'étude du mouvement des planètes et des vaisseaux spatiaux interplanétaires.

La terre accomplit un tour autour du pôle nord-sud en un jour, sa révolution autour du soleil est d'une année.

- **Le Repère géocentrique (المعلم الجيومركزي)**

Ce repère est défini par trois axes issus du centre d'inertie de la terre et dirigés vers trois étoiles fixes du repère de Copernic. Ce repère est utilisé pour l'étude du mouvement de la lune et des satellites en rotation autour de la terre.

- **Le Repère terrestre (المعلم الأرضي)**

Ce repère est défini par trois axes perpendiculaires issus de n'importe quel point de la terre. Ce repère est utilisé pour l'étude des corps en mouvement liés à la terre. Dans ce repère la terre est fixe, elle constitue donc un repère galiléen.

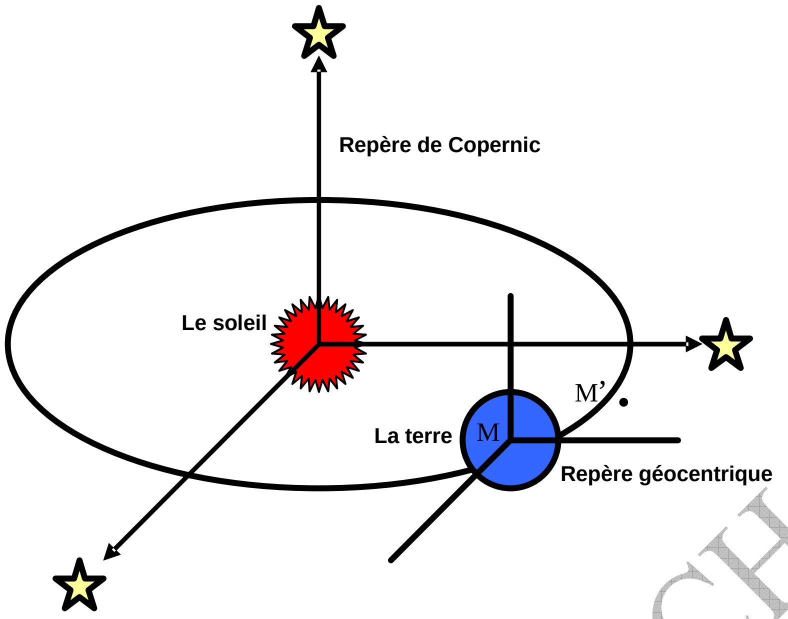



Fig 3.1: les différents repères

## 3/ LES COORDONNEES CARTESIENNES (الإحداثيات الكارتيزية)

### a/ Le repère spatial (المعلم الفضائي):

Si le mouvement s'effectue dans l'espace, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel $M$ dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ ou bien à l'aide des coordonnées cartésiennes ( de René Descartes 1596-1650) ou rectangulaires et qui sont :

**x : abscisse (فاصلة )**
**y : ordonnée(ترتيب)**
**z : altitude(علو)**

Le vecteur position s'écrit alors : $\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}}$ **(3.1)**

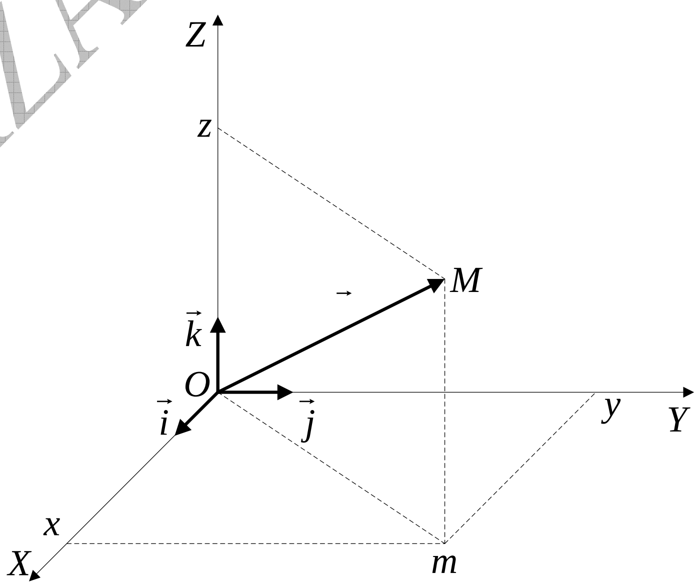



Fig 3.2: Coordonnées cartésiennes

### b/ Le repère plan (المعلم المستوي)

Si le mouvement s'effectue dans le plan, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel $M$ dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j})$ à l'aide des coordonnées rectangulaires $x$ et $y$, ou bien à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ .

Le vecteur position s'écrit donc : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j}}$ **(3.2)**

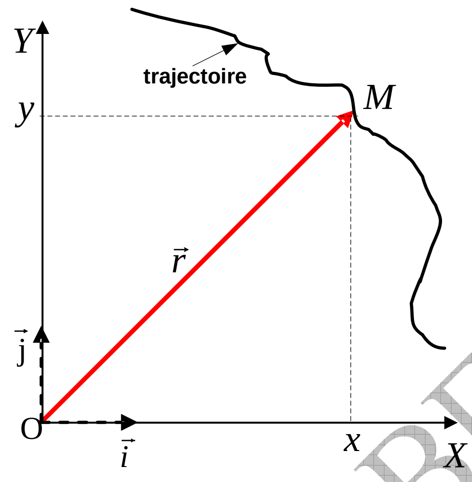



**Fig 3.3: Coordonnées rectangulaires**

### c/ Le repère rectiligne (المعلم المستقيم)

Si le mouvement est rectiligne, on se contente de l'axe $OX$ tel que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i}} \qquad \textbf{(3.3)}$$

## 4/ LES COORDONNEES POLAIRES (الإحداثيات القطبية)

Quand le mouvement est plan, là aussi, on peut repérer la position du mobile $M$ par ses coordonnées polaires $(r,\varphi)$. (Fig3.4)

: Rayon polaire **(نصف القطر القطبي)**

$\varphi$ : Angle polaire**(الزاوية القطبية)**

Le vecteur position dans ce repère s'écrit donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(3.4)}$$

De la même façon que nous avons obtenu la relation (2.8), nous pouvons écrire dans ce cas :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi}$$

Ainsi nous pouvons écrire le vecteur position en coordonnées polaires comme suit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Où $(A_r, A_\varphi)$ représente les deux composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$.

La relation qui lie les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires est :

$$\begin{array}{|ll|} x = r.\cos\theta & \varphi = \arccos {}^{x}\!/_{r} \\ y = r.\sin\theta & \varphi = \arcsin {}^{y}\!/_{r} \end{array} \tag{3.6}$$

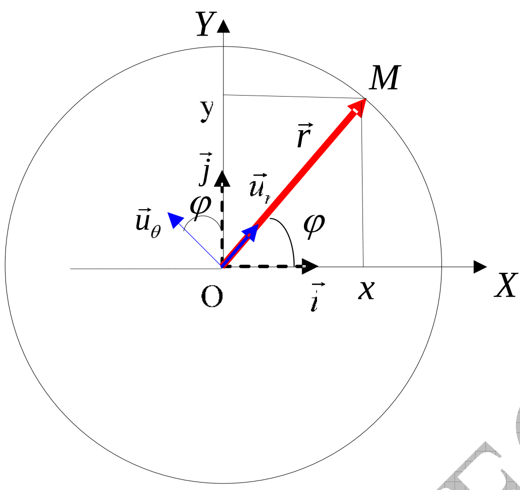



**Fig 3.4: Coordonnée polaires**

## 5/ LES COORDONNEES CYLINDRIQUES (الإحداثيات الأسطوانية)

Si la trajectoire est spatiale, où $\rho$ et $oz$ (figure 3.5) jouent un rôle particulier dans la détermination de la position du mobile, il est préférable de faire appel aux coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, z)$ :

$\rho$ : rayon polaire (نصف القطر القطبي)

$\varphi$ : angle polaire (الزاوية القطبية)

$z$ : altitude (العلو)

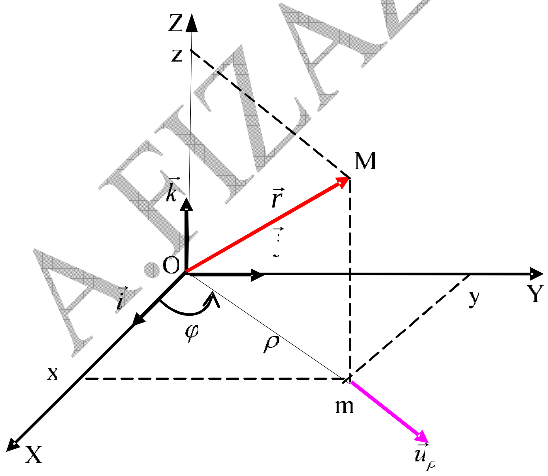



**Fig 3.5: Coordonnées cylindriques**

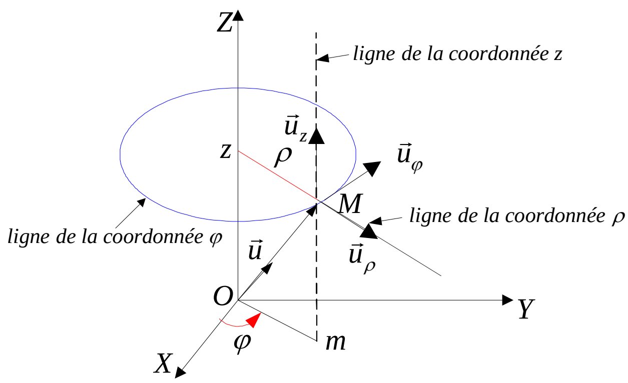



**Fig 3.6: Base des coordonnées cylindriques**

En se référant à la figure 3.5 nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r.\vec{u}$$

D'où
$$\boxed{\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k}}$$

De même :
$$\boxed{\vec{u}_\rho = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi}$$

**Attention à ne pas confondre $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_r$ !!!**

Nous pouvons écrire maintenant l'expression du vecteur position sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho\sin\varphi + \vec{k}.z \\ \overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}.x + \vec{j}.y + \vec{k}.z \end{array}} \qquad \textbf{(3.8)}$$

Nous pouvons transformer l'expression précédente du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_\rho.\vec{u}_\rho + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_z.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(3.9)}$$

Où $\left(A_\rho, A_\varphi, A_z = z\right)$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k}\right)$. Pour obtenir l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ il suffit de se rendre compte que les vecteurs unitaires qui constituent la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k}\right)$ sont perpendiculaires entre eux ; donc $\vec{u}_\varphi$ est le produit vectoriel de $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_\rho$ . Ainsi :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Par identification des relations (3.1) et (3.8) on en déduit les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctgy/x \\ \varphi = \arccos x/\rho = \arcsin y/\rho \end{array}\right.} \qquad \textbf{(3.11)}$$

**Remarque :** si $z = 0$ nous reconnaissons alors les coordonnées polaires qui ne sont donc qu'un cas particulier des coordonnées cylindriques.

## 6/ LES COORDONNEES SPHERIQUES (الإحداثيات الكروية)

Quand le point O et la distance séparant M de O, jouent un rôle caractéristique, l'utilisation des coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ est la mieux adaptée, avec :

: rayon polaire(نصف القطر القطبي )

$\theta$ : azimut (سمت)

$\varphi$ : coaltitude (تمام العرض)

Nous démontrons géométriquement (figure 3.7) les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnés sphériques :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho = r\sin\theta \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.} \qquad \textbf{(3.12)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos z/r \\ \varphi &= arctg\, y/x \end{aligned}} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Quant à la relation entre les coordonnées cylindriques et les cordonnées sphériques elle est :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \rho = r\sin\theta & r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \varphi = \varphi & \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta & \theta = arctg\, \rho/z \end{array}} \qquad \textbf{(3.14)}$$

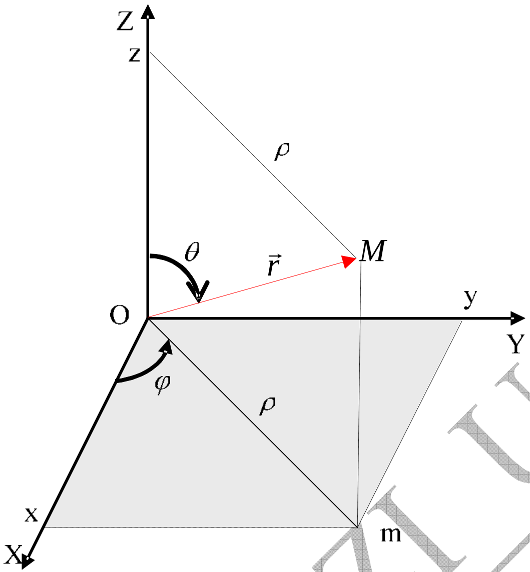



Fig 3.7 : Coordonnées sphériques

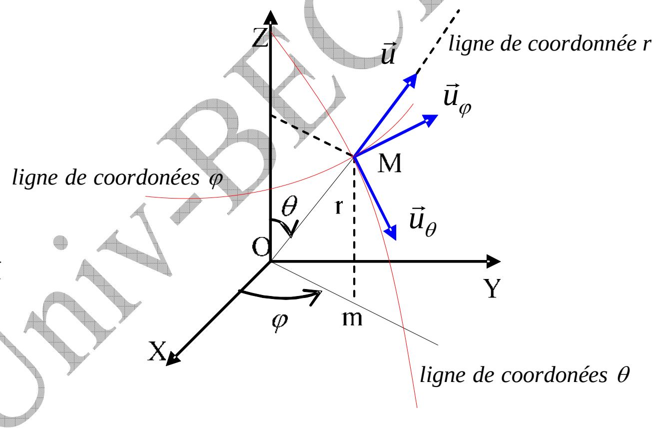



Fig 3.8 : Base des coordonnées sphériques

En coordonnées cartésiennes le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

En coordonnées sphériques on peut l'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_\theta.\vec{u}_\theta} \qquad (15.3)$$

Où $\left(A_r, A_\varphi, A_\theta\right)$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$

**Remarque : Pour couvrir tout l'espace en coordonnées sphériques, nous admettons les variations :**

de 0 à $\infty$, $\theta$ de 0 à $\pi$, $\varphi$ de 0 à $2\pi$

➢ **Expressions des vecteurs unitaires** $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ : En se référant à tout ce qui a été dit sur les coordonnées sphériques, nous pouvons écrire :

$$\vec{r} = r.\vec{u}_r = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{Om} = \rho.\vec{u}_\rho = \rho\left[\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right]$$

$$\overrightarrow{mM} = z.\vec{k} = \vec{k}.r\cos\theta.$$

$$\rho = r.\sin\theta$$

Nous en déduisons : $\vec{r} = r\left[\vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta\right]$

Il nous apparaît clairement l'expression de $\vec{u}$ :

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Connaissant le vecteur :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi}$$

Il nous reste à déterminer le vecteur $\vec{u}_\theta$. La base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ étant orthogonale, le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est donc le résultat du produit vectoriel entre $\vec{u}_\varphi$ et $\vec{u}$ .

$$\boxed{\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta} \qquad \textbf{(3.17)}$$

## 7/ LES COORDONNEES CURVILIGNES (الإحداثيات المنحنية)

Nous pouvons repérer la position du mobile sur la trajectoire elle-même à l'aide de l'abscisse curviligne (الفاصلة المنحنية). Pour ce faire :

-On oriente la trajectoire au hasard,

- on choisit un point fixe 0 sur la trajectoire, comme étant l'origine des abscisses,

L'abscisse curviligne est défini comme étant la grandeur algébrique $S$ de l'arc appartenant à la trajectoire de 0 jusqu'à M.

$$\boxed{\overset{\frown}{OM} = s} \qquad \textbf{(18.3)}$$

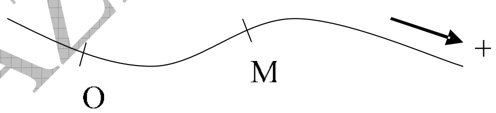



**Fig 3.9 : Coordonnées curvilignes**

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.1**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j})$ en coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ | **التمرين 1.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i}, \vec{j})$ إلى جملة الإحداثيات القطبية $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.2**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ en coordonnées cartésiennes: $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta + V_\varphi\vec{u}_\varphi$ | **التمرين 2.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta + V_\varphi\vec{u}_\varphi$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.3**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{i} + Z\vec{i}$ | **تمرين 3.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{i} + Z\vec{i}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.4**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ | **التمرين :4.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ : $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.5**<br>Convertir le vecteur suivant en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$: $\vec{A} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ | **التمرين 5.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي إلى الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ : $\vec{A} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.6**<br>Convertir le vecteur suivant des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ en coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\varphi\vec{u}_\varphi + V_z\vec{u}_z$ | **تمرين 6.3**<br>حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\varphi\vec{u}_\varphi + V_z\vec{u}_z$ |

| **Exercice 3.7** | **التمرين 7.3:** |
| --- | --- |
| Trouver la distance entre les deux points $M(\rho_M, \varphi_M, z_M)$ et $N(\rho_N, \varphi_N, z_N)$ par les deux méthodes :<br>1/ en convertissant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes.<br>2/ par le calcul direct.<br>Montrer que la distance entre les points $M$ et $N$ s'écrit :<br>$\left\Vert\overrightarrow{MN}\right\Vert = \sqrt{\rho_N^2 + \rho_M^2 + (z_N - z_M)^2 - 2\rho_N.\rho_M.\cos(\varphi_M - \varphi_N)}$ | جد عبارة المسافة بين نقطتين $M(\rho_M, \varphi_M, z_M)$ و $N(\rho_N, \varphi_N, z_N)$ و ذلك بالطريقتين المختلفتين:<br>1/ بتحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى الإحداثيات الكارتيزية،<br>2/ بالحساب المباشر. بين أن المسافة بين النقطتين $M$ و $N$ تكتب بالشكل التالي:<br>$\left\Vert\overrightarrow{MN}\right\Vert = \sqrt{\rho_N^2 + \rho_M^2 + (z_N - z_M)^2 - 2\rho_N.\rho_M.\cos(\varphi_M - \varphi_N)}$ |

## Corrigés des exercices 3.1 à 3.7 حلول التمارين من 1.3 إلى 7.3

**Exercice 3.1:**

Si l'expression du vecteur en coordonnées cartésiennes est $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, alors, il est possible d'écrire l'expression du même vecteur en coordonnées polaires sous la forme : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$. Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}_\varphi$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on peut déterminer les valeurs $V$ et $V_\varphi$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

En organisant la dernière équation :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)$$

Ainsi nous aboutissons à un système de deux équations à deux inconnues $V$ et $V_\varphi$ :

$$\begin{cases} V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi = X \\ V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi = Y \end{cases}$$

Après résolution on trouve :

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;\; ; \;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V}$ est donc :

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

Nous constatons que, pour trouver les deux résultats précédents, il y a beaucoup de calculs à faire si on suit la méthode algébrique ordinaire. Il est plus facile et plus rapide si on opte pour la méthode des matrices. Rappelons brièvement cette dernière méthode :
On part de l'étape où nous avons obtenu les deux équations :

$$X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$

Nous créons une matrice de déplacement :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Le résultat est :

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;\; ; \;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ en coordonnées polaires est donc :

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

**Exercice 3.2:**

Le vecteur s'écrit : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, il s'écrit $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Rappelons-nous des expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

D'où en remplaçant :

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) +$$
$$V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons et organisons la dernière équation pour trouver l'expression du vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) +$$
$$\vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

Les coordonnées cartésiennes sont :

$$X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$
$$Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta$$

Le vecteur $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$ s'écrit donc dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V} = &\left(V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi\right)\vec{j} + \\ &\left(V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta\right)\vec{k}\end{aligned}}$$

**<u>Exercice 3.3</u>:**

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

En organisant l'expression obtenue elle devient :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

On obtient un système d'équations de trois équations à trois inconnues $V_\rho$, $V_\varphi$ et $V_z$

$$\begin{cases} X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_z \end{cases}$$

On a le droit de choisir la méthode que nous maîtrisons le mieux pour arriver au résultat attendu. Si on choisit la méthode des matrices le raisonnement est le suivant :

On crée une matrice de déplacement à partir du système d'équations obtenu :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Le résultat se déduit directement :

$$\boxed{V_\rho = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;\; ; \;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi} \;\; ; \;\; \boxed{V_z = Z}$$

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_\rho + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi + Z\vec{u}_z}$$

**<u>Exercice 3.4</u>:**

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , on peut écrire :

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) +$$
$$V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons puis organisons l'équation précédente pour obtenir :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) +$$
$$\vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

On constitue un système de trois équations à trois inconnues $V$ , $V_\theta$ et $V_\varphi$ :

$$\begin{cases} X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta \end{cases}$$

Si on choisit la méthode des matrices, qui a fait preuve d'à aboutir au résultat escompté très facilement et très rapidement, on doit d'abord construire la matrice de déplacement à partir du système d'équations précédent :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$\boxed{V_r = X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta} \;;\; \boxed{V_\theta = X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta}$$

$$\boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

En fin de compte l'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ en coordonnées sphériques est :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V} = &\left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \\ &\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi\end{aligned}}$$

**Exercice 3.5:**

Commençons par transformer le vecteur $\vec{B} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = \rho^2\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + \cos\varphi\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right)$$

En développant et en organisant l'équation, nous obtenons l'expression du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = \vec{i}\left(\underbrace{\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{0}_{Z}\vec{k}$$

$$X = \rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi \;;\; Y = \rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi \;;\; Z = 0$$

On doit maintenant transformer cette dernière expression en coordonnées sphériques en faisant appel au résultat de l'exercice 3.4 :

$$\begin{aligned}\vec{A} = &\left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \\ &\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $X, Y, Z$ par leurs valeurs respectives trouvées ci-dessus :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A} = &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_r + \\ &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi\right)\cos\theta\cos\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_\theta + \\ &\left[\left(-\rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\varphi\right]\vec{u}_\varphi\end{aligned}}$$

**Exercice 3.6:**

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ est $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$. Partant des expressions connues des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

Organisée elle devient :

$$\vec{V}=\vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right)+\vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)+\underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

Par identification nous arrivons à :

$$X=V_r\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y=V_r\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi$$
$$Z=V_z$$

Le résultat final est : $\boxed{\vec{V}=\vec{i}\left(V_r\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi\right)+\vec{j}\left(V_r\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi\right)+\vec{k}V_z}$

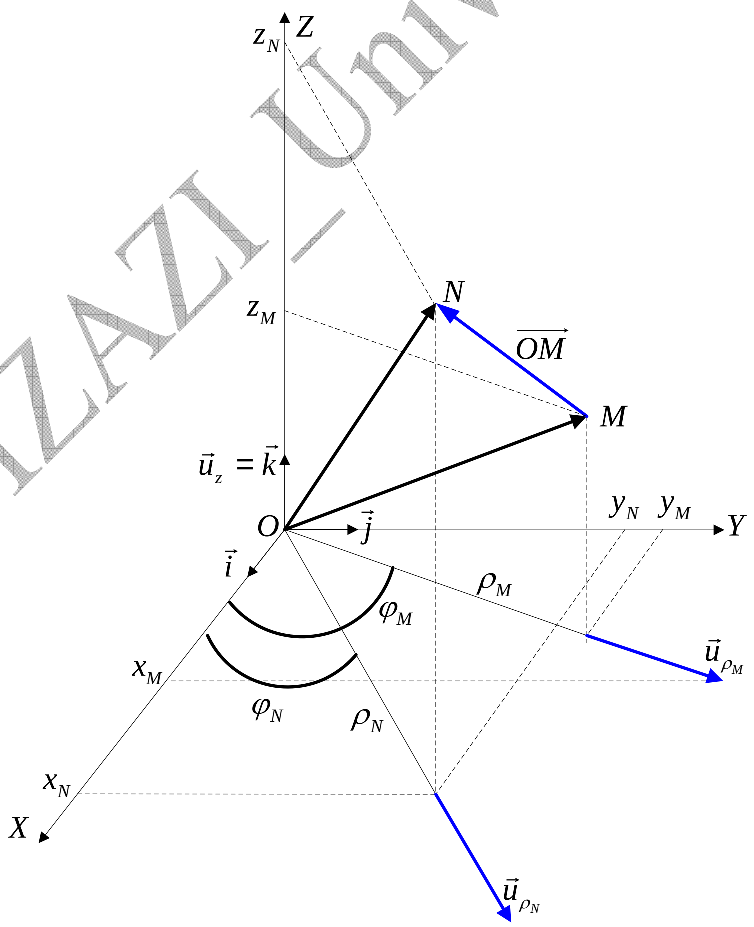
**Exercice 3.7**:

**1/ Première méthode** : Trouver la distance entre les deux points $M(\rho_M,\varphi_M,z_M)$ et $N(\rho_N,\varphi_N,z_N)$ en transformant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes.

La figure montre que la distance entre les points $M$ et $N$ est égale au module du vecteur $\overrightarrow{MN}$ :

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N}+z_N\vec{u}_z\right)-\left(\rho_M\vec{u}_{\rho_M}+z_M\vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N}-\rho_M\vec{u}_{\rho_M}\right)+\left(z_N\vec{u}_z-z_M\vec{u}_z\right)\rightarrow(1)$$



Expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ et $\vec{u}_z$ :

$$\vec{u}_{\rho_N} = \vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N$$

$$\vec{u}_{\rho_M} = \vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M$$

$$\vec{u}_z = \vec{k}$$

Remplaçons $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ dans l'équation $(1)$ :

$$\overrightarrow{MN} = \rho_N\left(\vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N\right) - \rho_M\left(\vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M\right) + \left(z_N\vec{u}_z - z_M\vec{u}_z\right)$$

Nous organisons l'équation pour qu'elle devienne :

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N\cos\varphi_N - \rho_M\cos\varphi_M\right)\vec{i} + \left(\rho_N\sin\varphi_N - \rho_M\sin\varphi_M\right)\vec{j} + \left(z_N - z_M\right)\vec{k}$$

La distance entre les points $M$ et $N$ st égale à la norme du vecteur $\overline{MN}$ :

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\left(\rho_N\cos\varphi_N - \rho_M\cos\varphi_M\right)^2 + \left(\rho_N\sin\varphi_N - \rho_M\sin\varphi_M\right)^2 + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

Après calculs nécessaires on trouve :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^{\ 2} + \rho_M^{\ 2} - \left[2\rho_N.\rho_M\left(\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M\right)\right] + \left(z_N - z_M\right)^2}} \to (2)$$

**2/ <u>Deuxième méthode</u>** : trouver la distance entre les points $M\left(\rho_M, \varphi_M, z_M\right)$ et $N\left(\rho_N, \varphi_N, z_N\right)$ par le calcul direct :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N} + z_N\vec{u}_z\right) - \left(\rho_M\vec{u}_{\rho_M} + z_M\vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N} - \rho_M\vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N - z_M\right)\vec{u}_z$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^{\ 2} + \rho_M^{\ 2} - 2\rho_N.\rho_M\cos(\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}) + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

D'après la figure, nous voyons que l'angle compris entre les deux vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ est égal à $\varphi_N - \varphi_M$. Nous obtenons donc:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^{\ 2} + \rho_M^{\ 2} - 2\rho_N.\rho_M\cos(\varphi_N - \varphi_M) + \left(z_N - z_M\right)^2}} \to (3)$$

Pour vérifier que les deux résultats $(2)$ et $(3)$ sont compatibles, il suffit de procéder à une transformation trigonométrique adéquate de l'équation $(2)$ :

$$\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M = \cos\left(\varphi_N - \varphi_M\right) = \cos\left(\varphi_M - \varphi_N\right)$$

# IV/CINEMATIQUE
# علـــم الـــحـــركـــيـات

## A-IV/ CARACTERISTIQUES DU MOUVEMENT
## مميزات الحركة

### 1/ INTRODUCTION (مقدمة)

- La cinématique est l’étude des mouvements sans se préoccuper des causes responsables de ces mouvements (comme les forces par exemple…)
- Le point matériel est tout corps matériel dont les dimensions sont théoriquement nulles et pratiquement négligeables par rapport à la distance parcourue.

L’état de mouvement ou de repos d’un corps sont deux notions essentiellement relatives : par exemple une montagne est au repos par rapport à la terre mais en mouvement par rapport à un observateur qui regarde la terre de loin et pour lequel le globe terrestre (avec tout ce qu’il renferme) est en perpétuel mouvement.

Quiconque veut étudier un mouvement doit à priori s’imposer un référentiel (ou un repère) par rapport auquel le mouvement est analysé. Ceci se traduit par le fait qu’un mouvement ne peut se définir que par rapport à un repère.

Cette étude du mouvement s’effectue selon l’une des deux formes :

- **vectorielle :** en utilisant les vecteurs : position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et l’accélération $\vec{a}$.
- **algébrique** : en définissant l’équation du mouvement suivant une trajectoire donnée.

### 2/ POSITION DU MOBILE (موضع المتحرك):

La position d’un point matériel $M$ au temps $t$ est repérée dans un repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (figure 4.1). La formule 4.1 exprime le vecteur position en coordonnées cartésiennes.

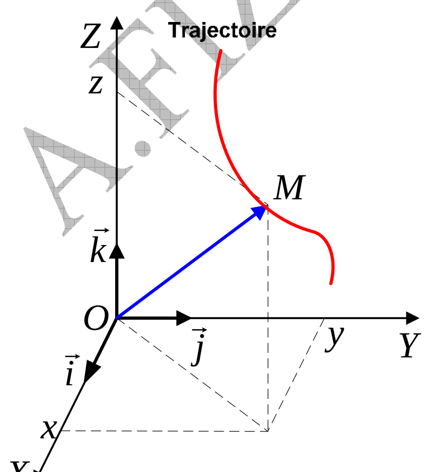



Fig 4.1: vecteur position

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}} \qquad (4.1)$$

## 3/ LES EQUATIONS HORAIRES (المعادلات الزمنية):

Un point matériel est au **repos** dans un repère choisi si ses coordonnées $x, y, z$ sont indépendantes du temps, et il est en **mouvement** si ses coordonnées varient en fonction du temps.

(On a choisi des coordonnées cartésiennes, mais on aurait pu choisir n'importe quelles autres coordonnées).

Ces coordonnées peuvent être notées par :

$$\boxed{x(t), y(t), z(t)} \qquad \textbf{(4.2)}$$

On appelle ces fonctions, les **équations horaires** du mouvement. On peut les exprimer sous la forme :

$$\boxed{x = f(t), y = g(t), z = h(t)} \qquad \textbf{(4.3)}$$

### ➢ La trajectoire (المسار )

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par le mobile au cours de son mouvement pendant des instants successifs. La trajectoire peut être matérielle ( la route suivie par une automobile par exemple ) ou imaginaire (trajectoire de la lune par exemple).

L'étude d'un mouvement plan se fait en coordonnées rectangulaires dans le repère $R(O;\vec{i}, \vec{j})$ où la position est définie par les deux coordonnées : $x(t), y(t)$

La fonction $x \mapsto y(x)$ s'appelle **équation cartésienne de la trajectoire (المعادلة الكارتيزية للمسار).**

**On obtient l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les deux équations horaires.**

**Exemple 4.1 :** Les équations horaires du mouvement d'un point matériel tiré dans l'espace sont $x = 2t$ ; $y = 0$ ; $z = -5t^2 + 4t$ (toutes les unités sont dans le système international).

1/ Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire, quelle est sa forme ?
2/ Ecrire l'expression du vecteur position au temps $t = 2s$

**Réponse :**

1/ On tire $t$ de l'équation de $x$ qu'on remplace dans $z$ :

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$\boxed{z = -1.25.x^2 + 2.x}$ C'est l'équation d'une parabole.

2/ Expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = (2t).\vec{i} + (-5t^2 + 4t).\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}}$$

**Exemple 4.2 :** Le mouvement d'un point matériel est défini dans un repère cartésien par ses deux équations horaires :

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)$$
$$y = a\cos(\omega t + \varphi)$$

Quelle est donc la trajectoire suivie ?

**Réponse :**

En élève au carré les deux équations, puis on fait la somme membre à membre pour aboutir à l'équation d'un cercle de rayon $a$ :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = a^2\sin^2(\omega.t + \varphi) \\ y^2 = a^2\cos^2(\omega.t + \varphi) \end{array}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

## 4/ LE VECTEUR VITESSE (شعاع السرعة):

On considère que la vitesse est la distance parcourue par unité de temps.

❖ **Vecteur vitesse moyenne (شعاع السرعة المتوسطة)**

Regardons la figure 4.2 : entre l'instant $t$ où le mobile occupe la position $M$, et l'instant $t'$ où le mobile occupe la position $M'$, le vecteur vitesse moyenne est défini comme étant l'expression 4.4.

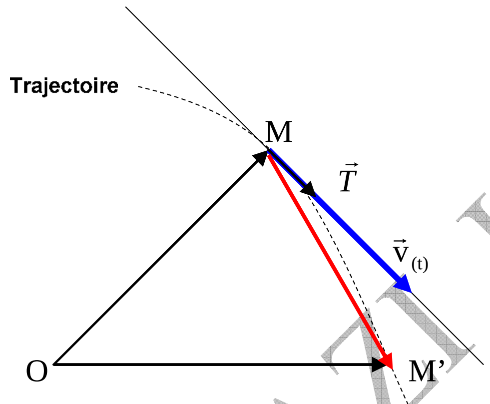



Fig 4.2

$$\boxed{\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} \quad ; \quad v_{moy} = \frac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta t}} \qquad \textbf{(4.4)}$$

$\overrightarrow{MM'}$ s'appelle le vecteur déplacement

❖ **Vecteur vitesse instantanée (شعاع السرعة اللحظية)**

Le vecteur vitesse instantanée, c'est à dire au temps $t$, est la dérivée **(مشتقة)** du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}_t = \lim_{t\to t'} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t-t'} = \lim_{t'\to t} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \boxed{\vec{v}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \qquad \textbf{(4.5)}$$

✓ **IMPORTANT : Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_{(t)}$ est porté par la tangente à la trajectoire au point $M$ ; il est toujours orienté dans le sens du mouvement** (Figure 4.3).

Dans le repère cartésien par exemple, on en déduit l'expression du vecteur vitesse instantanée à partir de l'expression du vecteur position en dérivant :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}} \qquad \textbf{(4.6)}$$

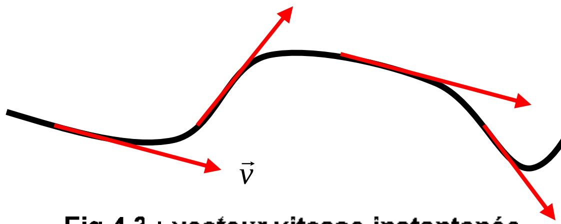



**Fig 4.3 : vecteur vitesse instantanée**

✓ **CONVENTIONS (مصطلحات )**

- Notation de Newton : on note la dérivée par rapport au temps en mettant un point sur le symbole de la variable. Si la dérivée est par rapport à une variable autre que le temps, la notation est de mettre une apostrophe(') après le symbole de la variable à dériver.
- Notation de Leibnitz : On note la dérivée de $y$, par exemple, par rapport au temps, par $\frac{dy}{dt}$ .

Ainsi nous pouvons écrire $\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$

❖ **Module du vecteur vitesse instantanée (شدة شعاع السرعة اللحظية)**

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \qquad \textbf{(4.7)}$$

L'unité de la vitesse dans le système international $MKS$ est $m/s = m.s^{-1}$ .

Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes sont donc :

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R$$

## 5/ LE VECTEUR ACCELERATION (شعاع التسارع):

Nous considérons que l'accélération est la variation de la vitesse par unité de temps.

❖ **Vecteur accélération moyenne (شعاع التسارع المتوسط)**

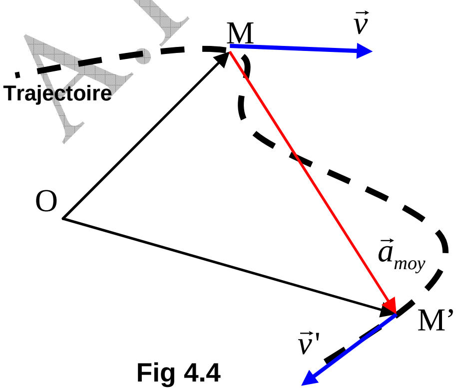



**Fig 4.4**

$$\boxed{\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \qquad a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}} \qquad \textbf{(4.8)}$$

En considérant deux instants différents $t$ et $t'$ correspondants aux vecteurs position

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ et les vecteurs vitesse instantanée $\vec{v}$ et $\vec{v}'$(figure 4.4), le vecteur accélération moyenne est défini par l'expression 4.8

❖ **Vecteur accélération instantanée (شعاع التسارع اللحظي)**

Le vecteur accélération instantanée d'un mouvement est défini comme étant la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps.

$$\vec{a} = \lim_{t'\to t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \lim_{t'-t} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}} \qquad \textbf{(4.9)}$$

On peut écrire maintenant en résumé les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes, avec les conventions de Newton et Leibnitz :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}.\vec{i} + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}} \quad (4.10)$$

**Important : Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la partie concave de la trajectoire**. (figure4.5)

❖ **Module du vecteur accélération instantanée (طويلة شعاع التسارع اللحظي)**

Ce module est donné par la formule 4.11

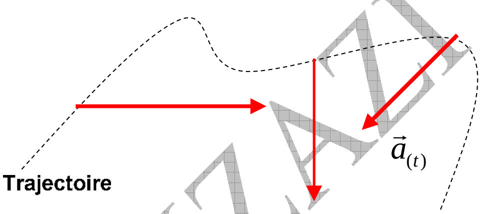



**Fig 4.5 : vecteur accélération**

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \qquad \textbf{(4.11)}$$

**CONCLUSION :** Dans un repère cartésien les vecteurs position, vitesse et accélération sont :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \to \vec{v} \begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R \to \vec{a} \begin{pmatrix} \ddot{x} = \dot{v}_x = a_x \\ \ddot{y} = \dot{v}_y = a_y \\ \ddot{z} = \dot{v}_z = a_z \end{pmatrix}_R \qquad \textbf{(4.12)}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \to \vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k} \to \vec{a} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}$$

**Remarque :** Le mouvement est dit accéléré si $\vec{a}.\vec{v} \succ 0$, et décéléré ou retardé si $\vec{a}.\vec{v} \prec 0$. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le sens de la vitesse $\vec{v}$ .

**Exemple 4.3 :** Soit le vecteur position $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{pmatrix}$. En déduire le vecteur vitesse et le vecteur accélération instantanées, puis calculer le module de chacun d'eux.

**Réponse :** Nous dérivons deux fois de suite l'expression du vecteur position pour obtenir les vecteurs demandés et ensuite nous déduisons leurs modules :

$$\vec{v} = 4t.\vec{i} + 4\vec{j} + 3t^2\vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$v = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4} \quad , \quad a = \sqrt{16 + 36t^2}$$

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

| Exercice 4.1 | التمرين1.4 |
|---|---|
| Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire : $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$.<br>a/ Calculer la vitesse et l'accélération à la date $t$.<br>b/ Etudier le mouvement du point lorsque t croît de $0$ à $+\infty$.(Dire dans quel sens se déplace le point et si le mouvement est accéléré ou retardé). | الحركة المستقيمة لنقطة مادية محددة بالمعادلة الزمنية: $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$<br>ا/ أحسب السرعة و التسارع في اللحظة t.<br>ب/ أدرس حركة النقطة لمّا يزداد الزمن $t$ من $0$ إلى $+\infty$.( وضّح في أي اتجاه تنتقل النقطة و هل الحركة متسارعة أو متباطئة). |

| Exercice 4.2 | التمرين:2.4 |
|---|---|
| Déterminer la trajectoire du mouvement plan défini par les équations :<br>$x = \sin^2 t$ ; $y=1+cos2t$<br>Dessiner cette trajectoire dans le repère $Oxy$. | عيّن مسار الحركة المستوية المعرّفة بالمعادلتين: $x = \sin^2 t$ ; $y=1+cos2t$ .<br>أرسم هذا المسار في المعلم $Oxy$. |

| Exercice 4.3 | تمرين:3.4 |
|---|---|
| Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le mouvement d'un mobile $M$ est défini par les équations suivantes : $x = t^3 - 3t$ ; $y=-3t^2$ ; $z=t^3 + 3t$<br>a/ Calculer les coordonnées à la date t, du vecteur vitesse $\vec{v}$, et celles du vecteur accélération $\vec{a}$, du mobile M.<br>b/ Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$ et montrer que ce vecteur fait un angle constant avec $Oz$. | في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، تحدّد الحركة لمتحرّك $M$ بالمعادلات التالية:<br>$x = t^3 - 3t$ ; $y=-3t^2$ ; $z=t^3 + 3t$<br>ا/ أحسب في اللحظة $t$ إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ ، و شعاع التسارع $\vec{a}$ ، للمتحرّك $M$.<br>ب/ أحسب طويلة الشعاع $\vec{v}$ و بيّن أن هذا الشعاع يصنع زاوية ثابتة مع $Oz$. |

| Exercice4.4 | تمرين 4.4: |
|---|---|
| Un point est mobile dans le plan à partir de la date $t = 1$. Ses équations horaires sont :<br>$x = \ln t$ ; $y=t+\frac{1}{t}$.<br>a/Ecrire l'équation de la trajectoire.<br>b/ Calculer les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération au temps $t$. | تنتقل نقطة في مستوى ابتداء من اللحظة $t = 1$. معادلتاه الزمنيتان هما:<br>$x = \ln t$ ; $y=t+\frac{1}{t}$<br>ا/ أكتب معادلة المسار.<br>ب/ أحسب القيم الجبرية للسرعة و التسارع في اللحظة $t$. |

**Exercice 4.5**

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, un mobile $M$ décrit dans le sens direct l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Le point $M$ est repéré sur l'ellipse par l'angle $\varphi$.

Déterminer les vecteurs vitesse et accélération $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ en fonction des dérivées $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$.

**التمرين5.4:**

في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\right)$، يرسم متحرّك في الاتجاه المباشر نصف قطع زائد معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. تعيّن النقطة $M$ على القطع الزائد بالزاوية $\varphi$. حدّد شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{\gamma}$ بدلالة المشتقتين $\dot{\varphi}$ و $\ddot{\varphi}$.

**Exercice 4.6**

Soit, dans un plan $(P)$, un repère orthonormé $xOy$ et un mobile $M$ se déplaçant dans ce plan. A la date $t$, ses coordonnées sont définies par :

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\ \ ;\ \ y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

a/ Quelle est la trajectoire ?

b/ Calculer les coordonnées à la date $t$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ de ce mobile. Quelle relation y a- t- il entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$ ? Au bout de combien de temps le mobile repasse-il par une même position sur la courbe ?

c/ Entre les dates $t_1=0$ et $t_2=4\pi$, déterminer les positions du mobile et les coordonnées de $\vec{v}$ pour avoir un vecteur accélération de longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

**التمرين 6.4:**

ليكن في مستوى $(P)$، معلم متعامد و متجانس $xOy$ و متحرّك $M$ ينتقل في هذا المستوى. في اللحظة $t$ ، إحداثياه معرفتان بـــ:

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\ \ ;\ \ y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

ا/ما هو مساره؟

ب/ أحسب إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ لهذا المتحرّك في اللحظة $t$. ما هي العلاقة الموجودة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{a}$ ؟ ما هي المدة اللازمة حتى يمرّ المتحرك من نفس الموضع من المنحنى ؟

ج/ بين اللحظتين $t_1=0$ و $t_2=4\pi$ ، حدّد مواقع المتحرّك و كذا إحداثيتي $\vec{v}$ حتى تكون طويلة التسارع $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

## Corrigés des exercices 4.1 à 4.7 — حلول التمارين من 1.4 إلى 7.4

**Exercice 4.1** :

1/ Pour calculer la vitesse il suffit de dériver l'équation horaire par rapport au temps :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12}$$

En dérivant la vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération :

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18}$$

2/ L'étude du mouvement du mobile nécessite une étude mathématique de la fonction $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$. Le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe du produit $av$. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le signe de $v$.

Dressons le tableau de variation :

$v = 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1$ ; $t=2$ ; $a = 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1,5$

| $t$ | 0 | | 1 | | 1,5 | | 2 | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $a$ | | − | | − | 0 | + | | + | |
| $a.v$ | | − | | + | | − | | + | |
| **Mouvmt** | | **Retardé sens +** | | **Accéléré sens -** | | **Retardé sens -** | | **Accéléré sens +** | |

**Exercice 4.2 :**

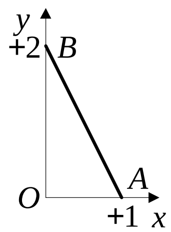
Commençons par la transformation trigonométrique : $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$,

Remplaçons dans l'expression de $y$ qui devient : $y = 2\cos^2 t$,

Une autre transformation trigonométrique nous mène à : $y = 2\left(\sin^2 t - 1\right)$,

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $\sin^2 t$ par $x$ pour obtenir l'équation de la trajectoire qui est : $\boxed{y = 2\left(1 - x\right)}$.

Pour dessiner la trajectoire il faut remarquer que $0 \le x \le +1$, car quelque soit $t$, $0 \le \sin^2 t = x \le +1$. Nous en déduisons que la trajectoire est un segment de droite joignant les points $A\left(+1, 0\right)$ et $B\left(0, +2\right)$.




**Exercice 4.3 :**

Deux dérivations consécutives des équations horaires nous conduisent aux expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant $t$ :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = 3\left(t^2-1\right) \\ v_y = \dot{y} = -6t \\ v_z = \dot{z} = 3\left(t^2+1\right) \end{cases} \quad ; \quad \vec{a}=\begin{cases} a_x = \ddot{x} = 6t \\ a_y = \ddot{y} = -6 \\ a_z = \ddot{z} = 6t \end{cases}$$

2/ Le module du vecteur vitesse est égal à $v^2 = 18\left(1+t^2\right)^2 \Rightarrow \boxed{v = 3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)}$

Calculons maintenant l'angle compris entre $\vec{v}$ et $Oz$ . Pour cela calculons le module du produit scalaire :

$$\vec{v}.\vec{k} = v.k.\cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = v.cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) \quad , \quad cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}.\,\vec{k} = \left(\dot{x}.0\right)+\left(\dot{y}.0\right)+\left(\dot{z}.0\right) = 3\left(1+t^2\right)$$

$$cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v} = \frac{3\left(1+t^2\right)}{3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)} \Rightarrow cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{v},Oz\right) = \frac{\pi}{4}rad}$$

**Exercice 4.4 :**

a/ Eliminons le temps entre les deux équations horaires pour obtenir l'équation de la trajectoire :

$$x = \ln t \Rightarrow t = e^x$$

$$y = e^x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow \boxed{y = e^x + e^{-x}}$$

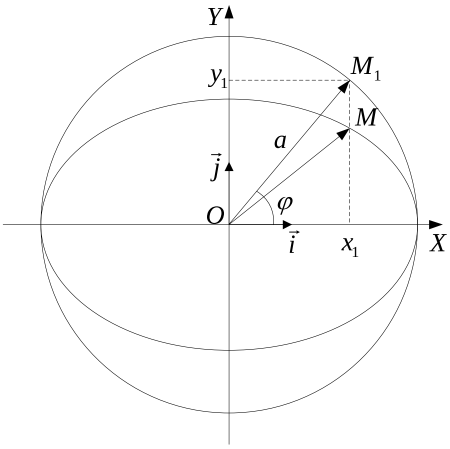
b/ calculons les modules de la vitesse et de l'accélération au temps $t$ par dérivations successives des deux équations horaires par rapport au temps :

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \dfrac{1}{t} \\ v_y = 1-\dfrac{1}{t^2} \end{array}\right| \Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + 1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = -\dfrac{1}{t^2} \\ a_y = \dfrac{2t}{t^4} = \dfrac{2}{t^3} \end{array}\right| \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{a = \sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{1}{t^4}}}$$

**Exercice 4.5 :**

**Rappel mathématique concernant l'ellipse :** suivons le raisonnement qui accompagne la figure ci-dessous :




*Equation du cercle* $x^2 + y^2 - a^2 = 0 \rightarrow (1)$

*Equation de l'ellipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \rightarrow (2)$

*Coordonnées du point M:* $\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi \\ y_1 = a\sin\varphi \end{cases}$

*remplaçons x et y dans l'équation* $(1)$ :

$\forall M,\ a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi - a^2 = 0 \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0 \rightarrow (3)$

*Par identification des équations* $(2)$ *et* $(3)$ *nous obtenons deux résultats importants qui caractérisent l'ellipse:*

$(2) = (3) : \cos\varphi = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = a\cos\varphi}\ ,\quad \sin\varphi = \dfrac{y}{b} \Rightarrow \boxed{y = b\sin\varphi}$

Maintenant que nous avons les coordonnées du point $M$ , nous pouvons repérer ce point sur l'ellipse par l'angle $\varphi$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{x}{a}$ ; $\sin\varphi = \dfrac{y}{b}$

La vitesse du point $M$ est égale à :

$$\overrightarrow{OM} = a\cos\varphi.\vec{i} + b\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi.\vec{i} + b\dot{\varphi}\cos\varphi.\vec{j}}$$

L'accélération du point $M$ est : $\boxed{\vec{\gamma} = -a\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).\vec{i} + b\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).\vec{j}}$

**Exercice 4.6 :**

1/ Pour obtenir l'équation de la trajectoire il suffit d'éliminer le temps entre les équations horaires :

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{t}{2} &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \sin\frac{t}{2} &= \frac{y}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1}$$

La trajectoire est donc une **ellipse**.

2/ En dérivant les équations horaires par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur vitesse :

$$\vec{v}_x = \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\vec{v}_y = \dot{y} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$$

En dérivant les deux composantes du vecteur vitesse par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur accélération :

$$\vec{a}_x = \dot{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{t}{2}$$

$$\vec{a}_y = \dot{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

Ecrivons à présent l'expression vectorielle de l'accélération pour trouver sa relation avec le vecteur position :

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}x.\vec{i} - -\frac{1}{4}y.\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{4}\left(x.\vec{i} - y.\vec{j}\right) \quad ; \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}}$$

Puisque la trajectoire est une ellipse, le mouvement va se répéter à l'infini pour une variation du temps de $0$ à $\infty$.

Soit $T$ l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du mobile par la même position et dans le même sens.

L'abscisse du mobile au temps $t$ est : $x = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$

L'abscisse du mobile au temps $t+T$ est : $x' = \sqrt{2}\cos\frac{(t+T)}{2}$

Puisque le mouvement est périodique il faut que $x = x'$ :

$$cos\alpha = cos(\alpha + 2\pi) \;\; ; \quad \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{(t+T)}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 4\pi}$$

3/ Position du mobile et ses coordonnées pour une accélération de module $\frac{\sqrt{5}}{4}$ :

$$a = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$a^2 = \frac{2}{16}\cos^2\frac{t}{2} + \frac{2}{4}\sin^2\frac{t}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow 2\cos^2\frac{t}{2} + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5$$

$$2\left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right) + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5 \Rightarrow 6\sin^2\frac{t}{2} = 3 \Rightarrow \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{t}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; , \; t \succ 0 \;\; ; \; \frac{t}{2} = \left| \begin{array}{l} +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ +\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right.$$

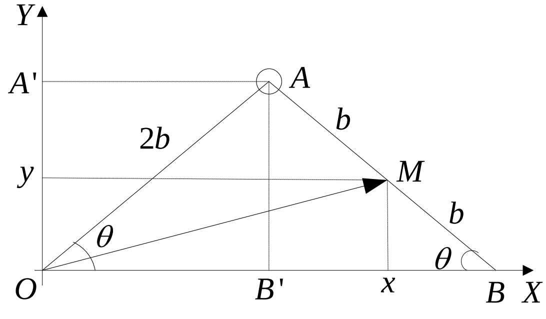
En prenant en considération la condition $0 \le t \le 4\pi$, nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

| $k$ | $t$ | $x$ | $y$ | $v_x$ | $v_y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $+1$ | $+2$ | $-\frac{1}{2}$ | $+1$ |
| 1 | $\frac{3\pi}{2}$ | $-1$ | $+2$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ |

**<u>Exercice 4.7</u> :**

1/ A l'aide de la figure ci-dessous on écrit l'expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$



Il reste à déterminer les deux équations horaires, c'est-à-dire les coordonnées en fonction du temps :

$$x = \overline{OA} + b\cos\varphi \;\;,\;\; x = 2b\cos\varphi + b\cos\varphi \Rightarrow \;\; x = 3b\cos\varphi$$

$$y = \overline{AA'} - b\sin\varphi \;\;,\;\; y = 2b\sin\varphi - b\sin\varphi \;\; \Rightarrow y = b\sin\varphi$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}\,.3b\cos\varphi + \vec{j}.b\sin\varphi}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les équations horaires :

$$\left.\begin{matrix} x^2 = 9b^2\cos^2\varphi \\ y^2 = b^2\sin^2\varphi \end{matrix}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9b} = \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ C'est l'équation d'une ellipse.

2/ La deuxième dérivée du vecteur position par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \omega^2\left(\vec{i}\,.3b.\cos\omega t + \vec{j}.b.\sin\omega t\right) \;\; \Leftrightarrow \;\; \vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

D'où le module de cette accélération :

$$a = 9b^2.\cos^2\omega t + b^2.\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{a = b\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}}$$

# B-IV/ MOUVEMENTS RECTILIGNES
# الــحــركــات الــمــســتــقــيــمــة

## 1/ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME (الحركة المستقيمة المنتظمة)

- **Définition : Un point matériel est en mouvement rectiligne niforme si sa trajectoire est une droite et son vecteur vitesse constant (donc son vecteur accélération nul).**
- **Equation horaire :** on choisit l'axe $OX$ comme repère rectiligne et on fixe la condition initiale $t=0$ ; $x=x_0$ (abscisse initiale).

Partant de la définition ci-dessus, et grâce à une intégration on arrive à exprimer l'abscisse $x$ en fonction du temps :

$$v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=v_0 \Rightarrow dx=v_0.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0}^{t} v_0.dt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x}=v_0 t\Big|_0^t \quad \Rightarrow x-x_0=v_0 t$$

Dans une dernière étape on obtient l'équation horaire du mouvement rectiligne qui est une fonction du temps de premier degré:

$$\boxed{x=v_0.t+x_0} \qquad \textbf{(4.13)}$$

On appelle $x$ l'abscisse instantanée, et $x_0$ l'abscisse initiale.

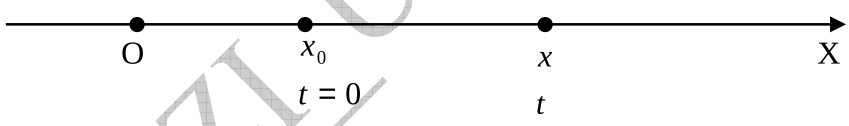



**Fig 4.6 repère rectiligne**

- **Diagrammes du mouvement**(مخططات الحركة)

Les diagrammes du mouvement rectiligne uniforme sont la représentation graphique de l'accélération, de la vitesse et du déplacement en fonction du temps. (Figure 4.7)

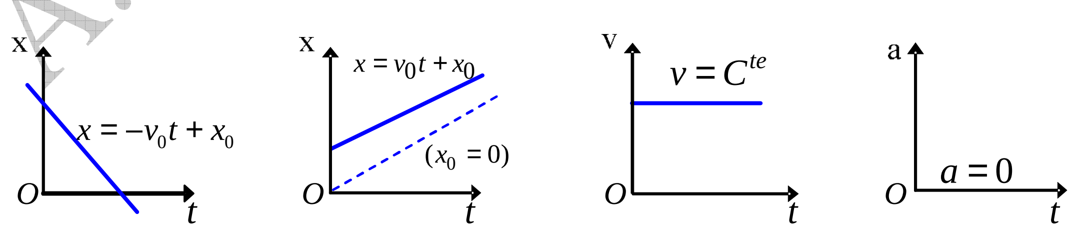



**Fig 4.7 : Diagrammes du mouvement**

**Exemple 4.4 :** Les équations horaires du mouvement d'un point matériel sont $x=2t$ ; $y=2t+4$ ; $z=0$ (toutes les unités sont dans le système international). Montrer que le mouvement est rectiligne et uniforme.

**Remarque :** Dans un repère cartésien, si l'une des coordonnées est nulle le mouvement est dit plan (mais il peut être rectiligne aussi) ; si deux coordonnées sont nulles le mouvement ne peut être que rectiligne ; si les trois coordonnées sont différents de zéro, dans ce cas le mouvement est dit spatial.

**Réponse :** Démontrons d'abord que le mouvement est rectiligne ; pour cela on doit chercher l'équation de la trajectoire. Après élimination du temps entre les deux équations horaires données on trouve : $y = x + 4 \Rightarrow$ équation d'une droite, donc le mouvement est rectiligne.

Pour que ce mouvement soit uniforme il faut que la vitesse soit constante en direction, en sens et en module.

Le vecteur vitesse est $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow v = \sqrt{8} = 2.83ms^{-1}$

Ceci implique que le mouvement est uniforme. En définitif le mouvement est rectiligne et uniforme.

## 2/ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE

**(الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام)**

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante.
- **La vitesse algébrique :** En considérant les conditions initiales $t = 0$ ; $v = v_0$ (vitesse initiale), et partant des définitions précédentes, et en intégrant on peut écrire :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} adt \Rightarrow v\Big|_{v_0}^{v} = at\Big|_{0}^{t}$$

On obtient à la fin l'équation de la vitesse instantanée qui est une fonction du temps de premier degré:

$$\boxed{v = v_0 .t + v_0} \qquad \textbf{(14.4)}$$

- **Equation horaire du mouvement :** Si on prend $t = 0$ ; $x = x_0$ (abscisse initiale), et partant de ce qui précède on écrit :

$$v = \frac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx = (at + v_{0)})dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (at + v_{0)})dt$$

L'équation horaire est donc :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} \qquad \textbf{(15.4)}$$

- **Diagrammes du mouvement :** On voit sur la figure 4.8 les diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié relatifs à l'accélération, la vitesse et le déplacement.

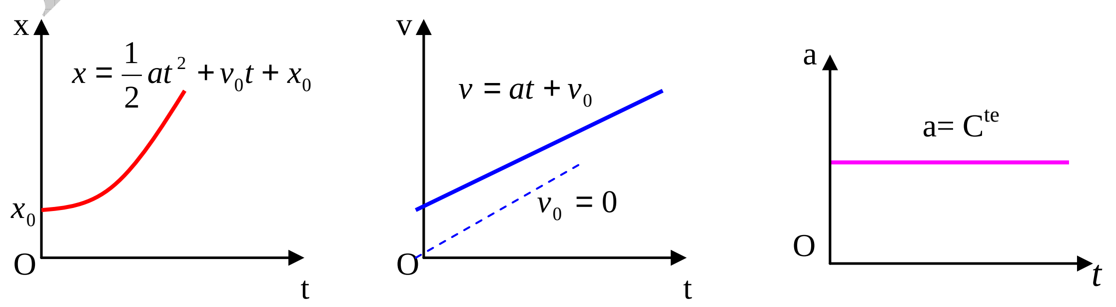



Fig 4.8 : Diagrammes du mouvement

**Laissons à l'étudiant le soin de démontrer à titre d'exercice que :** $v^2 - v_0^{\,2} = 2a(x - x_0)$

**Rappel** : Le mouvement rectiligne est accéléré (متسارعة) si $\vec{a}.\vec{v} > \vec{0}$, et il est retardé (متباطئة) si $\vec{a}.\vec{v} < \vec{0}$

**Exemple 4.5 :** Un corps ponctuel se déplace suivant l'axe $OX$ avec une vitesse d'équation : $v = 2t - 6 \quad (ms^{-1}) \; ; \; t \geq 0$.

a/ En déduire l'équation de l'accélération ainsi que l'équation horaire de ce mouvement sachant qu'à l'instant $t = 0 \; , \; x = 5\text{m}$. Quelle est la nature du mouvement ?

b/ Indiquer les étapes (accélérée et retardée) du mouvement.

**Réponse :** On obtient l'équation de l'accélération en dérivant l'expression de la vitesse par rapport au temps : $a = \dfrac{dv}{dt} = 2ms^{-2}$. L'accélération est constante.

En intégrant l'expression de la vitesse on obtient l'équation horaire :

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v dt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t (2t - 6)$$

$$x = x_0 + t^2 - 6t \; ; \; t = 0 \; , \; x = 5 \Rightarrow x_0 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{x = t^2 - 6t + 5}$$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié

b/ Les phases du mouvement : on dresse le tableau de variation suivant :

| t | 0 | 1 | 3 | 5 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| v | | - | 0 | + | |
| a | | + | | + | |
| x | ↘ | 0 | -4 | 0 | ↗ |
| av | | - | 0 | + | |
| | | Mouvement retardé | * | Mouvement accéléré | |

***Tableau de variation 4.1***

## 2/ MOUVEMENT RECTILIGNE A ACCELERATION VARIABLE

**(الحركة المستقيمة متغيرة التسارع)**

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est dit rectiligne à accélération variable si sa trajectoire est une droite et que son accélération est fonction du temps ($a = f(t)$).

**Exemple 4.6 :** Un corps ponctuel se déplace suivant une droite avec l'accélération $a = 4 - t^2$ (toutes les unités sont dans le système international $MKS$ ).

Trouver les expressions de la vitesse et du déplacement en fonction du temps en considérant les conditions suivantes : $t = 3s \; ; \; v = 2ms^{-1} \; ; x = 9m$

**Réponse :** Pour obtenir l'expression littérale de la vitesse on doit intégrer l'équation de l'accélération :

$$v = \int_0^t a dt + v_0 \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t (4 - t^2) dt \quad v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0$$

Intégrant de nouveau afin d'obtenir l'expression littérale du déplacement :

$$x = x_0 + \int_0^t v dt \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - v_0 t + x_0$$

Il nous reste à déterminer l'abscisse et la vitesse initiales du corps. D'après les données, on remplace dans les expressions obtenues précédemment le temps par $t = 3s$ pour trouver l'abscisse et la vitesse initiales :

$$t = 3s \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}m \quad ; \quad v_0 = -1ms^{-1}$$

En fin de compte, les expressions de la vitesse et du déplacement sont:

$$\boxed{x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}} \qquad \boxed{v = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1}$$

## 3/ MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL (الحركة المستقيمة الجيبية)

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x = X_m.\cos(\omega.t + \varphi)} \qquad \textbf{(16.4)}$$

Ou même $x = X_m.\sin(\omega.t + \alpha)$

$X_m$ : Amplitude ou élongation maximale **(السعة أو المطال الأعظمي),** son unité est le mètre.

$x$ : Élongation ou abscisse instantanée **(الفاصلة أو المطال اللحظي),** elle varie entre deux valeurs extrêmes : $-1 \le \cos(\omega t + \varphi) \le +1 \Rightarrow -X_m \le x \le +X_m$, son unité est le mètre.

$\omega$ : Pulsation du mouvement **(نبض الحركة),** son unité est le **radian/seconde.**

$\varphi$ : Phase initiale **(الطور الإبتدائي أو الصفحة الإبتدائية),** son unité est le **radian.**

$\omega t + \varphi$ : Phase instantanée **(الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية),** son unité est le **radian.**

- **La vitesse :** En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée : $v = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

$$\boxed{v = -X_m.\omega\sin(\omega t + \varphi)} \qquad \textbf{(17.4)}$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$-1 \le \sin(\omega t + \varphi) \le +1 \Rightarrow -X_m.\omega \le v \le +X_m.\omega$$

- **L'accélération :** En dérivant l'équation de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée :

$$a = \ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{a = -X_m\omega^2\cos(\omega.t + \varphi)} \qquad \textbf{(18.4)}$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$+X_m\omega^2 \ge a \ge -X_m\omega^2$$

Nous pouvons écrire l'expression de l'accélération sous la forme :

$$\boxed{a = -\omega^2.x} \qquad \textbf{(19.4)}$$

L'accélération est proportionnelle à l'élongation avec un signe opposé.

Contrairement à la vitesse, l'accélération s'annule au passage du mobile par la position d'équilibre (origine des abscisses), et prend une valeur maximale lorsque l'élongation est maximale. Nous avons résumé sur la figure 4.9 les principales caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal.

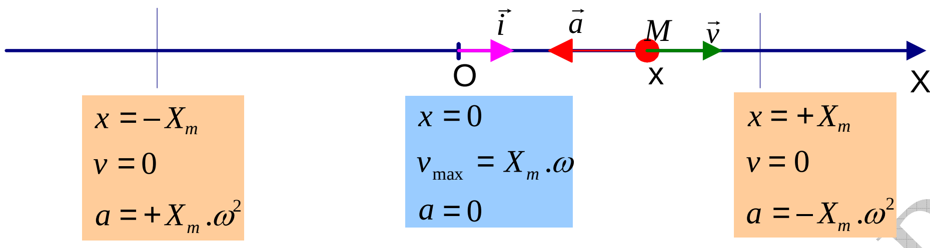



**Fig 4.9**

➢ **Equation différentielle du mouvement (المعادلة التفاضلية للحركة) :**
L'équation de l'accélération peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0} \qquad \textbf{(20.4)}$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

La solution mathématique de cette équation différentielle est de la forme :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Après transformation trigonométrique nous pouvons écrire : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

$X_m$ et $\varphi$ sont les constantes différentielles qui sont déterminées grâce aux conditions initiales sur l'élongation $x_0$ et la vitesse $v_0$ ; d'où l'on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui nous permet de déterminer $X_m$ et $\varphi$.

$$t = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x_0 = X_m \cos\varphi \\ v_0 = -X_m \sin\varphi \end{array} \right.$$

➢ **Les diagrammes du mouvement :** La figure 4.10 représente les diagrammes du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal (pour simplifier nous avons choisi $\varphi = 0$ ).

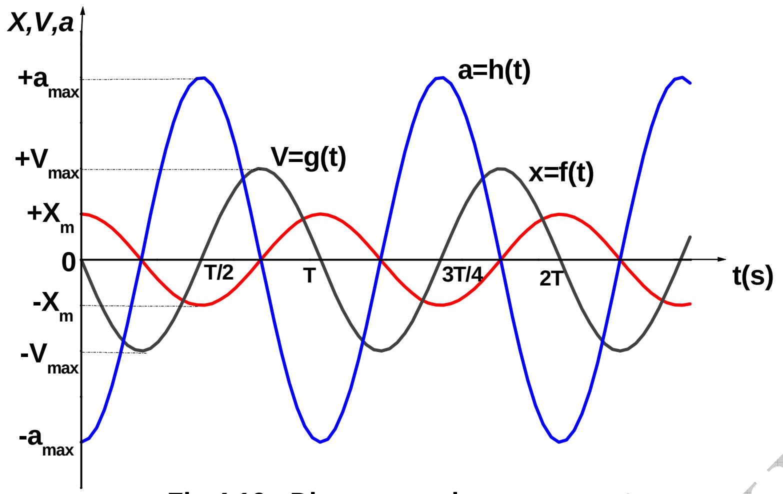



**Fig 4.10 : Diagramme du mouvement**

**Exemple 4.7** : Un vibreur sinusoïdal représenté par l'équation $x = 4\sin(0.1t + 0.5)$ (toutes les unités sont dans le système international $MKS$ ).

Trouver :

a/ l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement,

b/ la vitesse et l'accélération,

c/ les conditions initiales,

d/ la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$ ,

e/ Dessiner les diagrammes du mouvement.

**Réponse :** Procédons par identification de l'équation horaire générale du mouvement rectiligne sinusoïdal et l'équation donnée dans l'énoncé de cet exercice.

$$x = 4\sin(0.1t + 0.5) = X_m \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

a/ L'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement.

$$\boxed{X_m = 4m} \; ; \; T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 20\pi = 62.8s}$$

$$N = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = 1.59.10^{-2}\,Hz}; \qquad \boxed{\varphi = 0.5rad}$$

b/ Calcul de la vitesse et de l'accélération :

$$\boxed{v = \dot{x} = 0.4\cos(0.1t + 0.5)}$$

$$a = \dot{v} = -0.04\sin(0.1t + 0.5) = -0.04x \qquad \boxed{a = -0.04x}$$

c/ Détermination des conditions initiales :

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4\sin 0.5 = 1.92m \;\Rightarrow \boxed{x_0 = 1.92m}$$

$$v_0 = 0.4\cos 0.5 \approx 0.35ms^{-1} \;\Rightarrow \boxed{v_0 = 0.35m}$$

d/ Désignation de la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$ :

$$t = 5s: \quad x = 4\sin(0.5 + 0.5) \Rightarrow \boxed{x = 3.36m}$$

$$v = 0.4\cos 1 \Rightarrow \boxed{v = 0.22ms^{-1}}$$

$$a = -0.04\sin 1 \Rightarrow \boxed{a = 0.034ms^{-2}}$$

e/ Diagramme du mouvement : **Nous conseillons à l'étudiant de tracer lui-même ces diagrammes et de ne pas se contenter de jeter un simple coup d'œil sur la figure 4.11.**

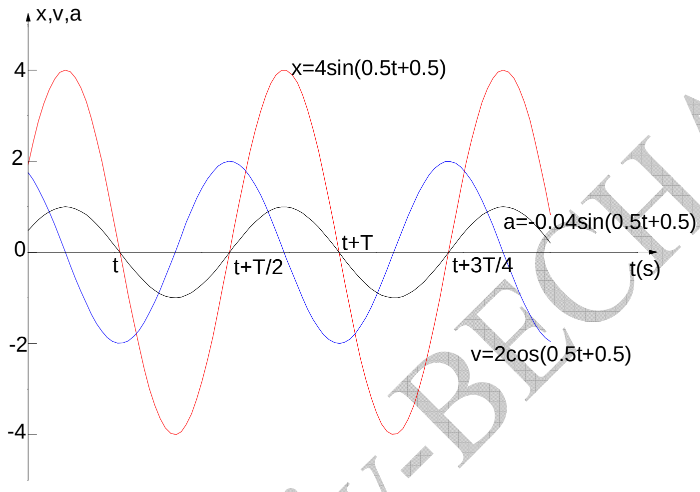



**Fig 4.11 : Diagrammes du mouvement**

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.8**

La position d'un mobile en fonction du temps est indiquée sur la figure ci-dessous. Indiquer :

1/ en quel endroit le mouvement se fait dans la direction des $X$ positifs ou négatifs ?

2/ à quel instant le mouvement est retardé ou accéléré ?

3/ quand le corps passe par l'origine ?

4/ quand la vitesse est nulle ?

5/ faire un graphique de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps,

6/ estimer d'après le graphique, la vitesse moyenne pour les intervalles de temps :

$$1s \le t \le 1{,}8s \quad , 1s \le t \le 2{,}2s \quad , \quad 1s \le t \le 3s$$

**التمرين 8.4:**

موضع المتحرك بدلالة الزمن مبيّن على الشكل أسفله. بيّن:

1/ في أي موضع تتمّ الحركة في جهة الفواصل $X$ الموجبة أو السالبة؟

2/ في أي لحظة تكون الحركة متسارعة أو متباطئة؟

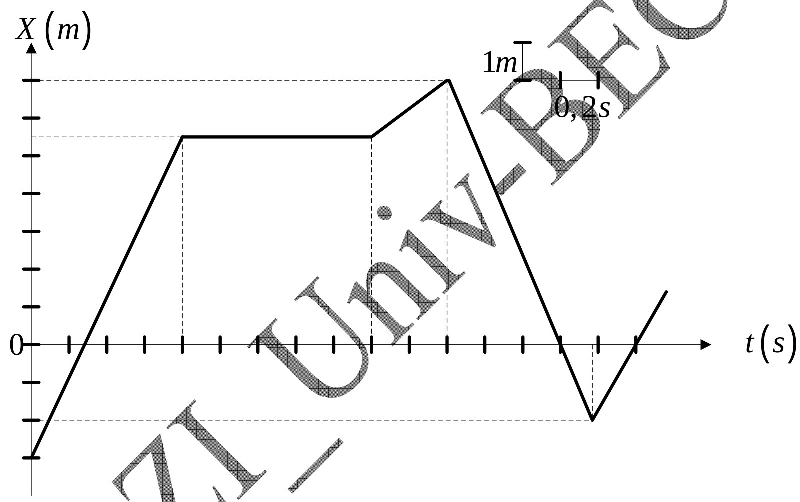
3/متى يمرّ الجسم من مبدإ الفواصل؟

4/ متى تنعدم السرعة؟

5/ قم برسم بياني للسرعة و التسارع بدلالة الزمن،

6/ انطلاقا من الرسم البياني، قيّم السرعة المتوسطة من أجل الفواصل الزمنية:

$$1s \le t \le 3s \quad , \quad 1s \le t \le 2{,}2s \quad , \quad 1s \le t \le 1{,}8s$$






**Exercice 4.9**

Un point matériel se déplace sur l'axe $x'ox$ de façon qu'entre le carré $v^2$ de sa vitesse et son abscisse $x$, il existe la relation $v^2 = Ax + B$ ,où $A$ et $B$ sont des constantes.

1/ Calculer l'accélération du mobile. Que peut on dire du mouvement ?

2/ Connaissant la nature du mouvement, trouver par une autre méthode les valeurs de $A$ et $B$ en fonction des caractéristiques du mouvement.

**التمرين 9.4**

تنتقل نقطة مادية على المحور $x'ox$ بحيث توجد ، بين مربع سرعتها $v^2$ و فاصلتها $x$، العلاقة $v^2 = Ax + B$ ، $A$ و $B$ ثابتان.

1/ أحسب تسارع المتحرّك. ماذا يمكن أن نقول عن الحركة؟

2/ بمعرفة طبيعة الحركة، أوجد بطريقة أخرى قيمتي $A$ و $B$ بدلالة مميزات الحركة.

**Exercice 4.10**

Une pierre est lancée verticalement vers le haut depuis le toit d'un immeuble avec une vitesse de

**تمرين 10.4:**

تقذف حجارة شاقوليا إلى الأعلى بسرعة $29{,}4ms^{-1}$ انطلاقا من سطح عمارة. بعد $4s$ من قذف الحجارة

| | |
|---|---|
| $29,4ms^{-1}$.On laisse tomber une seconde pierre $4s$ après avoir jeté la première. Démontrer que la première pierre dépassera la seconde $4s$ exactement après que l'on ait lâché la seconde.<br>$g = 9,8ms^{-2}$. | الأولى نترك حجارة ثانية تسقط. برهن أن الحجارة الأولى تتجاوز الحجارة الثانية $4s$ بالضبط بعد تركنا للثانية.<br>$g = 9,8ms^{-2}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 4.11**<br>Un homme au sommet d'un immeuble lance une boule verticalement vers le haut avec une vitesse $12m.s^{-1}$. La boule atteint le sol $4,25s$ plus tard.<br>1/ Quelle est la hauteur maximale atteinte par la boule ?<br>2/ Quelle est la hauteur de l'immeuble ?<br>3/ Avec quelle vitesse atteint-elle le sol ?<br>$g = 9,8ms^{-2}$ | **تمرين 11.4:**<br>يقذف رجل من قمّة عمارة شاقوليا إلى الأعلى كرة بسرعة $12m.s^{-1}$ . تصل الكرة إلى الأرض بعد $4,25s$ من قذفها.<br>1/ ما هو الارتفاع الأعظمي الذي تبلغه الكرة؟<br>2/ كم هو علو العمارة؟<br>3/ ما هي السرعة التي تصطدم بها الكرة مع الأرض؟<br>$g = 9,8ms^{-2}$ |

| | |
|---|---|
| **Exercice 4.12**<br>L'unité de longueur est le centimètre, l'unité de temps la seconde.<br>Une automobile se déplace en mouvement rectiligne.<br>Son accélération est donnée par $a = -\frac{\pi^2}{4}x$, tel que , à la date $t = 1s$, on ait l'abscisse $x = 4cm$ et la vitesse $v = 2\pi cm.s^{-1}$.<br>1/ déterminer la nature du mouvement, écrire son équation horaire.<br>2/ calculer toutes les constantes qui caractérisent le mouvement,<br>3/ montrer que $x$ peut s'écrire sous la forme : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. | **التمرين 12.4:**<br>وحدة الطول هي السنتيمتر، وحدة الزمن هي الثانية.<br>تنتقل سيارة بحركة مستقيمة. يعطى تسارعها بـــ $a = -\frac{\pi^2}{4}x$ ، بحيث أن في اللحظة $t = 1s$ تكون الفاصلة $x = 4cm$ و السرعة $v = 2\pi cm.s^{-1}$.<br>1/ حدّد طبيعة الحركة، أكتب معادلتها الزمنية.<br>2/ أحسب كل الثوابت التي تميّز الحركة،<br>3/ بيّن أنه يمكن كتابة $x$ على الشكل:<br>$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. |

| | |
|---|---|
| **Exercice 4.13**<br>Un corps est animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération est donnée par $a = 32 - 4v$ ( avec comme conditions initiales $x = 0$ et $v = 4$ pour $t = 0$ ).<br>Trouver $v$ en fonction de $t$, $x$ en fonction de $t$ et $x$ en fonction de $v$. | **تمرين 13.4:**<br>ينتقل جسم بحركة مستقيمة بتسارع $a = 32 - 4v$ ( بشروط ابتدائية $x = 0$ و $v = 4$ من أجل $t = 0$ ).<br>أوجد $v$ بدلالة $t$ ، $x$ بدلالة $t$ و $x$ بدلالة $v$. |

## Corrigés des exercices 4.8 à 4.13 — حلول التمارين من 8.4 إلى 13.4

**Exercice 4.8 :**

1/ Tout le mouvement s'effectue dans le sens positif des abscisses $X$, sauf pour l'intervalle de temps $2,2s \leq t \leq 2,8s$ pour lequel le mouvement se fait dans le sens négatif. Le mobile est au repos entre les instants $t = 0,8s$ et $t = 1,8s$.

2/ Le mouvement est accéléré instantanément aux instants $t = 1,8s$ et $t = 2.8s$ ; il est retardé instantanément aux instants $t = 1,8s$ et $t = 2.8s$.

3/ Le mobile passe par l'origine aux instants $t = 0,3s$ , $t=2,8s$ , $t=3,2s$.

4/ La vitesse s'annule entre les deux instants $t = 0,8s$ et $t = 1,8s$.

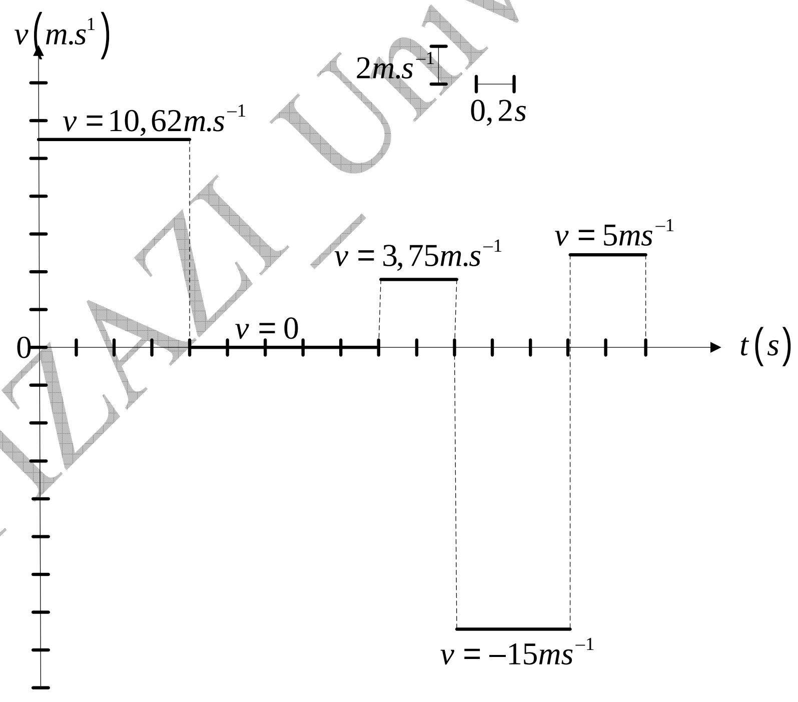
5/ La figure ci-dessous donne la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps.

6/ on calcul la vitesse à partir de la formule $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ :

$$1 \leq t \leq 1,8s \quad , \quad v_{moy} = 0$$

$$1s \leq t \leq 2,2s \quad , \quad v_{moy} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25ms^{-1}$$

$$1s \leq t \leq 3s \quad , \quad v_{moy} = \frac{1,5-9+2}{2} = -2,25ms^{-1}$$




**Exercice 4.9 :**

1/ On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps :

$$2v\frac{dv}{dt} = A\frac{dx}{dt} \quad , \quad 2v.a = A.v \Rightarrow \boxed{a = \frac{A}{2}}$$

Puisque l'accélération est constante et la trajectoire une droite, le mouvement est rectiligne uniformément varié.

2/ Détermination de A et B :

$$v = at + v_0 \Rightarrow v^2 = a^2t^2 + v_0^2 + 2a.v_0.t$$

$$v^2 = a(at^2 + 2v_0t) + v_0^2 \Rightarrow v^2 = 2a\underbrace{(\frac{1}{2}at^2 + v_0t)}_{x} + v_0^2 \Rightarrow 2a.x + v_0^2 \rightarrow (1)$$

D'après les données : $v^2 = Ax + B \rightarrow (2)$

Par identification des deux équations $(1)$ et $(2)$ on en déduit : $\boxed{A = \frac{a}{2} \quad ; \quad B = v_0^2}$

**Exercice 4.10 :**

Pour les deux pierres le mouvement est rectiligne uniformément varié. On oriente l'axe $OZ$ vers le haut. On calcule la distance parcourue par la deuxième pierre durant les 4secondes, soit son abscisse sur l'axe $OZ$ :

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 \quad ; \quad \boxed{z_1 = -78,4m}$$

D'après l'énoncé, on en déduit que la première dépasse la deuxième après 8 secondes depuis son lancement. Calculons son abscisse à cet instant :

$$z_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 \quad ; \quad \boxed{z_2 = -78,4m}$$

Les deux pierres au moment de leur rencontre se trouvent à la même hauteur $(z = z_1 = z_2)$, 8 secondes après le lancement de la première et 4 secondes après l'abondant de la deuxième en chute libre.

**Exercice 4.11 :**

1/ On choisit l'axe $OZ$ orienté positivement vers le haut, son origine la terrasse de l'immeuble.

Le mouvement de la balle est uniformément varié. La balle atteint sa hauteur maximale quand sa vitesse s'annule, elle s'arrête alors pour tomber en chute libre. :

$$\cancel{v}^2 - v_0^2 = -2gh \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}} \quad , \quad \boxed{h \simeq 7,35m}$$

2/ La hauteur de l'immeuble est égale à l'abscisse de la balle au moment de sa collision avec le sol( soit à $t = 4,25s$ ) :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t \quad ; \quad \boxed{|z| = 37,5m}$$

3/ La vitesse de la collision de la balle avec le sol :

$$v = -gt + v_0 \quad ; \quad \boxed{v = -29,65ms^{-1}}$$

Le signe – résulte de l'orientation de l'axe.

**Exercice 4.12 :**

1/ Remarquons que nous avons une équation différentielle de premier ordre :

$$a = -\frac{\pi^2}{4}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\pi^2}{4}x = 0$$

qui est l'équation caractéristique du mouvement rectiligne sinusoïdal.

Sa solution est, comme nous l'avons mentionnée dans le cours, de la forme :

$$x = A\cos\frac{\pi}{2}t + B\sin\frac{\pi}{2}t$$

On en déduit l'expression de la vitesse en dérivant l'équation horaire :

$$v = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + B\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$$

D'après les conditions initiales :

$$t = 1s \ , \ x=4cm \ , \ 4=0+B\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{B = 4cm}$$

$$t = 1s \ , \ v=-2\pi cm.s^{-1} \ , \ -2\pi = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{A = 4cm}$$

L'équation horaire s'écrit alors :

$$x = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4\sin\frac{\pi}{2}t \Rightarrow \boxed{x = 4\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right)}$$

2/ Les caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal sont : la pulsation, l'amplitude et la phase initiale. Pour trouver les valeurs de ces constantes il est nécessaire de transformer l'équation horaire sous la forme :

$$x = X_m\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow (1)$$

Multiplions les deux membres par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour obtenir :

$$x\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

Puisque : $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nous pouvons écrire l'équation horaire sous la forme :

$$x = 4\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Procédons à une transformation trigonométrique pour aboutir à :

$$x = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) \rightarrow (2)$$

En dernier lieu on arrive à l'expression de l'équation horaire qui va nous permettre d'obtenir les constantes du mouvement. Par identification des équations $(1)$ et $(2)$ :

$$x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) = X_m.\cos(\omega t + \varphi)$$

On obtient finalement :

La pulsation : $\boxed{\omega = \frac{\pi}{2}rad.s^{-1}}$, l'amplitude : $\boxed{X_m = 4\sqrt{2}cm}$,

la phase initiale : $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{4}rad}$

3/ L'équation horaire peut s'écrire à présent sous la forme :

$$\boxed{x = 4\sqrt{2}.10^{-2}.\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)}(m)$$

**Exercice 4.13 :**

L'expression donnée est une équation différentielle de premier ordre.

$$a = 32 - 4v \Leftrightarrow \dot{v} + 4v = 32$$

Sa solution est de la forme : $v = Ae^{-4t} + \frac{4}{32}$

Pour trouver la valeur de la constante $A$ on fait appel aux conditions initiales :

$$t = 0 \ , \ v = 4 \ , \ 4 = Ae^{0} + 8 \Rightarrow \boxed{A = -4}$$

Donc la vitesse en fonction du temps est : $\boxed{v = -4e^{-4t} + 8} \rightarrow (1)$

Pour trouver l'équation horaire du mouvement on doit intégrer l'équation de la vitesse :

$$v = \frac{dx}{dt} = -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow dx = \left(-4e^{-4t} + 8\right)dt \Rightarrow x = \int\left(-4e^{-4t} + 8\right)dt$$

$$x = e^{-4t} + 8t + B$$

Calculons la valeur de la constante $B$ à partir des conditions initiales :

$$t = 0 \ , \ x = 0 \Rightarrow 0 = e^{-0} + B \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

**Donc $x$ en fonction de $t$ est :** $\boxed{x = e^{-4t} + 8t - 1} \rightarrow (2)$

Pour exprimer $x$ en fonction de $v$, il suffit d'éliminer le temps entre les deux équations $(1)$ et $(2)$ :

De $(1)$ : $v = -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{8-v}{4}\right)$

Remplaçons dans $(2)$ : $x = e^{-4\left[-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{8-v}{4}\right)\right]} + 8.\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{8-v}{4}\right) - 1 \Rightarrow x = \left(\frac{8-v}{4}\right) - 2\ln\left(\frac{8-v}{4}\right) - 1$

Finalement : $\boxed{x = -2\ln\left(\frac{8-v}{4}\right) - \frac{1}{4}v + 1}$

# C-IV /MOUVEMENT DANS LE PLAN
# الحركات المستوية

Si la trajectoire appartient à un plan, il est possible de repérer la position d'un mobile soit par les coordonnées rectangulaires soit par les coordonnées polaires.

## 1/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES POLAIRES (دراسة الحركة بالإحداثيات القطبية) :

- **Position du mobile :** Soit $M$ un point matériel dont la trajectoire est une courbe plane quelconque$(C)$.

La position du mobile en **coordonnées cartésiennes**, comme nous l'avons déjà signalée est définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}} \qquad \textbf{(21.4)}$$

Mais en **coordonnées polaires** le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(22.4)}$$

Où : $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$

Donc : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta)$

**Remarque :** et $\theta$ dépendent du temps : $r = f(t)$ et $\theta = g(t)$

- **La vitesse :**
  - ✓ **En coordonnées cartésiennes :**

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}} \qquad \textbf{(23.4)}$$

✓ **En coordonnées polaires :** D'après le figure 4.12 , nous pouvons écrire les expressions des deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ :

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta \qquad ; \qquad \vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta} \qquad \textbf{(24.4)}$$

Leurs dérivées consécutives sont :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\vec{i}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} + \vec{j}\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{i}.\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} - \vec{j}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}} \qquad \textbf{(4.25)}$$

A l'aide des relations (4.25), exprimons la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta} \qquad \textbf{(4.26)}$$

En conséquence, la vitesse a deux composantes, transversale $\vec{v}_\theta$ et radiale $\vec{v}$ . Ci-dessous figurent les deux expressions des deux composantes ainsi que le module de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\\ \vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_\theta\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{v}_r=\dot{r}.\vec{u}_r\\ \vec{v}_\theta=r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\end{array} \Rightarrow v=\sqrt{\dot{r}^2+(r.\dot{\theta})^2}$$

- **L'accélération :**

**En coordonnées rectangulaires** : $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}$

**En coordonnées polaires** : Nous dérivons la relation de la vitesse 4.26 par rapport au temps et en utilisant l'expression 4.25, nous obtenons la formule de l'accélération :

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{r}.\frac{d\vec{u}_r}{dt}+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}=\dot{r}.(\vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt})+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt})+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

En ordonnant cette expression, et en utilisant la notation de Newton, on arrive à la formule définitive de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a}=\dot{r}.\vec{u}_\theta.\dot{\theta}+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\dot{\theta})+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a}=(\underbrace{\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2}_{a_r}).\vec{u}_r+(\underbrace{2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta}}_{a_\theta}).\vec{u}_\theta} \qquad \textbf{(4.27)}$$

Remarquons que l'accélération a deux composantes, radiale $\vec{a}$ et transversale $\vec{a}_\theta$ :

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_\theta} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Quant à son module il est égal à :

$$\boxed{a=\sqrt{(\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta})^2}} \qquad \textbf{(4.29)}$$

- **Cas particulier, Le mouvement circulaire(حالة خاصة: الحركة الدائرية) :**

Puisque $r=R=C^{te}$, le vecteur vitesse est donc :

$$\boxed{\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta} \qquad \textbf{(4.30)}$$

Et l'expression du vecteur accélération est :

$$\boxed{\vec{a}=-R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_r+R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta} \qquad \textbf{(4.31)}$$

Remarquons que cette accélération a deux composantes :

- ✓ **Accélération normale (التسارع الناظمي)** notée par $\vec{a}_N$, portée par la normale, dirigée vers le centre , et de sens contraire à $\vec{a}$ , elle indique la **variation de la direction** de la vitesse.

$$\boxed{\vec{a}_N=-\vec{a}_r=R\dot{\theta}^2\vec{u}_r\Rightarrow a_r=a_N=R\dot{\theta}^2} \qquad \textbf{(4.32)}$$

- ✓ **Accélération tangentielle (التسارع المماسي)** notée par $\vec{a}_T$, portée par la tangente à la trajectoire au point $M$ , elle indique la **variation du module** de la vitesse.

$$\boxed{\vec{a}_\theta=\vec{a}_T=R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\Rightarrow a_\theta=a_T=R\ddot{\theta}} \qquad \textbf{(4.33)}$$

- **Autre cas particulier, le mouvement circulaire uniforme (الحركة الدائرية المنتظمة):**

Pour ce mouvement la vitesse est constante en module. Et puisque $r = R = C^{te}$, la vitesse est donc :

$$\boxed{v = R\dot{\theta} = R\omega} \quad \textbf{(4.34)}$$

Nous reconnaissons la vitesse angulaire $\omega$ qui représente l'angle balayé par unité de temps et dont l'unité est le radian par seconde $\left(rad.s^{-1}\right)$.

Quant à l'accélération elle vaut :

$$\boxed{a = a_r = a_N = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \vec{a}_N = -R\omega^2.\vec{u}_r} \quad \textbf{(4.35)}$$

## 2/ LES COMPOSANTES NORMALE ET TANGENTIELLE DE LA VITESSE ET DE L'ACCELERATION DANS LE REPERE DE FRENET :

On considère maintenant un mouvement dont la trajectoire est une courbe plane quelconque (C) . Nous dessinons un repère composé de l'axe MT, tangent à la trajectoire au point M et porte le vecteur vitesse, et de l'axe MN perpendiculaire à l'axe MT.

Soient $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$ les deux vecteurs unitaires suivant MT et MN respectivement. On remarque sur la figure 4.13 que la vitesse s'écrit alors:

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T} \quad \textbf{(4.36)}$$

L'accélération s'écrit : $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

Donc :

$$\boxed{\vec{a} = a_T.\vec{u}_T + a_N.\vec{u}_N} \quad \textbf{(4.37)}$$

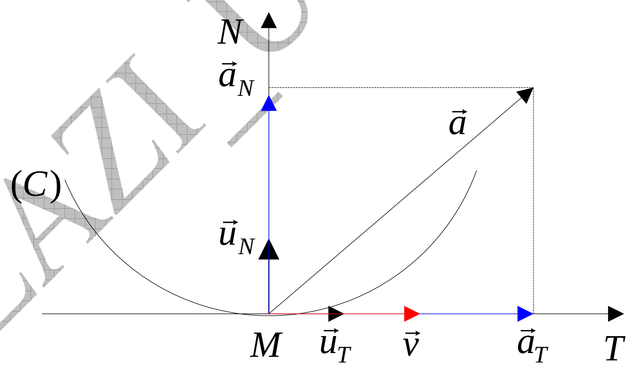



**Fig 4.13: vitesse et accélération dans le repère Frenet**

De ce qui précède, apparaît :

$$\left.\begin{array}{l} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = \dot{v}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N \Rightarrow a = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

On appelle les expressions (4.36) et (4.37), respectivement les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet, ou les composantes propres, ou encore les composantes locales.

Si $ds$ est le déplacement élémentaire il est tout à fait logique que le vecteur position est :

$$\boxed{\vec{r} = \int \vec{u}_T . ds} \quad \textbf{(4.38)}$$

Pour clore ce chapitre, abordons l'exemple suivant :

**Exemple 4.8 :** La trajectoire plane d'un point matériel en coordonnées polaires est donnée par l'équation : $\rho.\cos^2\frac{\varphi}{2} = a$, où $a$ est une constante.

On suppose que le module $v$ de la vitesse de ce point matériel est proportionnel à $\rho$ : $v = k\rho$, où $k$ est une constante positive.

Calculer les composantes normale $v_\rho$ et transversale $v_\varphi$ du vecteur vitesse.

**Réponse :**

On sait que : $\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi$

Remarquer que nous avons remplacé les lettres par $\rho$ et $\theta$ par $\varphi$ ( le but : n'apprenez pas les lettres !!!).

Partant des données nous faisons les calculs suivants :

$$\rho\cos^2(\varphi/2) = a \Rightarrow \rho = \frac{a}{\cos^2(\varphi/2)}$$

En dérivant l'expression de $\rho$ par rapport au temps, nous obtenons la vitesse normale $v_\rho$ :

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow v_\rho = \frac{a.\cos(\varphi/2).\sin(\varphi/2)}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}$$

Quant à la vitesse transversale elle est :

$$v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}$$

Mais $\dot{\varphi}$ reste inconnue. Pour cela il faut la calculer ce $\dot{\varphi}$ à partir de $v^2 = v_\rho{}^2 + v_\varphi{}^2$

D'après les données : $v^2 = k^2.\rho^2 = k^2.\dfrac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}$

Donc :

$$k^2.\frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)} = \frac{a^2.\sin^2(\varphi/2)}{\cos^6(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 \Rightarrow k^2 = \left[\frac{\sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} + 1\right].\dot{\varphi}^2$$

D'où : $\dot{\varphi}^2 = k^2.\cos^2(\varphi/2) \Rightarrow \dot{\varphi} = k.\cos(\varphi/2)$

En remplaçant $\dot{\varphi}$ par sa valeur littérale dans les deux composantes de la vitesse, on trouve ce qui est demandé :

$$v_\rho = \frac{a.k.\sin(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} \Rightarrow \boxed{v_\rho = v.\sin(\varphi/2)}$$

$$\boxed{v_\theta = \frac{a.k}{\cos(\varphi/2)}}$$

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.14**

Une particule se déplace dans un plan $XY$ selon la loi : $v_x = 4t^3 + 4t$ et $v_y = 4t$.

Si le mobile se trouvait au point $(1,2)$ à l'instant $t = 0$ , trouver l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

**التمرين 14.4:**

تنتقل جسيمة في المستوى $XY$ وفق القانون $v_x = 4t^3 + 4t$ و $v_y = 4t$. إذا وجد المتحرّك في النقطة $(1,2)$ في اللحظة $t = 0$، أوجد معادلة المسار بالإحداثيات الكارتيزية.

**Exercice 4.15**

Une particule se déplace dans un plan $XY$ selon la loi : $a_x = -4\sin t$ et $a_y = 3\cos t$.

Sachant que pour $t = 0$ on ait $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، trouver :

1/ l'équation de la trajectoire, quelle est son allure ?

2/ la valeur de la vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4} s$.

**التمرين 15.4:**

تنتقل جسيمة في المستوى $XY$ وفق القانون $a_x = -4\sin t$ و $a_y = 3\cos t$. علما أنه من أجل $t = 0$ لدينا $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ،

أوجد:

1/ معادلة المسار، ما شكله؟

2/ قيمة السرعة في اللحظة $t = \frac{\pi}{4} s$.

**Exercice 4.16**

Soit le mouvement défini par sa trajectoire $y = 3(x+2)$ et son équation horaire $s(t) = 2t^2$. Sachant que $x = -2$ et $y = 0$ quand $s(0) = 0$ et que $s$ croit avec la croissance de $y$ :

1/ trouver les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement,

2/ déterminer l'accélération normale et l'accélération tangentielle du mouvement.

**التمرين 16.4:**

لتكن الحركة المعرّفة بمسارها $y = 3(x+2)$ و بمعادلتها الزمنية $s(t) = 2t^2$. علما أن $x = -2$ و $y = 0$ لمّا $s(0) = 0$ ، كما أن $s$ يتزايد مع تزايد $y$ :

1/ أوجد المعادلتين الوسيطيتين $x(t)$ و $y(t)$ للحركة،

2/ حدد التسارع الناظمي و التسارع المماسي للحركة.

**Exercice 4.17**

On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel : $x = 2t$ et $y = 4t^2 - 4t$

1/ Déterminer l'équation de la trajectoire, Quelle est son allure ?

2/Calculer la vitesse du mobile,

3/Montrer que son accélération est constante,

4/Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet.

5/En déduire le rayon de courbure.

**التمرين 17.4:**

تعطى المعادلتان الوسيطيتان للمسار المستوي لمتحرّك بالنسبة لمرجع: $x = 2t$ و $y = 4t^2 - 4t$.

1/ حدّد معادلة المسار، ما شكله؟

2/أحسب سرعة المتحرّك،

3/ برهن أن تسارعه ثابت،

4/ حدّد المركبتين الناظمية و المماسية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

**Exercice 4.18**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $xOy$ d'origine O et de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$). Les coordonnées $x$ et $y$ d'un point $M$ mobile dans le plan ($O,\vec{i},\vec{j}$) varient avec le temps suivant la loi:

**التمرين 18.4:**

ينسب المستوى إلى معلم متعامد و متجانس $xOy$ مبدأه $O$ و قاعدته $(\vec{i},\vec{j})$ . تتغير الإحداثيتان $x$ و $y$

$$x = 2\cos\frac{t}{2} \text{ et } y = 2\sin\frac{t}{2}.$$

1/ Déterminer la nature de la trajectoire,

2/ Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ ,

3/ Déterminer l'expression de la vitesse $\dfrac{ds}{dt}$ , ainsi que celle de l'abscisse curviligne $s$ du point $M$ à l'instant $t$, en prenant comme condition initiale $s = 0$ quand $t = 0$ ,

4/ déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet,

5/ en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

6/ La trajectoire reste la même, mais maintenant le point $M$ subit une accélération angulaire $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$ . A quelle date le point $M$ atteindra-t-il une vitesse de $10ms^{-1}$ , sachant qu'il est parti du repos. Quelle distance a-t-il alors parcourue ?

لنقطة $M$ متحركة في المستوى $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ مع الزمن حسب القانون : $x = 2\cos\frac{t}{2}$ و $y = 2\sin\frac{t}{2}$ .

1/ حدد طبيعة المسار.

2/ حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$ ،

3/ حدد عبارة السرعة $\dfrac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الإحداثية $s$ المنحنية لنقطة $M$ في اللحظة $t$ ، بأخذ الشرط الإبتدائي $s = 0$ لما $t = 0$ ،

4/ حدد المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

6/ المسار باق على حاله في حين تتأثر النقطة $M$ بتسارع زاوي $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$ . في أي لحظة تبلغ النقطة $M$ سرعة $10ms^{-1}$ ، علما أنها انطلقت من السكون. ما هي المسافة التي قطعتها؟

**Exercice 4.19**

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires : $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ et $\theta = \dfrac{t}{b}$, $_0$ et $b$ sont des constantes positives.

1/ Calculer le vecteur vitesse de la particule,

2/ Montrer que l'angle $\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)$ est constant. Que vaut cet angle ?

3/ Calculer le vecteur accélération de la particule,

4/ Montrer que l'angle $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)$ est constant. Que vaut cet angle ? (On se servira de la question2),

5/ Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

**التمرين 19.4:**

تنتقل جسيمة خاضعة لحقول كهربائية و مغناطيسية معقدة في مرجع غليلي. المعادلتان الزمنيتان بالإحداثيات القطبية هما $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ و $\theta = \dfrac{t}{b}$ ، $_0$ و $b$ ثابتان موجبان.

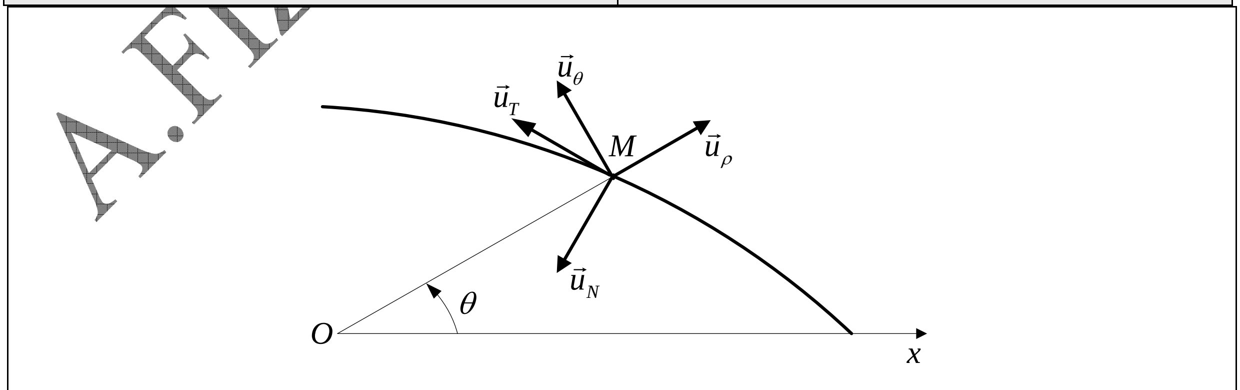
1/ أحسب شعاع السرعة للحركة،

2/ بيّن أن الزاوية $\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟

3/ أحسب شعاع التسارع للحركة،

4/ بيّن أن الزاوية $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟(نستعين بالسؤال2)،

5/ أحسب نصف قطر انحناء المسار.




**Exercice 4.20**

Un bras $OA$ tournant avec une vitesse $\omega$ autour

**التمرين 20.4:**

مدور $OA$ يدور بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ حول محور

d'un axe $O$, est articulé en $A$ avec une tige $AB$. La tige $AB$ est solidaire d'un curseur $B$ pouvant coulisser le long de l'axe $Ox$. le bras et la tige peuvent se croiser lorsque la tige passe par derrière l'articulation en $O$. Sachant que $AB = L$ et $OA = R$ :

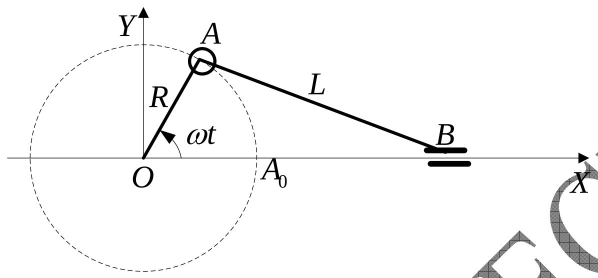
1/ trouver l'équation horaire du mouvement de $B$, sachant que B passe en $A_0$ au temps $t = 0$,

2/ à quel instants la vitesse s'annule-t-elle ?

$O$، و مشترك بواسطة مفصل عند $A$ مع قضيب $AB$. القضيب $AB$ متمفصل عند $B$ بواسطة زلاقة قابلة للانزلاق على طول المحور $Ox$. يمكن للقضيبين $OA$ و $AB$ أن يتقاطعا في حين تمرّ الزلاقة خلف المفصل $O$. إذا كان $AB = L$ و $OA = R$:

1/ أوجد المعادلة الزمنية لحركة $B$ علما أن $A$ يمرّ في $A_0$ عند الزمن $t = 0$،

2/ في أي لحظات تنعدم السرعة؟






**Exercice 4.21**

Dans le plan $(XOY)$ d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point $P$ se déplace sur un cercle de rayon $R$ et de centre $I(R,0,0)$.

A l'instant $t = 0$, $P$ se trouve en $A(2R,0,0)$ et possède la vitesse positive $\vec{v}_0\,(0,v_0,0)$.

On désigne par et $\theta$ les coordonnées polaires de $P$.

1/ Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.

2/ Représenter sur la figure la base polaire $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ de $P$. Calculer en fonction de $\theta$ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de $P$ dans le repère $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$.

3/ Soit $s$ l'abscisse curviligne de $P$ (l'origine est en A).

- Donner l'expression de $s$ en fonction de $\theta$.
- Représenter sur la figure la base intrinsèque $(\vec{u}_T,\vec{u}_N)$ de $P$.
- Calculer en fonction de $\theta$ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$ dans cette base.
- Calculer les composantes polaires de $\vec{u}_T$ et de $\vec{u}_N$. Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$.

4/ On désigne par $\omega$ la vitesse angulaire de $P$, dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante.

**التمرين 21.4:**

في مستو $(XOY)$ لمعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تنتقل نقطة $P$ على دائرة نصف قطرها $R$ و مركزها $I(R,0,0)$.

في اللحظة $t = 0$، توجد $P$ في $A(2R,0,0)$ و تكسب السرعة الموجبة $\vec{v}_0\,(0,v_0,0)$.

نرمز إلى الإحداثيات القطبية لــ $P$ بــ و $\theta$.

1/ كوّن المعادلة القطبية للدائرة، إستنتج معادلتها الديكارتية.

2/ مثّل على الشكل القاعدة القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ لــ $P$. أحسب بدلالة $\theta$ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ لــ $P$ في المعلم $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$.

3/ لتكن الفاصلة المنحنية $s$ لــ $P$ (المبدأ في $A$):

- إعط عبارة $s$ بدلالة $\theta$،
- مثّل على الشكل القاعدة الذاتية $(\vec{u}_T,\vec{u}_N)$ لــ $P$.
- أحسب بدلالة $\theta$ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$ في هذا المعلم.
- أحسب المركبتين القطبيتين $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$.
- أوجد من جديد في هذه الشروط المركبتين القطبيتين لــ $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$.

4/ نرمز بــ $\omega$ للسرعة الزاوية لــ $P$، والتي نعتبرها في كل ما يتبع ثابتة.

- إعط بدلالة $t$ ، عبارتي $\theta$ ثم .
- إستنتج عبارتي $\vec{v}$ و $\vec{a}$ في القاعدتين القطبية و

| | |
|---|---|
| • Donner en fonction de $t$, les expressions de $\theta$ puis de . <br> • En déduire les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction de $t$ de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$ dans les bases polaire et de Frenet. | قاعدة فرينت. |

## Corrigés des exercices 4.14 à 21.4 — حلول التمارين من 14.4 إلى 21.4

**Exercice 4.14 :**

En intégrant nous obtenons les deux équations horaires :

$$v_x = 4t^3 + 4t \ , \ x = \int\left(4t^3 + 4t\right)dt \Rightarrow x = t^4 + 2t^2 + C_x$$

$$v_y = 4t \ , y = \int 4t.dt \Rightarrow y = 2t^2 + C_y$$

Les conditions initiales nous permettent de déterminer les deux constantes d'intégration $C_x$ et $C_y$ :

$$t = 0 \ , \ x=1 \ , \ y=2 \Rightarrow C_x = 1 \ , \ C_y = 2$$

On obtient : $x = t^4 + 2t^2 + 1 \ , \ y = 2t^2 + 2$

D'où l'équation de la trajectoire :

$$x = \left(t^2 + 1\right)^2 \ , \ y = 2\left(t^2 + 1\right) \Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{x}}$$

**Exercice 4.15 :**

1/ En intégrant deux fois de suite, nous obtenons les deux équations horaires du mouvement :

$$a_x = -4\sin t \Rightarrow v_x = 4\cos t + v_{0x} \ , \ x = 4\sin t + v_{0x}.t + C_x$$
$$a_y = 3\cos t \Rightarrow v_y = 3\sin t + v_{0y} \ , \ y = 3\sin t + v_{0y}.t + C_y$$

Les conditions initiales nous permettent d'obtenir les constantes d'intégration : $v_{0x}$ ، $v_{0y}$ ، $C_x$ et $C_y$ :

$$t = 0 \ , \ x=0 \ , \ y=-3 \ , \ v_x=4 \ , \ v_y=0 \Rightarrow v_{0x} = 0 \ , \ v_{0y} = 0 \ , C_x = 0 \ , \ C_y = 0$$

Nous obtenons :

$$v_x = 4\cos t \ , \ v_y = 3\sin t$$
$$x = 4\sin t \ , \ y = -3\cos t$$

L'équation de la trajectoire est donc :

$$x = 4\sin t, \ \ y = -3cost \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1}$$

La trajectoire est une ellipse.

2/ La vitesse au temps $t = \frac{\pi}{4} s$ est :

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \Rightarrow v=\sqrt{16\sin^2\frac{\pi}{4}+9\cos^2\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{v=3,53ms^{-1}}$$

**<u>Exercice 4.16</u> :**

L'équation horaire en coordonnées curviligne est $s(t)=2t^2$. Nous avons vu dans le cours que la vitesse est $v=\frac{ds}{dt}$. Calculons cette vitesse : $v=\frac{ds}{dt}=4t$. Ceci nous informe que les équations horaires $x$ et $y$ sont du second degré par rapport au temps. Partant de cela nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha t^2+\beta t+x_0 \Rightarrow v_x=2\alpha t+\beta \\ y=\gamma t^2+\delta t+y_0 \Rightarrow v_y=2\gamma t+\delta \end{array}\right| \Rightarrow v^2=\left(4\alpha^2t^2+\beta^2+4\alpha\beta.t\right)+\left(4\gamma^2t^2+\delta^2+4\gamma\delta.t\right)$$

Organisons cette dernière équation sous la forme :

$$v^2=\left(4\alpha^2+4\gamma^2\right)t^2+\left(4\alpha\beta+4\gamma\delta\right)t+\beta^2+\delta^2$$

Nous avons trouvé précédemment $v^2=4t^2$

Par identification des deux équations précédentes, nous obtenons un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{array}{l} \left(4\alpha^2+4\gamma^2\right)t^2=4t^2 \rightarrow (1) \\ \left(4\alpha\beta+4\gamma\delta\right)t=0 \rightarrow (2) \\ \beta^2+\delta^2=0 \rightarrow (3) \end{array}$$

De $(3)$ on en déduit $\beta=\delta=0$, des conditions initiales on tire $x_0=-2$ et $y_0=0$.

Les deux équations horaires sont donc :

$$x=\alpha t^2-2 \quad , \quad y=\gamma t^2 \rightarrow (4)$$

Reste à déterminer $\alpha$ et $\gamma$.

Nous remplaçons dans l'équation de la trajectoire pour obtenir :

$$y=(x+2)=3\left(\alpha t^2-2+2\right) \Rightarrow y=3\alpha t^2 \rightarrow (5)$$

On égalise les deux équations $(4)$ et $(5)$ pour déduire la valeur de $\gamma$ :

$$y=3\alpha t^2=\gamma t^2 \Rightarrow \gamma=3\alpha$$

De l'équation $(1)$ on obtient : $4\alpha^2+4\gamma^2=4$. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \gamma=3\alpha \\ 4\alpha^2+4\gamma^2=4 \end{array}\right| \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{\frac{2}{5}} \quad , \quad \gamma=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Puisque l'abscisse curviligne $s$ croît avec $y$, nous n'acceptons que les racines positives, et par substitution dans l'équation $(4)$ on obtient:

$$\boxed{x=\sqrt{\frac{2}{5}}t^2-2 \ , \ y=3\sqrt{\frac{2}{5}}t^2}$$

**Exercice 4.17 :**

1/ Equation de la trajectoire : On élimine le temps entre les équations horaires pour obtenir $y = f(x)$ : $t = \frac{1}{2}x \Rightarrow \boxed{y = x^2 - 2x}$. La trajectoire est une parabole.

2/ La vitesse du mobile : On dérive le vecteur position par rapport au temps :

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 2 \\ v_y = 8t - 4 \end{array}\right| \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{(8t-4)^2 + 4}}\left(ms^{-1}\right)$$

3/ Accélération du mobile : En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps on arrive à :

$$\left.\begin{array}{l} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 8 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = 8ms^{-2} = C^{te}}$$

4/ L'accélération tangentielle est la dérivée du module de la vitesse par rapport au temps, donc :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{a_T = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{(8t-4)^2 + 4}}}\left(ms^{-2}\right)$$

L'accélération normale vaut :

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow \boxed{a_N = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^2 + 4\right]}}}\left(ms^{-2}\right)$$

5/ Le rayon de courbure est :

$$a_N = \frac{v^2}{r} \quad , \quad r = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{r = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^3 + 4\right]}}}(m)$$

**Exercice 4.18 :**

1/ En éliminant le temps entre les équations paramétriques, et cela en les élevant au carré d'abord puis en les additionnant membre à membre, on obtient l'équation de la trajectoire $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$. La trajectoire tracée par le mobile est un cercle de centre $O$ et de rayon $R = 2$.

2/ Les deux composantes du vecteur accélération et le module du vecteur vitesse sont:

$$v_x = -\sin\frac{t}{2} \ , \ v_y = \cos\frac{t}{2} \ ; \ v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v^2 = 1 \ , \ \boxed{v = \frac{ds}{dt} = 1ms^{-1}}$$

3/ L'intégration du vecteur vitesse $v=\frac{ds}{dt}$ , conduit à l'équation horaire du mouvement en coordonnées curvilignes : $s=\int v.dt \Rightarrow v=t+C$

Et puisque au temps $t=0$, $s=0$, donc $C=0$ et l'équation horaire est $\boxed{s=t}$.

4/ On dérive la vitesse par rapport au temps pour aboutir à l'accélération :

$a_x=-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$ ; $a_y=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$ ; $\boxed{a^2=a_x^2+a_y^2=0,25ms^{-2}}$

Dans la base de Frenet :

$$\boxed{a_T=\frac{dv}{dt}=0}\ ,\ a_N=\sqrt{a^2-a_T^2}\Rightarrow\boxed{a_N=0,5ms^{-2}}$$

5/ Le rayon d courbure est : $R=\frac{v^2}{a_N}\Rightarrow\boxed{R=2m}$

6/ L'accélération angulaire est logiquement la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps : $\ddot{\theta}=\frac{d\omega}{dt}=0,2t$

La vitesse angulaire est donc : $\omega=\int 0,2t.dt\Rightarrow\omega=0,1t^2+C$

Et puisqu'à $t=0$, $s=0$, alors $C=0$ et la vitesse angulaire vaut : $\boxed{\omega=0,1t^2}$.

Nous pouvons à présent déduire la vitesse instantanée : $v=\omega R=0,1Rt^2\Rightarrow\boxed{v=0,2t^2}$

La vitesse atteint la valeur $10ms^{-2}$ à l'instant $10=0,2t^2\Rightarrow\boxed{t=7,1s}$

En intégrant la vitesse angulaire, nous obtenons l'angle balayé, et de là on calcule la distance parcourue : $\theta=\frac{0,1}{3}t^3$ , $s=R\theta=\frac{0,1}{3}.2.(7,1)^3\Rightarrow\boxed{s\simeq 23,9m}$

**<u>Exercice 4.19</u> :**

1/ Partant des différentes expressions connues, on peut calculer le vecteur accélération du mobile :

$$\vec{r}=r.\vec{u}_r=\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r\ ;\ \theta=\frac{t}{b}\ ;\ \dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\ ;\ \dot{\vec{u}}_\theta=-\dot{\theta}.\vec{u}_r$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\vec{u}}_r\Rightarrow\vec{v}=-\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r+\frac{r_0}{b}.e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta\ ;\ \boxed{\vec{v}=\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r+\vec{u}_\theta\right)}$$

2/ Pour calculer l'angle $(\vec{v},\vec{u}_\theta)=\alpha$ on fait appel aux propriétés du produit scalaire :

$$\vec{v}.\vec{u}_\theta=v.u_\theta.\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta}$$

On remplace $\vec{v}$ et $v$ par leur expressions respectives :

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta}=\frac{\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r+\vec{u}_\theta\right).\vec{u}_\theta}{\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_\theta}\quad\Big|\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{u_\theta}=1\Rightarrow\boxed{\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)=\alpha=0}\;;\;\vec{v}\,//\,\vec{u}_\theta$$

$$-\vec{u}_r.\vec{u}_\theta=0\;;\;\vec{u}_\theta.\vec{u}_\theta=1\;,\;u_\theta=1$$

Ce résultat indique que $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ sont colinéaires.

3/ Pour calculer le vecteur accélération, on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps (c'est ce qui a été démontrée dans le cours) :

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\Rightarrow\vec{a}=\left(\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}-\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_r+\left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a}=\left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta}$$

4/ Pour calculer l'angle $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)=\beta$, on utilise les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{a}.\vec{u}_N=a.u_N.\cos\beta\Rightarrow\cos\beta=\frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N}$$

On remplace $\vec{a}$ et $a$ par leurs expressions respectives pour arriver à :

$$\cos\beta=\frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N}=\frac{-2\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{-2\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_N}=\frac{\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{u_N}\rightarrow(1)$$

Nous avons vu à la question $(2)$ que $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ ont la même direction, soit $\left(\vec{v}=v.\vec{u}_\theta\right)$ ; de même $\vec{v}=v.\vec{u}_T$, donc $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_T$ sont parallèles, ce qui nous permet d'écrire : $\vec{u}_\theta=u_\theta.\vec{u}_T$.

Remplaçons maintenant $\vec{u}_\theta$ dans $(1)$ : $\cos\beta=\dfrac{u_\theta\vec{u}_T.\vec{u}_N}{u_N}$

Et puisque $\vec{u}_T.\vec{u}_N=0$, donc $\cos\beta=0\Rightarrow\boxed{\beta=\frac{\pi}{2}rad}\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{u}_N$

**<u>Exercice 4.20</u> :**

1/ Nous voyant sur la figure ci-dessous que l'abscisse instantanée du point $M$ est l'équation horaire demandée, elle est égale à :

$$\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2$$

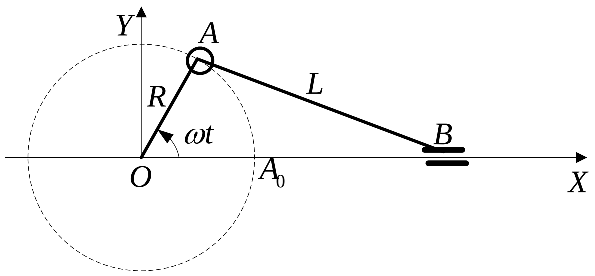
$$AB^2=OB^2+OA^2-2.OA.OB.\cos\omega t$$

$$L^2=x^2+R^2-2Rx\cos\omega t\Leftrightarrow L^2=x^2+R^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)-2Rx\cos\omega t$$

$$L^2=\left(x-R\cos\omega t\right)^2+R^2\sin^2\omega t\Rightarrow\boxed{x=R\cos\omega t+\left(L^2-R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}$$

Nous pouvons nous assurer que $x=R+L$ quand $\omega.t=0$ .

2/ Instants où la vitesse s'annule.




Cherchons d'abord l'expression de la vitesse :

$$v = \frac{dx}{dt} = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}\right)$$

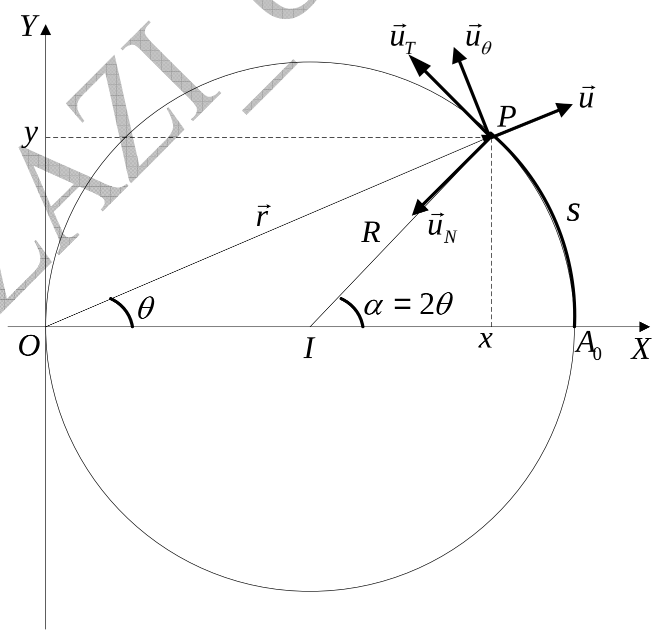
La vitesse s'annule donc aux instants :

$$v = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin\omega t\right)^{1/2}}\right) = 0$$

$$\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow \omega.t = k.\pi \Rightarrow \boxed{t = k\frac{\pi}{\omega}}$$

**<u>Exercice 4.21</u> :**

1/ En regardant la figure on voit bien que : $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} \Rightarrow R^2 = R^2 + r^2 - 2R.r.\cos\theta$




Donc l'équation polaire du cercle est : $r^2 = 2R.r.\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = 2R.\cos\theta}$

L'équation cartésienne du cercle est :

$$\left.\begin{array}{l} r = 2R\cos\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{R} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2R\dfrac{x}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2R.x = 0}$$

2/ La base polaire du point $P$ est représentée sur la figure. Pour calculer les composantes polaires de la vitesse et de l'accélération nous partons de l'expression du vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r.\vec{u}$ .

La première dérivée par rapport au temps nous donne l'expression du vecteur vitesse, soit :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ r = 2R\cos\theta \\ \dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v} = -2R\dot{\theta}.\sin\theta.\vec{u}_r + 2R\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = 2R\dot{\theta}\left(-\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)} \rightarrow (1)$$

La dérivée seconde par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \\ r = 2R\cos\theta \\ \dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{r} = -2R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = -2R\left(2\dot{\theta}^2.\cos\theta + \ddot{\theta}.\sin\theta\right)\vec{u}_r + 2R\left(\ddot{\theta}.\cos - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{u}_\theta} \rightarrow (2)$$

3/

- Expression de $s$ en fonction de $\theta$ :
  Nous rappelons ici une propriété géométrique du cercle : Dans un cercle, les angles qui interceptent le même arc de cercle, celui dont le sommet est au centre du cercle vaut le double de l'angle ayant son sommet sur la circonférence de ce même cercle. Voir figure ci-dessous. Donc :

  $$\boxed{\alpha = 2\theta} \quad \boxed{s = \widehat{AP} = R.\alpha = 2R\theta}$$

- La base locale $\left(\vec{u}_{T,}\vec{u}_N\right)$ de $P$ est représentée sur la figure.
- Les composantes du vecteur vitesse sont : $\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T = 2R\dot{\theta}.\vec{u}_T} \rightarrow (3)$
- Pour le vecteur accélération :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \\ \vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N = 4R\dot{\theta}^2\vec{u}_N \\ \vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T = 2R\ddot{\theta}\vec{u}_T\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \underbrace{4R\dot{\theta}^2}_{a_N}\vec{u}_N + \underbrace{2R\ddot{\theta}}_{a_T}\vec{u}_T} \to (4)$$

Pour retrouver les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base polaire il suffit d'exprimer les vecteurs unitaires de la base locale en coordonnées polaires :

De la figure on en déduit :

$$\vec{u}_N = -\cos\theta.\vec{u}_r - \sin\theta.\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_T = -\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta$$

En remplaçant dans les équations $(3)$ et $(4)$ nous obtenons les équations $(1)$ et $(2)$ obtenues précédemment :

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T = 2R\dot{\theta}.(-\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta)} = (1)$$

Organisons cette dernière équation:

$$\boxed{\vec{a} = -2R\left(2.\dot{\theta}^2.\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right).\vec{u}_r + 2R\left(\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right).\vec{u}_\theta} = (2)$$

4/ A présent la vitesse angulaire est constante.

- L'angle $\theta$ balayé par le point $P$ durant $t$ est : $\alpha = 2\theta = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\omega t}{2}}$
- L'expression de est : $\boxed{r = 2R\cos\dfrac{\omega}{2}t}$
- Expressions de la vitesse et de l'accélération : On sait depuis le début que $\boxed{\dot{\theta} = \dfrac{\omega}{2}}$.

  Nous remplaçons dans les expressions $(1),(2),(3)$ et $(4)$, $\theta$ et $\dot{\theta}$ par leurs valeurs respectives :

  - En coordonnées polaires : on remplace dans $(1)$ et $(2)$ :

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\left(-\sin\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_r + \cos\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_\theta\right)}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2R\omega^2.\cos\frac{\omega}{2}t\right).\vec{u}_r - \left(R\omega^2.\sin\frac{\omega}{2}t\right)\vec{u}_\theta}$$

- En coordonnées propres (Frenet): On remplace dans $(3)$ et $(4)$ :

$$\boxed{\vec{a} = R\omega^2.\vec{u}_N} \quad \boxed{\vec{v} = R\omega.\vec{u}_T}$$

# D-IV/ MOUVEMENT DANS L'ESPACE
# الـــحـــركـــات فـــي الـــفضـــاء

Pour étudier le mouvement d'un point matériel dans l'espace, et qui est caractérisé par trois dimensions, on fait appel, en général, aux coordonnées cylindriques et aux coordonnées sphériques.

## 1/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES CYLINDRIQUES
(دراسة الحركة بالإحداثيات الأسطوانية)

❖ **Position du mobile :** (figure 4.14)

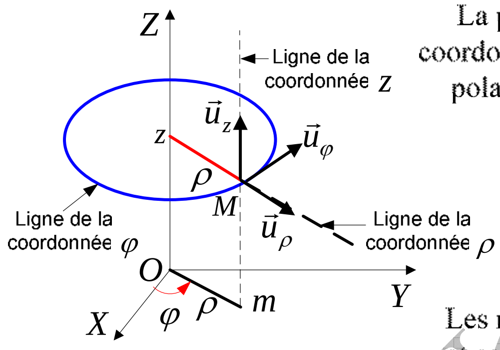



**Fig 4.14 : Base des coordonnées cylindriques**

La position du mobile $M$ est indiquée par sa coordonnée algébrique $z$ et ses deux coordonnées polaires $\rho$ et $\varphi$ de sa projection $m$ sur le plan $XOY$

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}\rho(t)\\ \varphi(t)\\ z(t)\end{array}\right.$$

Les relations entre les vecteurs de la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u}_\rho = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}\\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}\\ \vec{u}_z = \vec{k}\end{array}} \qquad (4.39)$$

Le vecteur position s'écrit donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.40)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho.\sin\varphi + \vec{k}.z} \qquad \textbf{(4.41)}$$

L'étudiant peut remarquer l'équivalence entre cette dernière expression et la relation déjà vue (**6.3**).

- Le déplacement élémentaire est donné par l'expression :

$$\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2} \qquad \textbf{(4.42)}$$

❖ **Vitesse du mobile :**

Il suffit de dériver le vecteur position, exprimé en coordonnées cylindriques, par rapport au temps, pour tomber sur le vecteur vitesse. Remarquons que le rayon polaire $\rho$

est une fonction du temps. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ est lui aussi variable avec le temps. Seul $\vec{u}_z = \vec{k}$ est constant.

$$\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \vec{u}_z \frac{dz}{dt}$$

En se rappelant de la relation (4.25) relative aux dérivées de $\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ et $\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \dot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.43)}$$

Remarquons que la vitesse a trois composantes : **radiale** $(\vec{v}_r)$ , **transversale** $(\vec{v}_\varphi)$ et **azimutale** $(\vec{v}_z)$.

Le module de la vitesse en coordonnées cylindriques est donné par l'expression :

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho.\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}} \qquad \textbf{(4.44)}$$

❖ **Accélération du mobile :**

En continuant l'opération de dérivation par rapport au temps nous arrivons à l'expression de l'accélération du mobile :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\ddot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\dot{\varphi}.\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

En utilisant la notation de Newton, et en se rappelant de la relation **(4.25)**, nous obtenons l'expression finale de l'accélération exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + (\rho.\ddot{\varphi} + 2.\dot{\rho}.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.45)}$$

La même expression peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.46)}$$

Si $z = 0$ et $\rho = R = C^{te}$, réapparaît alors la relation $(31.4)$ de l'accélération du mouvement circulaire uniforme.

Remarquons que l'accélération, comme la vitesse, a trois composantes : **radiale** $(\vec{a}_r)$ , **transversale** $(\vec{a}_\varphi)$ et **azimutale** $(\vec{a}_z)$.

## 2/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES SPHERIQUES
(دراسة الحركة بالإحداثيات الكروية)

❖ **Position du mobile :** (Figure 4.15)

Dans ce système la position du mobile est définie par la relation :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{array} \right. \qquad \boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(4.47)}$$

Rappelons les deux relations **4.17** et **4.18** entre les vecteurs de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$

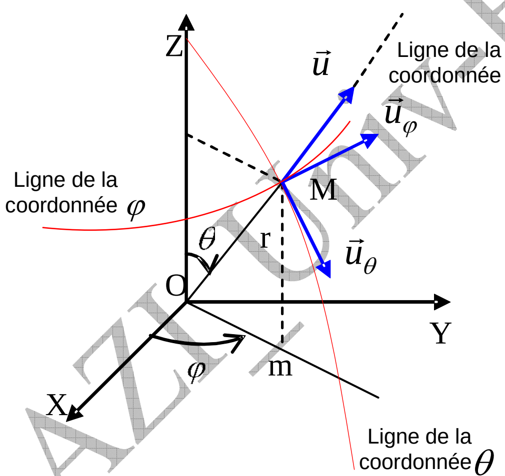



**Fig 4.15: Base des coordonnées sphériques**

- Le déplacement élémentaire est donné par la relation :

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + (r\sin\theta.d\varphi)^2 + (rd\theta)^2} \qquad \textbf{(4.48)}$$

**L'étudiant ne doit pas apprendre les lettres mais leurs sens. Remarquez que $\varphi = (OX, Om)$ et $\theta = (OZ, OM)$ , mais vous pouvez trouver l'inverse de cela dans d'autres références.**

❖ **Vitesse du mobile :**

Dérivons le vecteur position en coordonnées sphériques par rapport au temps :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}$$

Dérivons le vecteur $\vec{u}$ , puis organisons la nouvelle expression pour obtenir à la fin :

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta}_{\vec{u}_\theta}\right] + \dot{\varphi}\sin\theta\left[\underbrace{-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

C'est-à-dire : $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta.\vec{u}_\varphi$

Par remplacement on obtient l'expression finale de la vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi$$

Les trois composantes sphériques du vecteur vitesse apparaissent clairement :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi} \qquad \textbf{(4.49)}$$

La base orthogonale directe est constituée des vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ qui dépendent de la position du mobile, donc du temps. Elle est définie par les équations horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, qui nous permettent d'arriver aux valeurs algébriques $v$ , $v_\theta$ et $v_\varphi$ des composantes sphériques du vecteur vitesse et de là, la détermination du vecteur vitesse.

- **Accélération du mobile :**

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps, on arrive à l'expression du vecteur accélération, soit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}.\vec{u}_r + (r\sin\varphi)\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi\right]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_\theta + a^2{}_\varphi}$$

Nous donnons ci après l'expression finale du vecteur accélération, l'**étudiant** doit être en mesure de s'assurer du résultat :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} = {} & (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta).\vec{u}_r + \\ & (r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta.\cos\theta).\vec{u}_\theta + \\ & (r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta)\vec{u}_\varphi \end{aligned}} \qquad \textbf{(4.50)}$$

Là aussi, connaissant les équations horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ on arrive aux expressions algébriques $a$ , $a_\theta$ et $a_\varphi$ des composantes du vecteur accélération et par conséquent à la détermination du vecteur $\vec{a}$ .

**Exemple 4.9 :**

Le mouvement d'un point matériel $M$ est défini en coordonnées cylindriques par les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et par l'angle polaire $\theta$ tels que $\overrightarrow{OM} = a.\vec{u}_\rho + bt.\vec{k}$ ; $\theta = ct^2$ ; sachant que $a, b, c$ sont des constantes positives.

1/ Calculer la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

2/ Calculer le rayon de courbure après un tour complet autour de l'axe $OZ$ .

**Réponse :**

1/ Pour obtenir le vecteur vitesse on dérive le vecteur accélération :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(a\vec{u}_\rho + bt\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = a\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + b\vec{k} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v} = a.\dot{\theta}\vec{u}_\theta + b\vec{k} \\ \theta = ct^2 \Rightarrow \dot{\theta} = 2ct \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 2act\vec{u}_\theta + b\vec{k}}$$

Le module du vecteur vitesse :

$$\boxed{v = \sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}}$$

En dérivant le vecteur vitesse on obtient le vecteur accélération :

$$\gamma = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2act.\vec{u}_\theta + b\vec{k}) \Rightarrow \gamma = 2ac\frac{d}{dt}(t.u_\theta) \Rightarrow \gamma = 2ac\left[t.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \vec{u}_\theta.1\right]$$

$$\gamma = 2ac\left[-t.\dot{\theta}.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow \gamma = 2ac\left[-t.2ct.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow \boxed{\gamma = 2ac\left[-2ct^2.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right]}$$

Son module est :

$$\boxed{\gamma = 2ac\sqrt{4c^2t^4 + 1}}$$

2/ Calcul du rayon de courbure.

Calculons d'abord la durée nécessaire pour que le mobile effectue un tour complet :

$$\theta = 2\pi = ct^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\theta}{c}} = \sqrt{\frac{2\pi}{c}}$$

Remplaçant ensuite le temps par son expression que nous venons de trouver dans l'expression de l'accélération normale et enfin, calculons le rayon de courbure :

Nous laissons à l'étudiant le soin de réaliser ce calcul de longue haleine pour aboutir à la fin au résultat suivant :

$$R=\frac{v^2}{\gamma_N}\quad ;\quad \gamma_N=\sqrt{\gamma^2-\gamma_T^2}\ ;$$

$$\boxed{\gamma_T=\frac{dv}{dt}=\frac{4a^2c^2t}{\sqrt{4a^2c^2t^2+b^2}}\neq\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}!!!!!}\qquad \boxed{\gamma_N=2ac\frac{\sqrt{16a^2c+b^2}}{\sqrt{a^2c^2t^2+b^2}}}$$

$$R_{(t)}=\frac{v^2}{a_N}=\frac{\left(4a^2c^2t^2+b^2\right)^{3/2}}{2ac(16a^2c^4t^6+4c^2b^2t^4+b^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{R\left(\sqrt{\frac{2\pi}{c}}\right)=\frac{\left(8\pi a^2c^2t^2+b^2\right)^{3/2}}{2ac(128a^2c\pi^3+b^2\left(1+16\pi^2\right))^{1/2}}}$$

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.22**

On donne les équations du mouvement d'un point $M$ dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$x=\frac{1}{2}bt^2 \ , \ y=ct \ , \ z=\frac{3}{2}bt^2$$

Où $b,c$ sont des constantes positives.

1/ Trouver la vitesse et l'accélération ainsi que leurs modules.

2/ Quelle est l'équation de la trajectoire du point $m$ qui représente la projection verticale du point mobile $M$ sur le plan $XOY$ .

**التمرين 22.4:**

تعطى المعادلات لحركة نقطة مادية $M$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$x=\frac{1}{2}bt^2 \ , \ y=ct \ , \ z=\frac{3}{2}bt^2$$

حيث $c,b$ ثابتان موجبان.

1/ أوجد السرعة و التسارع وطويلتيهما.

2/ ما هي معادلة المسار للنقطة $m$ التي تمثل المسقط العمودي للنقطة $M$ المتحركة على المستوى $XOY$ .

**Exercice 4.23**

Soit la trajectoire définie par :

$$\vec{r}=\vec{i}.3\cos 2t+\vec{j}.3\sin 2t+\vec{k}.\left(8t-4\right)$$

1/ Trouver le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire.

2/ Si $\rightarrow$ est le vecteur position d'un point se déplaçant sur $C$ au temps $t$ , vérifier que dans ce cas $\vec{v}=v.\vec{T}$ .

**التمرين 23.4:**

ليكن المسار $C$ المعرّف بـــ:

$$\vec{r}=\vec{i}.3\cos 2t+\vec{j}.3\sin 2t+\vec{k}.\left(8t-4\right)$$

1/ أوجد شعاع الواحدة $\vec{T}$ المماسي للمسار.

2/ إذا كان $\rightarrow$ هو شعاع موضع نقطة متحركة على المسار $C$ في اللحظة $t$ ، تحقق أن في هذه الحالة $\vec{v}=v.\vec{T}$.

**Exercice 4.24**

Un point $M$ décrit une hélice circulaire d'axe $OZ$ .

Ses équations horaires sont :

$$x=R\cos\theta \ ; \ y=R\sin\theta \ , \ z=h\theta$$

$R$ est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, $h$ est une constante et $\theta$ l'angle que fait avec $OX$ la projection $OM'$ de $OM$ sur $XOY$ .

1/ Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.

2/ Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan $XOY$ un angle constant.

3/ Montrer que le mouvement de rotation est uniforme, que le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan $XOY$ . Calculer le rayon de courbure.

**التمرين 24.4:**

ترسم نقطة مسارا حلزونيا دائريا حول المحور $OZ$، معادلاته الزمنية هي:

$$x=R\cos\theta \ ; \ y=R\sin\theta \ , \ z=h\theta$$

$R$ يمثل نصف قطر الأسطوانة للدوران التي يرتسم عليها الحلزون، $h$ ثابت و $\theta$ الزاوية التي يصنعها $OX$ مسقط $OM'$ لـ $OM$ على $XOY$ .

1/ إعط بالإحداثيات الأسطوانية عبارتي السرعة والتسارع.

2/ بيّن أن شعاع السرعة يصنع زاوية ثابتة مع المستوى $XOY$ .

3/ بيّن أن الحركة الدورانية منتظمة، و أن شعاع التسارع يمرّ من محور الأسطوانة و موازي للمستوى $XOY$ . أحسب نصف قطر الانحناء.

**Exercice 4.25**

Un mobile se déplace dans l'espace suivant la loi :

$$x=R\cos\omega t \ ; \ y=R\sin\omega t \ , \ z=\alpha t$$

Où $\alpha,\ \omega,\ R$ sont des constantes positives.

1/ soit $m$ la projection de $M$ dans le plan $XOY$ :

**التمرين 25.4:**

ينتقل متحرّك في الفضاء وفق القانون:

$$x=R\cos\omega t \ ; \ y=R\sin\omega t \ , \ z=\alpha t$$

حيث $\alpha,\ \omega,\ R$ ثوابت موجبة.

a/ Quelle est la nature de la trajectoire de $m$ dans le plan $XOY$ ?

b/ Quelle est la nature du mouvement de $m$ suivant l'axe $OZ$ ?

c/ En déduire la nature de la trajectoire du mobile $M$ .

2/ dans le système des coordonnés cylindriques :

a/ écrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et représenter la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ en un point $M$ de l'espace.

b/ trouver la vitesse et l'accélération de $M$ , ainsi que leurs modules. Déterminer leurs directions puis les représenter en un point de l'espace.

d/ en déduire le rayon de courbure.

1/ ليكن $m$ مسقط $M$ في المستوى $XOY$ :

ا/ ما هو مسار $m$ في $XOY$ ؟

ب/ ما هو نوع حركة $m$ وفق المحور $OZ$ ؟

ج/ إستنتج نوعية مسار المتحرك $M$ .

2/ في جملة الإحداثيات الأسطوانية:

ا/ أكتب عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و مثّل القاعدة $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ عند نقطة $M$ من الفضاء.

ب/ أوجد السرعة و التسارع لـــ $M$ ، و طويلتيهما. حدّد جهتيهما ثم مثلهما عند نقطة من الفضاء.

ج/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

**Exercice 4.26**

1/ A partir des expressions des vecteurs unitaires de la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ en coordonnées cartésienne, s'assurer des expressions suivantes :

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi$$

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)$$

2/ Montrer que l'accélération dans la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ s'écrit :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \\ +\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \\ +\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

**التمرين 26.4:**

1/ انطلاقا من عبارات أشعة واحدة القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ بالإحداثيات الكارتيزية ، تأكّد من العلاقات التالية:

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi$$

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)$$

2/ برهن أن التسارع في القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ يكتب:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \\ +\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \\ +\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

**Exercice 4.27**

Dans le système des coordonnées sphériques $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ , un point $M$ se déplace sur la surface d'une sphère de rayon $R$. Ses deux coordonnées sphériques sont:

$$\theta = \left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{6}rad \quad , \quad \varphi = \omega t^2 ,$$

Avec $\omega$ constante positive.

1/ Partant de l'expression du vecteur position en coordonnées sphériques :

a/ trouver la vitesse et l'accélération de ce mobile dans la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$,

b/ calculer les modules de la vitesse et de l'accélération,

c/ en déduire l'accélération normale.

2/ Partant cette fois de l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes :

a/ trouver la vitesse et l'accélération dans la

**التمرين 27.4:**

في جملة الإحداثيات الكروية $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ تتحرك نقطة مادية $M$ على سطح كرة نصف قطرها $R$ . إحداثيتاها الكرويتان هما:

$$\theta = \left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{6}rad \quad , \quad \varphi = \omega t^2 \text{،}$$

مع $\omega$ ثابت موجب.

1/ انطلاقا من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية:

ا/ أوجد السرعة و التسارع لهذه النقطة في القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$،

ب/ أحسب طويلتي السرعة و التسارع،

ج/ إستنتج التسارع الناظمي.

2/ انطلاقا هذه المرة من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية:

ا/ أوجد السرعة و التسارع في القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ثم

| | |
|---|---|
| base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ puis calculer de nouveau leurs modules et vérifier qu'ils coïncident avec les résultats de la question 1/b,<br>3/ a/ Quelle est la trajectoire du point $M$ ? la représenter qualitativement,<br>b/ Quelle est la nature du mouvement du point $M$ ? | احسب من جديد طويلتيهما و تأكد من تطابقهما مع نتائج السؤال 1/ب،<br>3/ ا/ما هو مسار النقطة $M$ ؟ مثل المسار كيفيا.<br>ب/ ما طبيعة حركة النقطة $M$ ؟ |

## Corrigés des exercices 4.22 à 4.27 حلول التمارين من 22.4 إلى 27.4

**Exercice 4.22 :**

1/ Le vecteur vitesse :

Ecrivons l'expression du vecteur position : $\boxed{\vec{r} = \frac{1}{2}bt^2.\vec{i} \; + \; ct.\vec{j} + \frac{3}{2}bt^2.\vec{k}}$

Pour obtenir le vecteur vitesse on doit dériver le vecteur position par rapport au temps :

$$\dot{x} = v_x = bt \;,\; \dot{y} = v_y = c \;,\; \dot{z} = v_z = 3bt$$

$$\boxed{\vec{v} = bt.\vec{i} + c.\vec{j} + 3bt.\vec{k}} \;\; ; \;\; \boxed{v = \sqrt{10(bt)^2 + c^2}}$$

Dérivons le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

$$\ddot{x} = a_x = b \;,\; \ddot{y} = a_y = 0 \;,\; \ddot{z} = a_z = 3b$$

$$\boxed{\vec{a} = b.\vec{i} + 3b.\vec{k}} \;\; ; \;\; \boxed{a = 2b}$$

2/ Equation de la trajectoire du point $m$ : éliminons le temps entre les deux équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ :

$$x = \frac{1}{2}bt^2 \Rightarrow \mathrm{t} = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{b}} \;,\; \boxed{y = c\sqrt{\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{b}}}}$$

**Exercice 4.23 :**

1/ Le vecteur tangentiel à la trajectoire est le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{\ }}{dt}$,

En coordonnées cartésiennes le vecteur vitesse est donc : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$

Son module est égal à : $v = \sqrt{36+64} \Rightarrow v = 10m.s^{-2}$

Le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire $C$ est porté par le vecteur $\vec{v}$ :

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}}$$

2/ Si $\vec{\ }$ est le vecteur position du point $M$ au temps $t$, alors $\vec{v} = \frac{d\vec{\ }}{dt}$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$$

$$\vec{v} = 10\left(-\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = 10.\vec{u}_T = 10\vec{T} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v.\vec{T}}$$

**Exercice 4.24 :**

1/ Nous savons que le vecteur position en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$$

Nous en déduisons le vecteur vitesse par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z}.\vec{u}_z$$

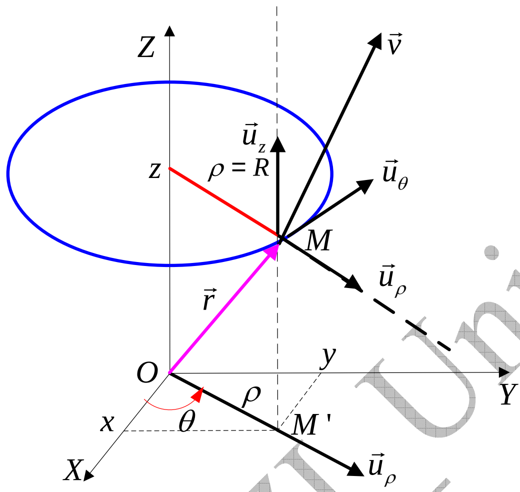
$$\left.\begin{array}{l}\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{z} = h\dot{\theta}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

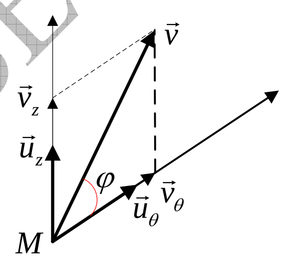
Le vecteur accélération est à son tour :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + R.\dot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{\theta} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_\rho\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_\rho + R.\ddot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z}$$

2/ Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est parallèle au plan $OXY$, donc l'angle que forme le vecteur vitesse avec le plan $OXY$ est égal à l'angle que fait le vecteur $\vec{u}_\theta$ avec le plan $OXY$, comme il est indiqué sur la figure ci-dessous, en plus du fait que $\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_z$.




$$\tan\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{v_z}{v_\theta} = \frac{h\dot{\theta}}{R\dot{\theta}} \Rightarrow \boxed{\tan\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{h}{R} = Cte}$$

3/ Le mouvement est rotationnel uniforme, cela veut dire que $\dot{\theta} = \omega = Cte$ et $\vec{a} = -R.\omega^2.\vec{u}_\rho$.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{u}_\rho$, c'est-à-dire centripète, ce qui confirme qu'il passe par l'axe du cylindre. $\vec{u}_\rho$ appartient au plan $OXY$, et $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{u}_\rho$, ce qui montre que l'accélération est parallèle au plan $OXY$.

Nous venons de démontrer que l'accélération est centripète, donc :

$$\left.\begin{array}{l}r = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{v^2}{a} \\ v^2 = R^2.\omega^2 + h^2.\omega^2 \\ a = R^2.\omega^2\end{array}\right| \Rightarrow r = \frac{R^2\omega^2 + h^2\omega^2}{R\omega^2}, \quad \boxed{r = \frac{R^2 + h^2}{R},}$$

**Exercice 4.25 :**

1/ a/ Le mouvement du point $m$ s'effectue dans le plan $XOY$. Afin d'obtenir l'équation de la trajectoire de ce point, on élimine le temps entre les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$. Nous obtenons $x^2 + y^2 = R^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $R$.

b/ Suivant l'axe $OZ$, l'équation de la trajectoire $z = \alpha.t$ nous indique que le mouvement est rectiligne uniforme verticalement.

c/ La trajectoire du mobile est la composition du mouvement plan et du mouvement vertical, il en résulte un mouvement hélicoïdal.

2/ Dans le système de coordonnées cylindriques :

a/ Le vecteur position est : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{r} = \overrightarrow{OM} = R.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

b/ La vitesse et l'accélération du point $M$ sont donc :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + z.\vec{u}_z \\ \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi = R\omega.\vec{u}_\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega.\vec{u}_\varphi + b.\vec{u}_z} \quad , \quad \boxed{v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = R\omega.\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}.\vec{u}_\rho = -R\omega.\vec{u}_\rho \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2.\vec{u}_\rho} \quad , \quad \boxed{a = R\omega^2}$$

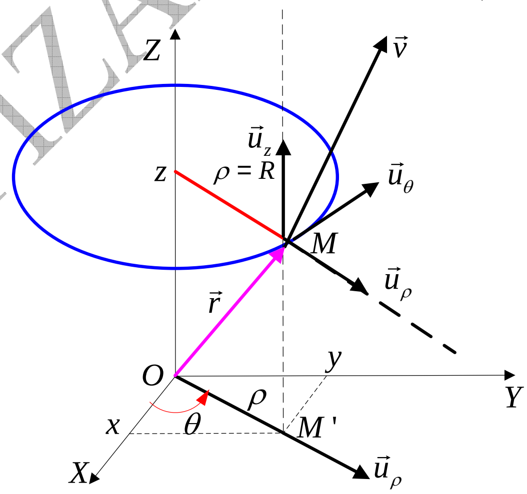
L'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur $\vec{u}_\varphi$, d'après la figure ci-dessous, est :

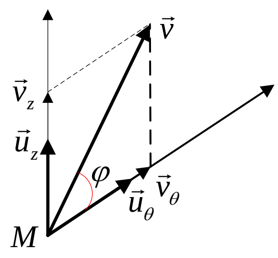
$$\boxed{\tan\beta = \frac{v_z}{v_\varphi} = \frac{b}{R\omega}}$$

Quant à l'accélération elle est centripète c'est-à-dire qu'elle est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire.

c/ Le rayon de courbure est :

$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{v^2}{a_N} \\ a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = R^2.\omega^4 - \left(R^2.\omega^2 + b^2\right) \\ a_T^2 = R^2.\omega^2 + b^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{r = \frac{R^2.\omega^2 + b^2}{\sqrt{R^2.\omega^2\left(\omega^2 - 1\right) - b^2}}}$$




**Exercice 4.26 :**

1/ Les expressions des vecteurs unitaires de la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ en coordonnées cartésiennes sont :

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\phi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

**Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}$ :**

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot\theta\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot\varphi.\sin\theta.\sin\varphi.\vec{i} + \dot\theta\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot\varphi.\sin\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot\theta\sin\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot\theta\left[\underbrace{\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_\theta}\right] - \dot\varphi.\sin\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_r = \dot\theta.\vec{u}_\theta + \dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\varphi}$$

**Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\theta$ :**

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \dot\theta\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot\varphi.\cos\theta.\sin\varphi.\vec{i} - \dot\theta\sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot\varphi.\cos\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot\theta\cos\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot\theta\left[\underbrace{\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_r}\right] + \dot\varphi.\cos\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot\theta.\vec{u}_r + \dot\varphi.\cos\theta.\vec{u}_\varphi}$$

**Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\theta$ :**

$$\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot\varphi.\cos\varphi.\vec{i} - \dot\varphi.\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot\varphi.\left[\cos\varphi.\vec{i} + \dot\varphi.\sin\varphi.\vec{j}\right] \to (1)$$

Cette expression n'est pas définitive…

Retournons aux expressions de $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$ . Multiplions la première par $\sin\theta$ et la seconde par $\cos\theta$ , nous obtenons :

$$\vec{u}_r.\sin\theta = \sin^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \sin\theta.\cos\theta.\vec{k} \to (2)$$
$$\vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \cos\theta.\sin\theta.\vec{k} \to (3)$$

Additionnons les deux expressions pour obtenir :

$$\vec{u}_r.\sin\theta + \vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}$$

Remplaçons maintenant dans l'expression $(1)$ de $\dot{\vec{u}}_\varphi$, elle devient :

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot\varphi.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]}$$

2/ Démonstration de l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques :

Nous partant de l'expression de la vitesse :

$$\vec{v} = \dot r.\vec{u}_r + r.\dot\theta.\vec{u}_\theta + r.\dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi$$

Dérivons la par rapport au temps :

$$\vec{a} = \ddot r.\vec{u}_r + \dot r.\dot{\vec{u}}_r + \dot r.\dot\theta.\vec{u}_\theta + r.\ddot\theta.\vec{u}_\theta + r.\dot\theta.\dot{\vec{u}}_\theta + \dot r.\dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\dot\theta.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\sin\theta.\dot{\vec{u}}_\phi$$

Remplaçons par leurs expressions trouvées en 1/ :

$$\vec{a} = \ddot r.\vec{u}_r + \dot r.\left[\dot\theta.\vec{u}_\theta + \dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \dot r.\dot\theta.\vec{u}_\theta + r.\ddot\theta.\vec{u}_\theta + r.\dot\theta.\left[-\dot\theta.\vec{u}_r + \dot\varphi.\cos\theta.\vec{u}_\varphi\right] +$$
$$\dot r.\dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\dot\theta.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\sin\theta.\left[-\dot\varphi.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right]$$

Développons puis ordonnons :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = &\left[\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta\right].\vec{u}_r + \dot{r}.\left[\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \\ &\left[r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi\right].\vec{u}_\phi + \\ &\left[r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta\cos\theta\right].\vec{u}_\theta\end{aligned}}$$

**<u>Exercice 4.27</u> :**

1/ En coordonnées sphériques le vecteur position s'écrit : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}$

a/ Dans le même système de coordonnées le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}$

$$\left.\begin{array}{l} r = R = Cte \Rightarrow \dot{r} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi \\ \theta = Cte \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \\ \varphi = \omega t^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = 2\omega t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi}$$

Le vecteur accélération avec les mêmes coordonnées s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right] \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\left(-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right)$$

$$\vec{a} = -\dot{\varphi}.R\omega t\sin\theta.\vec{u}_r R\omega.\vec{u}_\varphi - \dot{\varphi}.R\omega t\cos\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2 t^2.\vec{u}_r - \sqrt{3}.R\omega^2 t^2.\vec{u}_\theta + R\omega.\vec{u}_\varphi}$$

b/ Module du vecteur vitesse : $\boxed{v = R\omega t}$

Module du vecteur accélération :

$$a = \sqrt{\left(-R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(\sqrt{3}.R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(R\omega\right)^2}$$

$$\boxed{a = R\omega\sqrt{4\omega^2 t^4 + 1}}$$

c/ L'accélération tangentielle :

$$\left.\begin{array}{l} a_N^2 = a^2 - a_T^2 \\ a_T = \dfrac{dv}{dt} = R\omega \\ a^2 = R^2\omega^2\left[4\omega^2 t^4 + 1\right] \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a_N = 2R\omega^2 t^2}$$

2/ En coordonnées cartésiennes le vecteur position est:

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

$$\left.\begin{array}{l} x = R\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{2}R\cos\omega t \\ y = R\sin\theta\sin\varphi = \dfrac{1}{2}R\sin\omega t \\ z = R\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \frac{1}{2}R\cos\omega t^2.\vec{i} + \frac{1}{2}R\sin\omega^2 t.\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}R.\vec{k}}$$

a/ Les vecteurs vitesse et accélération dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont **:**

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R\omega t\sin\omega t^2.\vec{i} + R\omega t\cos\omega t^2.\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left[-R\omega\sin\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\cos\omega t^2\right].\vec{i} + \left[R\omega\cos\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\sin\omega t^2\right].\vec{j}}$$

Les modules de la vitesse et de l'accélération sont :

$$\boxed{v = R\omega t} \quad ; \quad \boxed{a = R\omega\sqrt{\left[1+4\omega^2 t^4\right]}}$$

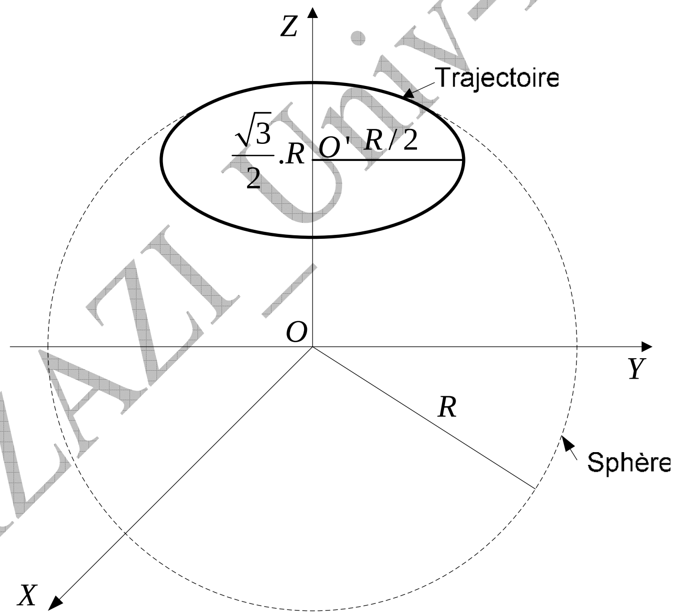
Les deux modules de la vitesse et de l'accélération sont compatibles avec le résultat de la question 1/b

3/ Trajectoire du point mobile :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2}$$

Nous en concluons que ce point matériel $M$ décrit un cercle de rayon $\dfrac{R}{2}$ et de centre $\left(0, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)$. Quant au vecteur position, il décrit un cône de sommet $O$ et dont le bord est le cercle décrit.

4/ Nature du mouvement du point $M$ : la trajectoire est un cercle, le module de la vitesse est constant et l'accélération tangentielle est constante, donc le mouvement est circulaire uniformément accéléré.



# E-IV/ MOUVEMENT RELATIF
# الحركة النسبية

## 1/ CHANGEMENT DE REPERE :

❖ **Introduction :** Nous avons dit précédemment que l'état de mouvement ou de repos sont deux notions essentiellement relatives ; cela veut dire que chacun des deux états dépend de la position du mobile vis-à-vis du corps pris comme référentiel.

Nous avons rapportés, tous les mouvements que nous avons étudiés jusqu'à présent, à un repère galiléen, c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Dans ce qui suit nous allons répondre principalement aux questions suivantes :

Lorsque deux mobiles sont liés à un même repère, quelle est la vitesse de l'un par rapport à l'autre ?

Quand est-il lorsque deux observateurs liés à deux repères différents qui sont en mouvement l'un par rapport à l'autre ?

La position, la trajectoire, la vitesse et l'accélération du même mobile varient selon le repère choisi par l'observateur.

**Exemple :** Soit un point matériel collé sur la jante d'une roue de bicyclette :

- Par rapport à un repère terrestre : le mouvement n'est pas uniforme et la trajectoire est une suite de courbes appelées cycloïdes.
- Par rapport à un repère lié à l'axe de la roue : le mouvement est uniforme et la trajectoire est circulaire.

Il est très intéressant de connaître comment sont reliées les observations enregistrées par deux observateurs liés à deux repères différents, l'un en mouvement par rapport à l'autre.

## 1/ VITESSE RELATIVE DE DEUX MOBILES :

Soient $A$ et $B$, deux points matériels en mouvement dans le repère $OXYZ$ . On suppose la présence d'un observateur au point $O$. Figure 4.16.

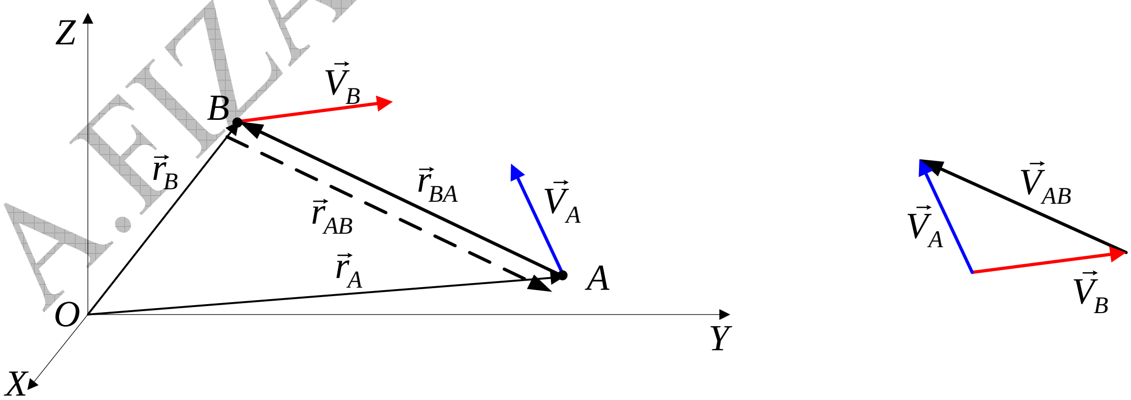



**Fig 4.16: vitesse relative de deux mobiles**

La vitesse de $A$ par rapport à l'observateur $O$ est $\overrightarrow{V_A} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$.

Nous définissons sa vitesse par rapport à $B$ comme étant $\vec{V}_{AB} = \dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$, tel que :

$$\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \,.$$

D'où :

$$\vec{V}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B} \qquad \textbf{(4.52)}$$

La vitesse de $B$ par rapport à l'observateur $O$ est $\overrightarrow{V_B} = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt}$.

Nous définissons sa vitesse par rapport à $A$ comme étant $\vec{V}_{BA} = \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$, tel que :

$$\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

D'où :

$$\vec{V}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A} \qquad \textbf{(4.53)}$$

Remarquons que $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$, c'est-à-dire que la vitesse de $A$ par rapport à $B$ est égale à la vitesse de $B$ par rapport à $A$, mais les deux vitesses sont de sens opposés .

On obtient les deux accélérations relatives des deux points matériels mobiles en dérivant, par rapport au temps, chacune des deux expressions des vitesses relatives posées précédemment :

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{V}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} - \frac{d\vec{V}_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B} \qquad \textbf{(4.54)}$$

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A} \qquad \textbf{(4.55)}$$

Là aussi, il faut remarquer que $\vec{a}_{AB} = -\vec{a}_{BA}$, c'est-à-dire que les deux accélérations sont égales mais de sens contraires.

**Exemple 4.11 :**

1/ Deux voitures $A$ et $B$ roulent dans deux voies d'une autoroute rectiligne avec les vitesses respectives $110 km.h^{-1}$ et $90 km.h^{-1}$. Déterminer le vecteur vitesse relative de $A$ par rapport à $B$ dans les deux cas suivants :

a/ les deux voitures roulent dans la même direction,

b/ les deux voitures roulent en sens inverses.

2/ Les deux voitures roulent maintenant sur deux routes qui se coupent formant entre elles un angle de $30°$. Déterminer le vecteur vitesse relative de $B$ par rapport à $A$.

**Réponse :**

1/ a/ La vitesse de la voiture $A$ par rapport à la voiture $B$ est : $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. En considérant $\vec{e}$ comme vecteur unitaire ; les deux vitesses sont parallèles et sont de même sens que $\vec{e}$ (figure 4.17-a-).

Donc : $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - 90\vec{e} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 20\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 20 km.h^{-1}}$

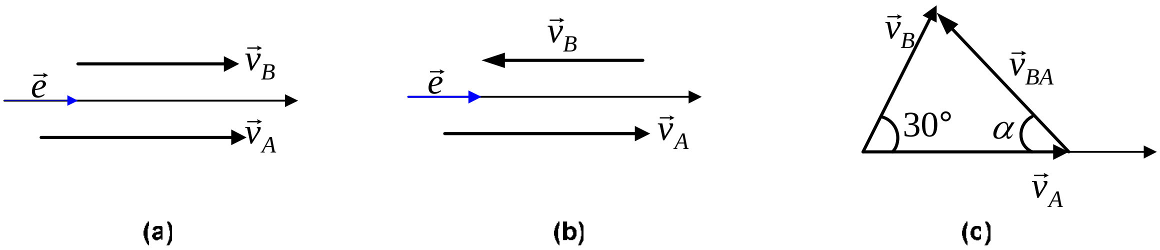



Fig 4.17

b/ Dans ce cas les vitesses sont parallèles mais de sens contraires (figure 4.17-b-) :

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - (-90\vec{e}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 200\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 200 km.h^{-1}}$$

2/ Vitesse relative de $B$ par rapport à $A$ lorsque les deux routes se coupent (voir figure 4.17-c-) :

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow v_{BA} = \left(v_B^2 + v_A^2 - 2v_Av_B\cos 30°\right)^{1/2}$$

$$v_{AB} = \left(110^2 + 90^2 - 2.110.90.0,87\right)^{1/2} \quad , \quad \boxed{v_{AB} = 54,5 km.h^{-1}}$$

Pour déterminer la direction du vecteur vitesse relative $\vec{v}_{AB}$ il suffit de calculer l'angle $\alpha$ en appliquant la loi des sinus :

$$\frac{v_{BA}}{\sin 30°} = \frac{v_B}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{v_B}{v_{BA}}\sin 30°} \quad \sin\alpha = \frac{90}{54,5}.0,5 \simeq 0,82 \Rightarrow \boxed{\alpha = 55,1°}$$

Cela veut dire que le passager à bord de la voiture $A$ voit la voiture $B$ rouler à sa gauche sous un angle de $55,1°$ (d'après la figure 4.17—c-) et à la vitesse de $54,5 km.h^{-1}$. Quant au passager à bord de la voiture $B$, il voit la voiture $A$ rouler à sa droite avec la vitesse de $54,5 km.h^{-1}$, mais sous un angle de $180 - (30° + 55,1°) = 94,9°$.

Nous venons de voir comment calculer la vitesse d'un mobile par rapport à un autre mobile, les deux mobiles étant liés au même repère. Mais quand est-il lorsque deux observateurs sont liés à deux repères différents, l'un en mouvement par rapport à l'autre ? Nous allons essayer de répondre, dans ce qui suit, à cette question.

## 3/ CONVENTIONS ET SYMBOLES :

Considérons les deux repères $(Ra)$, $(Rr)$ et deux observateurs chacun d'eux étant lié à l'un des deux repères. Figure 4.18.

$Ra$ : Repère absolu (معلم المطلق) que nous considérons fixe.

$R$ : Repère relatif(المعلم النسبي) en mouvement par rapport à $Ra$.

$M$ : Point matériel en mouvement par rapport aux deux repères..

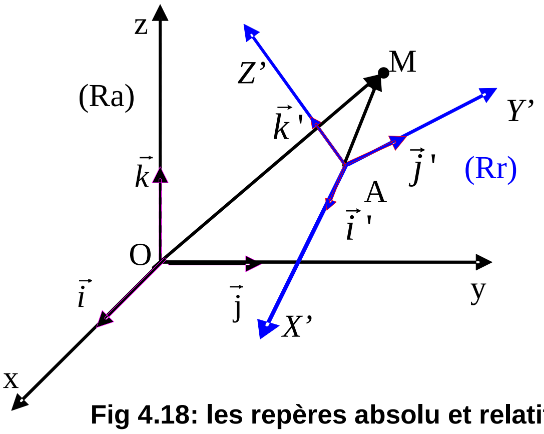



**Fig 4.18: les repères absolu et relatif**

Chaque observateur enregistre ses observations. Nous consignons dans le tableau suivant ces résultats :

| Observateur | Dans le repère $(Ra)$<br>$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ invariants dans $Ra$ | Dans le repère $(Rr)$<br>$\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ Variables prp à $Ra$ |
|---|---|---|
| Position | $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ | $\vec{r}\,'=\overrightarrow{AM}$ |
| La vitesse | $\vec{v}_a=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ | $\vec{v}_r=\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$ |
| L'accélération | $\vec{a}_a=\dfrac{d\vec{v}_a}{dt}$ | $\vec{a}_r=\dfrac{d\vec{v}_r}{dt}$ |

**Remarque importante :** Nous avons supposé dans notre étude précédente que $t=t'$, c'est-à-dire que les deux observateurs utilisent le même temps ; cela veut dire que le temps ne dépend pas du mouvement. Cela paraît tout à fait raisonnable, mais l'expérience peut prouver le contraire. Cette supposition ne peut être acceptable que dans le cas des petites vitesses par rapport à la célérité de la lumière, et c'est cela que nous considérerons dans tout ce qui suit.

- **Relation entre les positions :**

Sur la figure 4.18, on peut voir :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}} \qquad \textbf{(4.56)}$$

$$\underbrace{x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}}=\underbrace{(x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}+z_A.\vec{k})}_{\overrightarrow{OA}}+\underbrace{\left(x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,'\right)}_{\overrightarrow{AM}}$$

- **Relation entre les vitesses :**

En dérivant la relation (56.4) par rapport au temps, on obtient la relation entre les différentes vitesses :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}+\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}\,'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e} \underbrace{+\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}} \qquad \textbf{(4.57)}$$

$\vec{v}_a$ : La vitesse absolue ( **السرعة المطلقة** ) : c'est la vitesse de $M$ par rapport au repère $(Ra)$ .

$\vec{v}_e$ : Vitesse d'entraînement (**سرعة الجر**) : c'est la vitesse du repère mobile $(Rr)$ par rapport au repère absolu fixe $(Ra)$, qu'on peut considérer aussi comme étant la vitesse absolue $\vec{v}_a$ du mobile $M$ dans $(Ra)$ si les coordonnées de $M$ dans $(Rr)$ sont constantes, c'est-à-dire si $M$ est fixe par rapport à $(Rr)$ : $\vec{v}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a$

$\vec{v}$ : Vitesse relative ( **السرعة النسبية** ), c'est la vitesse du point $M$ par rapport au repère $(Rr)$. Nous pouvons la considérer comme étant la vitesse absolue $\vec{v}_a$ du mobile $M$ dans $(Ra)$ si le repère $(Rr)$ est fixe par rapport au repère $(Ra)$ : $\vec{v}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_a$

La relation qui lie les trois vitesses et qu'on appelle **loi de composition des vitesses** est :

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r} \qquad \textbf{(4.58)}$$

Le vecteur de la vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs de la vitesse d'entraînement et celui de la vitesse relative.

**Remarques :**

- Si $(Ra)$ et $(Rr)$ sont fixes l'un par rapport à l'autre $(\vec{v}_e = \vec{0})$, alors les deux observateurs enregistrent les mêmes vitesses, donc les mêmes trajectoires bien que les vecteurs position soient différents $(\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{OA})$.
- Si $(Rr)$ est en mouvement de translation (quel soit uniforme ou non) par rapport au repère $(Ra)$ tels que $\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'$ soient constants, alors $\vec{v}_e$ est indépendante de $M$ .

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt} = \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

❖ **Relation entre les accélérations :**

En ordonnant après avoir dérivé par rapport au temps l'expression (4.57) on obtient la relation entre les différentes accélérations par rapport aux deux repères :

$$\vec{a}_a=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}_a}{dt}=\left[\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}+x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}\right]\to\vec{a}_e$$
$$+\left[\vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2}+\vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2}+\vec{k}\,'\frac{d^2z'}{dt^2}\right]\to\vec{a}_r \qquad \textbf{(4.59)}$$
$$+2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2}+\frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2}+\frac{dz'.d\vec{k}\,'}{dt^2}\right]\to\vec{a}_C$$

$\vec{a}_a$ : accélération absolue (التسارع المطلق) : c'est l'accélération de $M$ par rapport au repère $(Ra)$ .

$\vec{a}$ : accélération relative(التسارع النسبي) : c'est l'accélération de $M$ par rapport au repère $(Rr)$.

$\vec{a}_e$ : accélération d'entraînement(تسارع الجر) : c'est l'accélération du repère $(Rr)$ par rapport au repère $(Ra)$ .

$\vec{a}_C$ : accélération de Coriolis(تسارع كوريوليس) : c'est une accélération complémentaire appelée **accélération de Coriolis** en mémoire à son auteur (Gaspard Coriolis 1792-1843) qui l'a établie en 1832.

**L'accélération de Coriolis s'annule dans les cas suivants :**

- Si $M$ est fixe par rapport au repère $(Rr)$ : $\frac{dx'}{dt}=\frac{dy'}{dt}=\frac{dz'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_C=\vec{0}$
- Si le repère $(Rr)$ est en translation (même variée) par rapport au repère $(Ra)$ :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}=\dfrac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}=\dfrac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_e=\dfrac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\\[2ex]\dfrac{d\vec{i}\,'}{dt}=\dfrac{d\vec{j}\,'}{dt}=\dfrac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_c=\vec{0}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e$$

**Exemple 4.12** : Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de $8ms^{-1}$ . Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse de $50km.h^{-1}$.

**Réponse :**

$\vec{v}_e$ :Vitesse de la voiture par rapport au sol, c'est à dire la vitesse d'entraînement.
$\vec{v}_a$ :Vitesse des flocons par rapport au sol, c'est à dire la vitesse absolue.
$\vec{v}$ :Vitesse des flocons par rapport à la voiture, c'est à dire la vitesse relative.
Sur la figure 4.19 on peut voir:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e \quad ; \quad \vec{v}_r = \vec{v}_a + \left(-\vec{v}_e\right)$$

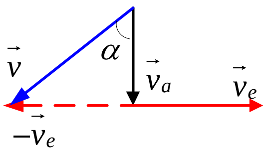


Fig 4.19

Transformons la vitesse de la voiture: $50km.h^{-1} = 13,9ms^{-1}$
Passons à l'application numérique: $\boxed{v_r = \left(v_a^2 + v_e^2\right)^{1/2}}$ $\boxed{v_r = 16ms^{-1}}$

Pour déterminer la direction du vecteur de la vitesse relative on doit calculer la tangente de l'angle $\alpha$

$$tg\alpha = \frac{v_e}{v_a} = 1,74 \Rightarrow \boxed{\alpha = 60,1°}$$

Cela veut dire que les flocons de neige tombent avec la vitesse de $16ms^{-1}$ sous un angle de

$$\alpha = 60,1°$$

**Exemple 4.13 :** Un bateau prend la mer en direction du Nord 60° Ouest $(N60°O)$ à la vitesse de $4km.h^{-1}$ par rapport à l'eau. La direction du courant d'eau est tel que le mouvement résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l' Ouest à la vitesse de $5km.h^{-1}$. Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport au sol.

**Réponse :** La première des choses à faire est de dessiner la figure 4.20. Sans dessin rien ne peut être tenté pour résoudre l'exercice.

Si l'énoncé a été bien compris, il faut calculer le module et la direction du vecteur de la vitesse d'entraînement.

$\vec{v}_a$ : La vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport au sol.

$\vec{v}_e$ : la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du courant d'eau par rapport au sol.

$\vec{v}$ : la vitesse relative, c'est-à-dire la vitesse du bateau par rapport à l'eau de mer.

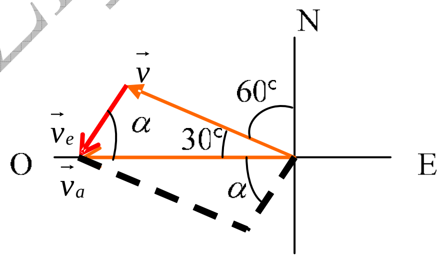


Fig 4.20

Partant de la figure 4.20 et de la loi de composition des vitesses, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\boxed{v_e = \left[v_a{}^2 + v_r{}^2 - 2v_a.v_r.\cos 30°\right]^{1/2}}$$

Application numérique : $\boxed{v_e = 2,52km.h^{-1}}$

Pour déterminer la direction de $\vec{v}_e$ il est nécessaire de calculer l'angle $\alpha$ en faisant appel à la loi des sinus :

$$\frac{v_r}{\sin\alpha}=\frac{v_e}{\sin 30°}\Rightarrow \boxed{\sin\alpha=\frac{v_r}{v_e}.\sin\alpha}\ ;\ \sin\alpha=0,4\Rightarrow\boxed{\alpha=23,6°}$$

Cela veut dire que la direction du vecteur de la vitesse de l'eau de mer par rapport à le sol fait un angle de $23,6°$ avec l'axe Ouest Est vers le Sud soit $O23.6°S$ .

## 4/ CAS DU MOUVEMENT DE ROTATION:

### ❖ Relation entre les vitesses :

Nous pouvons considérer la vitesse angulaire comme étant une **grandeur vectorielle,** telle que sa direction soit orthogonale au plan du mouvement et dont le sens est défini par la règle de la main droite ( ou toute autre règle correspondante) qui indique le sens du vecteur résultant du produit vectoriel.

D'après la figure 4.21 nous pouvons écrire :

$$R=r.\sin\alpha$$

Sachant que $v=\omega.R$

Donc $v=\omega R\sin\alpha$

Dés lors nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}\Leftrightarrow v=\omega.r.\sin\alpha} \qquad \textbf{(4.60)}$$

Il est donc justifié d'écrire : $\vec{\omega}=\dfrac{d\theta}{dt}.\vec{k}$

Sur la figure (4.22), considérons deux observateurs : l'observateur $O$ lié au repère $R$ et l'observateur $O'$ lié au repère $R'$ . Les deux observateurs sont en mouvement de rotation, sans translation, l'un par rapport à l'autre.

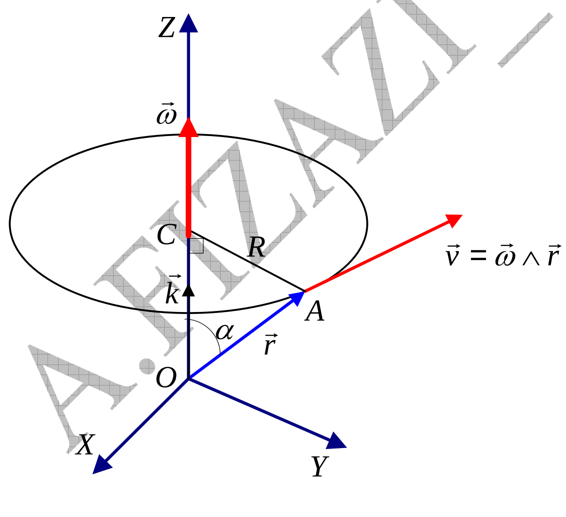



**Fig 4.21: Le vecteur de la vitesse de rotation**

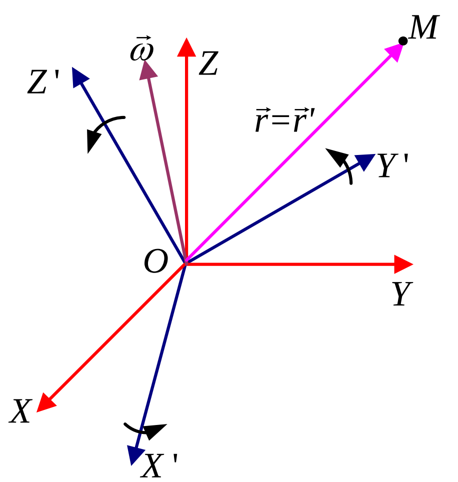



**Fig 4.22: Deux référentiels en mouvement de rotation uniforme relatif**

Chaque observateur voit le repère de l'autre observateur tourner avec une vitesse angulaire $\omega$ .

Pour l'observateur $O$ lié au repère $OXYZ$ , la vitesse du point matériel $M$ est la dérivée de l'expression du vecteur position :

$$\boxed{\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_a = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}} \qquad \textbf{(4.61)}$$

Pour l'observateur $O'$ lié au repère $OX'Y'Z'$ (remarquez que les deux repères ont la même origine, c'est-à-dire $O'$ confondu avec $O$ ), la vitesse du point matériel $M$ est la dérivée de son vecteur position, soit :

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} = x'.\vec{i}\,' + y'.\vec{j}\,' + z'.\vec{k}\,' \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}\,'} \qquad \textbf{(4.62)}$$

Pour l'observateur $O$, le repère $OX'Y'Z'$ tourne, donc les vecteurs unitaires $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ changent de direction à chaque instant. Cet observateur écrit donc par rapport au repère $R'$ :

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}\,' + x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}} \qquad \textbf{(4.63)}$$

D'autre part les extrémités des vecteurs unitaires $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ effectuent un mouvement circulaire uniforme par rapport à l'observateur $O$ avec une vitesse angulaire $\omega$ . En d'autre terme le rapport $\frac{d\vec{i}\,'}{dt}$ représente la vitesse d'un point situé à une distance égale à l'unité de $O$ et se déplace avec un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire $\omega$ .

Par analogie avec l'équation(60.4) , nous pouvons écrire :

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}\,' \quad ; \quad \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}\,' \quad ; \quad \frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}\,'$$

De l'équation(63.4) nous pouvons écrire :

$$x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{\omega} \wedge x'.\vec{i}\,' + \vec{\omega} \wedge y'.\vec{j}\,' + \vec{\omega} \wedge z'.\vec{k}\,'$$

$$x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{\omega} \wedge (x'.\vec{i}\,' + y'.\vec{j}\,' + z'.\vec{k}\,')$$

$$\boxed{x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}} \qquad (4.64)$$

En remplaçant dans l'équation(63.4) , nous obtenons :

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}} \qquad \textbf{(4.65)}$$

Cette dernière expression exprime la relation entre les vitesses du point $M$ , mesurées par les deux observateurs qui sont en mouvement relatif de rotation.

- **La vitesse de rotation instantanée :**

Nous avons vu que $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$ . Si $\vec{\omega}$ est variable avec le temps, alors $\vec{\omega}(t) = \omega(t).\vec{k}$ représente la vitesse de rotation instantanée. Pour discerner la vitesse angulaire constante dans le mouvement circulaire uniforme de la vitesse de rotation instantanée, on note cette dernière conventionnellement par $\vec{\Omega}(t)$ .

## ❖ Relation entre les accélérations :

Pour arriver à la relation qui entre les différentes accélérations nous allons suivre la même méthode que celle des vitesses.

L'accélération du mobile $M$ mesurée par l'observateur $O$ par rapport au repère $OXYZ$ est :

$$\vec{a}_a = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \vec{i}.\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}.\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}.\frac{dv_z}{dt}$$

L'accélération du mobile $M$ mesurée par l'observateur $O'$ par rapport au repère $OX'Y'Z'$, sans considérer la rotation, est :

$$\vec{a}_r = \vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}$$

En dérivant l'expression 4.65, en rappelant que $\vec{\omega}$ est considérée constante, nous obtenons :

$$\boxed{\vec{a}_a = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad \textbf{(4.66)}$$

Puisque : $\vec{v}_r = \vec{v}' = \vec{i}'.v_x' + \vec{j}'.v_y' + \vec{k}'.v_z'$

Donc : $\dfrac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{i}'.\dfrac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\dfrac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\dfrac{dv_z'}{dt} + v_x'\dfrac{d\vec{i}'}{dt} + v_y'\dfrac{d\vec{j}'}{dt} + v_z'\dfrac{d\vec{k}'}{dt}$

De la même façon que nous avons obtenu l'équation 4.64 , nous arrivons à :

$$\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt} + \vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt} + \vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Nous avons aussi : $v_x'\dfrac{d\vec{i}'}{dt} + v_y'\dfrac{d\vec{j}'}{dt} + v_z'\dfrac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{a}$

D'où :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'} \qquad \textbf{(4.67)}$$

De même :

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{v_a} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}} \qquad \textbf{(4.68)}$$

Tel que :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$$

$$\boxed{\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)} \qquad \textbf{(4.69)}$$

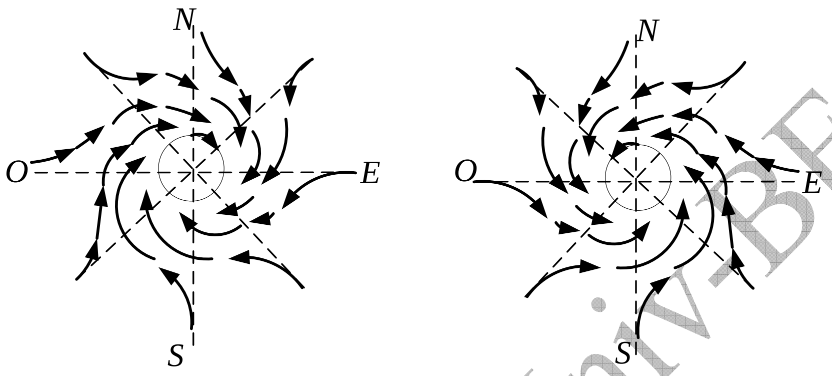
Par substitution des résultas 4.67 et 4.68 dans l'équation 4.69 on obtient en fin de compte l'équation 4.70 qui nous donne la relation entre les différentes accélérations du mobile $M$ mesurées par les deux observateurs $O$ et $O'$, lesquels sont en mouvement relatif de rotation **uniforme**.

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)} \qquad \textbf{(4.70)}$$

Le terme $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ s'appelle accélération de Coriolis, et le terme $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$ représente une accélération centripète.

Ces deux accélérations ( Coriolis et centripète) résultent du mouvement relatif de **rotation** des deux observateurs.

Ces deux accélérations se manifestent au cours du mouvement de rotation des vents et des cyclones (photo4.1), et même dans l'eau qui est absorbée par le siphon du lavabo par exemple. Le mouvement de rotation apparaît clairement, son sens varie selon la région du globe terrestre où a lieu l'événement. Dans l'hémisphère nord la rotation s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, par contre dans l'hémisphère sud le sens de la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre. Figure 4.23




Dans l 'hémisphère sud du globe Dans l 'hémisphère nord du globe

Fig 4.23: Sens de rotation d'un cyclone ou d'une tornade

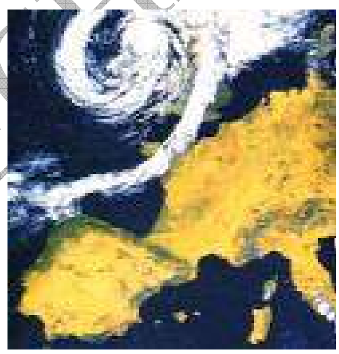


Photo 4.1

Nous clôturons ce chapitre en signalant le cas du **mouvement de rotation non uniforme.**

En revenant à l'expression 4.59, l'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

En posant $\overrightarrow{OA} = \vec{r}\,'$ nous pouvons écrire :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\underbrace{x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt^2}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}\right] = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'} \wedge \vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}\,' + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'\right)} \qquad \textbf{(4.71)}$$

Observons que l'accélération d'entraînement renferme trois termes :

$\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}$ : accélération du mouvement de translation de l'origine $A$ du référentiel $(Rr)$ par rapport au repère absolu $(Ra)$ ,

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\,'$ : accélération résultant de la non uniformité de la rotation de $(Rr)$ par rapport au référentiel $(Ra)$ , c'est-à-dire résultant de l'accélération angulaire du référentiel $(Rr)$ ,

$\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$ : accélération centripète dirigée vers l'axe de rotation.

**CONCLUSION :** **en introduisant le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ les deux lois de composition des vitesses et des accélérations, dans le cas général, prennent les formes respectives :**

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)}_{\vec{v}_e}} \qquad \textbf{(4.72)}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a}_a} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{AM}}{dt^2}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{2.\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}_{\vec{a}_c} + \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{AM} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right)}_{\vec{a}_e}} \qquad \textbf{(4.73)}$$

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

**Exercice 4.28**

En roulant sous la pluie à $100 km.h^{-1}$ sur une route plane, un conducteur remarque que les gouttes de pluie ont, vues à travers les vitres latérales de sa voiture, des trajectoires qui font un angle de $80°$ avec la verticale. Ayant arrêté sa voiture, il remarque que la pluie tombe en fait verticalement. Calculer la vitesse de la pluie par rapport à la voiture immobile et par rapport à la voiture se déplaçant à $100 km.h^{-1}$

**تمرين 28.4**

و هو يسير بـــ $100 km.h^{-1}$ على طريق مستو ، لاحظ السائق أن لقطرات المطر، حسب ما يراه عبر الزجاج العرضي لسيارته، مسارات تصنع الزاوية $80°$ مع الشاقول. لما أوقف سيارته رأى أن المطر يسقط شاقوليا. أحسب سرعة المطر بالنسبة للسيارة متوقفة و بالنسبة للسارة و هي تسير بـــ $100 km.h^{-1}$.

**Exercice 4.29**

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur $h$ une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $g$ .

1/ Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?

2/ Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e$ ?

(représenter dans chaque cas la trajectoire demandée).

**تمرين 29.4**

من أعلى بناية ارتفاعها $h$ نترك كرية تسقط بدون سرعة ابتدائية. سقوطها يجري وفق الشاقول بحركة متسارعة بانتظام بتسارع $g$ .

1/ ما هو مسار الكرية في مرجع مرتبط بسيارة تسير بحركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\vec{v}$ و تمرّ بشاقول السقوط لحظة ترك الكرية؟

2/ ما هو مسار الكرية في نفس المرجع المذكور إذا افترضنا أن السيارة، لحظة ترك الكرية تسقط، تنطلق بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام بتسارع $\vec{a}_e$ ؟

(مثل في كل حالة المسار المطلوب).

**Exercice 4.30**

On considère dans le repère fixe $OXY$ le système de deux axes $Oxy$ mobiles tel que l'axe $Ox$ forme l'angle $\theta$ avec l'axe $OX$ . Un point matériel $M$ se déplace sur l'axe $Ox$ , sa position est définie par $r = OM$ . Calculer :

1/ la vitesse et l'accélération relatives du point,

2/ la vitesse et l'accélération d'entraînement,

3/ l'accélération coriolis.

4/ En déduire la vitesse et l'accélération du point $M$ dans les coordonnées polaires.

**تمرين 30.4**

نعتبر في المستوي الثابت $OXY$ جملة محورين $Oxy$ متحركين حيث يشكل المحور $Ox$ زاوية $\theta$ مع المحور $OX$ . تتحرك نقطة مادية $M$ على المحور $Ox$ و هي معرّفة بـــ $r = OM$ .أحسب:

1/ السرعة و التسارع النسبيين للنقطة $M$ ،

2/ سرعة و تسارع الجرّ،

3/ تسارع كوريوليس،

4/ إستنتج السرعة و التسارع المطلقين لـــ $M$ بالإحداثيات القطبية.

**Exercice 4.31**

Dans le plan $XOY$ , une droite $OX'$ tourne autour de l'axe $OZ$ avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante. Un mobile $M\left(OM = r\right)$ se déplace sur la droite $OX'$ d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a$ . A l'instant initial $M$ se trouve en $M_0$ , au repos, puis s'éloigne de $O$ .

1/Déterminer les expressions littérales vectorielles

**تمرين 31.4**

في المستوى $XOY$ ، يدور مستقيم $OX'$ حول المحور $OZ$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \dot{\theta}$ . ينتقل متحرك $M\left(OM = r\right)$ على المستقيم $OX'$ بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام بتسارع $a$ . في اللحظة الابتدائية $M$ يوجد في $M_0$ ، في حالة سكون، ثم يبتعد عن $O$ .

1/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية للسرعات النسبية،

des vitesses relative, d'entraînement et absolue de $M$ .

Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur vitesse absolue du point $M$ .

2/ Si l'axe $OX'$ est confondu avec l'axe $OX$ à l'instant initial, calculer les coordonnées du point $M$ à la date $t = 3s$ . Dessiner les trois vecteurs vitesses à cette date.

3/ Déterminer les expressions littérales vectorielles dans une base polaire des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis de $M$ .

Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur accélération absolue du point $M$ .

Dessiner ces vecteurs accélérations à t =3s.

Données: $OM_0 = 1cm$ ; $a = 2cm.s^{-2}$ ;

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1}.$$

الجر و المطلقة لــ $M$ .

عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع السرعة المطلقة للنقطة $M$ .

2/ إذا كان المحور $OX'$ منطبق على المحور $OX$ في اللحظة الإبتدائية، أحسب إحداثيات النقطة $M$ في اللحظة $t = 3s$ .

أرسم أشعة السرعة الثلاثة في هذه اللحظة $M$ .

3/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية في قاعدة للإحداثيات القطبية للتسارعات النسبية، الجر و كوريوليس لــ $M$ .

عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع التسارع المطلق للنقطة $M$ .

أرسم أشعة التسارعات هذه في $M$ .

المعطيات: $OM_0 = 1cm$ ، $a = 2cm.s^{-2}$ ،

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1}$$

**Exercice 4.32**

Un disque circulaire de centre $A$ et de rayon $R$ roule sans glisser sur l'axe $OX$ avec une vitesse angulaire $\omega$ constante. Au départ $t = 0$ , un point $M$ de la circonférence coïncide avec l'origine $O$ .

1/ Quelles sont les coordonnées du point $M$ au temps $t$ en fonction de $\omega, R$ et $t$ ? En déduire la nature de la trajectoire.

2/ Calculer la vitesse absolue et la vitesse relative en précisant leurs directions par rapport à l'axe $OX$ .

3/ A partir des expression des vecteurs de la vitesse absolue et la vitesse relative, vérifier la norme et la direction du vecteur vitesse d'entraînement.

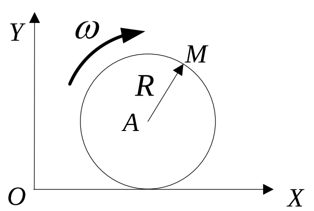
**تمرين 32.4**

في المستوي $XOY$ يتدحرج ( يدور بدون انزلاق) قرص دائري نصف قطره $R$ و مركزه $A$ على المحور $OX$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ . في البداية $t = 0$ ، تنطبق نقطة $M$ من محيط القرص مع المبدإ $O$ .

1/ ما هي إحداثيتي النقطة $M$ في اللحظة $t$ بدلالة $\omega, R$ و $t$ ؟ إستنتج طبيعة المسار؟

2/ أحسب السرعة المطلقة و السرعة النسبية و وضح جهتيهما بالنسبة للمحور $OX$ .

3/ انطلاقا من عبارتي شعاعي السرعة المطلقة و النسبية تأكد من طويلة و جهة سرعة الجر.




**Exercice 4.33**

Dans le plan $XOY$ , une droite tourne autour de $OZ$ avec une vitesse constante $\omega = \dot{\theta}$ .

Un point mobile $M\left(OM = r\right)$ se déplace sur la droite $OX'$ suivant la loi :

$$r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \text{ avec } r_0 = cte .$$

1/ Déterminer à l'instant $t$ en fonction de ${}_0$ et $\omega$, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de $M$ par

**تمرين 33.4**

في مستوي $XOY$ ، يدور مستقيم حول $OZ$ بسرعة ثابتة $\omega = \dot{\theta}$ .

تتنقل نقطة $M\left(OM = r\right)$ متحركة على المستقيم $OX'$ وفق القانون:

$$r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \text{ مع } r_0 = cte$$

1/ حدّد في اللحظة $t$ بدلالة ${}_0$ و $\omega$ ، السرعة النسبية

leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celui-ci est constant.

2/ Déterminer à l'instant $t$ en fonction de ${}_0$ et $\omega$, l'accélération relative l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de $M$ par leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

و سرعة الجر لــ $M$ بمسقطيهما في المعلم المتحرك $X'O'Y'$ . إستنتج السرعة المطلقة المعبر عنها في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذه ثابتة.

2/ حدد في اللحظة $t$ بدلالة ${}_0$ و $\omega$، التسارع النسبي تسارع الجر و التسارع التكميلي لــ $M$ بإسقاطاتها في المعلم المتحرك $X'O'Y'$. إستنتج التسارع المطلق المعبر عنه في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذا ثابتة.

**<u>Exercice 4.34</u>**

Une mouche $M$ se déplace sur l'aiguille des secondes d'une montre accrochée à un mur vertical avec un mouvement uniforme de vitesse $v$. La mouche part du point $O$ à l'instant $t=0$ pour atteindre l'extrémité de l'aiguille de longueur $20cm$ une minute plus tard.

1/ Ecrire les expressions de la vitesse $\vec{v}_M$ et de l'accélération $\vec{a}_M$ de $M$ dans la base mobile $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ associée à la mouche.

2/ Calculer les coordonnées $\theta_M, x_M, y_M$ de la mouche aux instants $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. Dessiner la trajectoire sur le mur.

3/ Représenter sur la trajectoire le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ au temps $t=45s$ et le vecteur accélération $\vec{a}_M$ au temps $t=60s$.

**<u>تمرين 34.4</u>**

تنتقل ذبابة $M$ على رقاص الثواني لساعة مثبتة على جدار عمودي بحركة منتظمة سرعتها $v$. تنطلق الذبابة من النقطة $O$ في اللحظة $t=0$ لتصل بعد دقيقة واحدة إلى نهاية الرقاص الذي طوله $20cm$.

1/ أكتب عبارتي السرعة $\vec{v}_M$ و التسارع $\vec{a}_M$ لــ $M$ في القاعدة المتحركة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ المرتبطة بالذبابة.

2/ أحسب الإحداثيات $\theta_M, x_M, y_M$ للذبابة في اللحظات $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. أرسم المسار على الجدار.

3/ مثل على المسار شعاع السرعة $\vec{v}_M$ في اللحظة $t=45s$ و شعاع التسارع $\vec{a}_M$ في اللحظة $t=60s$.

**<u>Exercice 4.35</u>**

Dans le plan $OXY$, un cercle de rayon $R$, de diamètre $OA$, tourne à la vitesse angulaire constante $\omega$ autour du point $O$. On lie à son centre mobile $O'$ deux axes rectangulaires $O'X'Y'$ (l'axe $O'X'$ est dirigé suivant $OA$).

A l'instant $t=0$, $A$ est sur $OX$, $OX$ et $OX'$ étant colinéaires.

Un point $M$, initialement en $A$, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire $\omega$.

1/ Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de $M$ dans le repère $OXY$ (en dérivant les composantes de $\overrightarrow{OM}$).

2/ Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de $M$ dans le repère $O'X'Y'$ puis dans $OXY$.

3/ a/ Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère $OXY$ par la loi de composition des vitesses.

b/ Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère $OXY$ ; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

**<u>تمرين 35.4</u>**

في المستوي $OXY$، يدور قرص نصف قطره $R$ وقطره $OA$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ حول النقطة $O$. نشرك لمركزه المتحرك $O'$ محورين مستطيلين $O'X'Y'$ ( المحور $O'X'$ موجه وفق $OA$).

في اللحظة $t=0$، $A$ يقع على $OX$، $OX$ و $OX'$ متوافقان خطيا.

نقطة $M$، كانت في البداية في $A$ ، تتنقل على المحيط في الاتجاه الموجب بنفس السرعة الزاوية $\omega$.

1/ أحسب مباشرة مركبتي شعاعي سرعة و تسارع $M$ في المعلم $OXY$ (نشتق مركبات $\overrightarrow{OM}$).

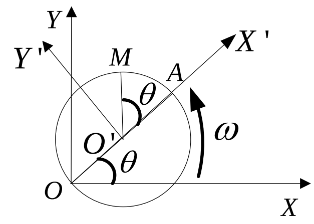
2/ أحسب مركبات السرعة والتسارع النسبيين لــ $M$ في المعلم $O'X'Y'$ ثم في $OXY$.

3/ ا/ أحسب مركبات سرعة الجر في المعلم $OXY$ باستعمال قانون تركيب السرعات.

ب/ أحسب بالمثل مركبات تسارع الجر في المعلم $OXY$؛ إستنتج التسارع التكميلي(كوريوليس).

4/ تأكد من مركبات سرعة الجر و تسارع الجر التكميلي باستعمال العبارات التي تقحم شعاع الدوران $\vec{\omega}$.

| | |
|---|---|
| 4/ vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$ . | |



## Corrigés des exercices de 4.28 à 4.35 — حلول التمارين من 4.28 إلى 4.35

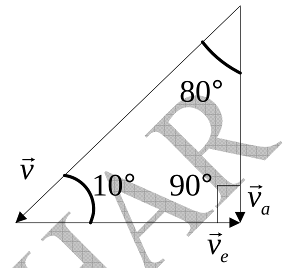
**Exercice 4.28 :**

Soit $\vec{v}_a$ la vitesse de précipitation de la pluie par rapport au sol, $\vec{v}$ la vitesse de la pluie par rapport au véhicule et $\vec{v}_e$ la vitesse de la voiture par rapport au sol :

Représentons les trois vecteurs puis appliquons la loi des sinus:

La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture au repos est:

$$\frac{v_a}{\sin 10°} = \frac{v_r}{\sin 90°} \Rightarrow \boxed{v_a = \frac{\sin 10°}{\sin 90°} v_r} \ ; \ \boxed{v_a \simeq 17,4 km.h^{-1}}$$




La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture en mouvement est:

$$\frac{v_r}{\sin 90°} = \frac{v_e}{\sin 80°} \Rightarrow \boxed{v_r = \frac{\sin 90°}{\sin 80°} v_e} \ ; \ \boxed{v_r \simeq 117 km.h^{-1}}$$

**Exercice 4.29 :**

1/ l'équation horaire de la chute de la balle par rapport au repère fixe est : $z = -\frac{1}{2} g t^2 + h \rightarrow (1)$

La distance parcourue par la voiture avec une vitesse constante au cours de la durée $t$ est : $x' = vt \rightarrow (2)$

$z'$ est la hauteur dans le repère mobile lié à la voiture et qui est la même que la hauteur $z$ mesurée dans le repère fixe $z$ .

Par élimination du temps entre les équations horaires $(1)$ et $(2)$ on obtient l'équation de la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile :

$$t = \frac{x'}{v} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{2v^2} x'^2 + h}$$ **: la trajectoire est une parabole.**

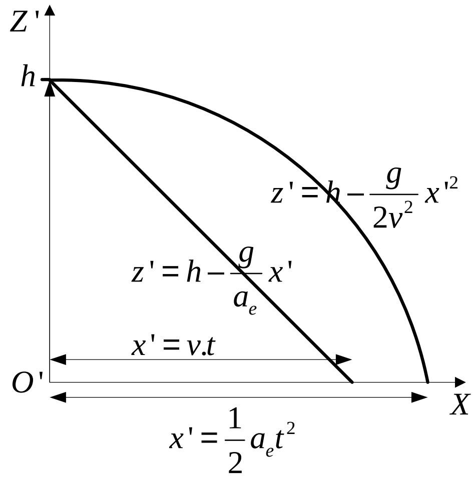
2/ La distance parcourue par le véhicule avec un mouvement uniformément varié au cours de la durée $t$ est :

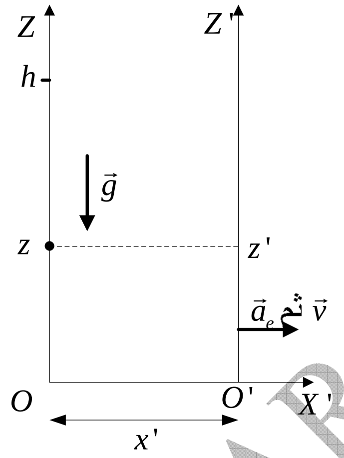
$$x' = \frac{1}{2} a_e t^2 \rightarrow (3)$$

En éliminant le temps entre les équations $(1)$ et $(3)$ on obtient la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile :

$$t^2 = \frac{2x'}{a_e} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{a_e} x' + h}$$ **: la trajectoire est une droite.**

Nous avons représenté sur la figure ci-dessous la trajectoire pour chaque cas.




**Exercice 4.30 :**

Nous étudions le mouvement de $M$ dans la bas $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$. Les vecteurs unitaires sont indépendantes du temps. Voir figure.

1/ Le vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}\,' = r.\vec{u}_r}$ , le vecteur vitesse relative : $\boxed{\vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r}$ et le vecteur accélération relative : $\boxed{\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r}$.

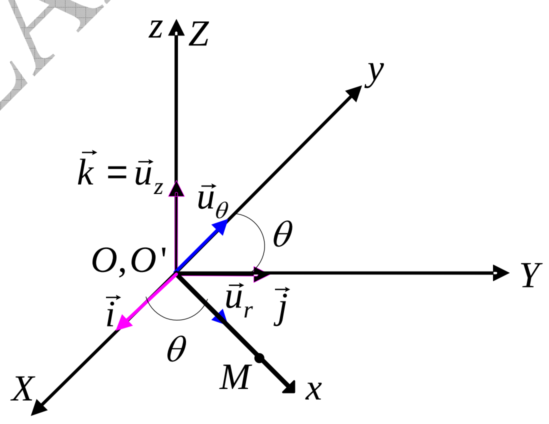
2/ La vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse des deus axes $Oxy$ mobiles par rapport au plan fixe est $OXY$ :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0 \quad \left(O \equiv O'\right)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}.\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$




L'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération des deux axes $Oxy$ mobiles par rapport au plan fixe $OXY$ est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

3/ L’accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4/ La vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse de $M$ par rapport au plan $OXY$ fixe est :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$

L’accélération absolue c'est-à-dire l’accélération de $M$ par rapport au plan fixe $OXY$ est :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right).\vec{u}_\theta}$$

❖ **Remarque : Si on veut faire les calculs par rapport au repère mobile, on utilise la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ , en remplaçant $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$ dans les résultats des vitesses et des ’accélérations auxquelles nous sommes parvenues par $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta$ .**

**Exercice 4.31 :**

1/ Expression du vecteur position par rapport au repère mobile $OX'Y'$ :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{i}' \\ \vec{i}' = \vec{u}_r \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right).\vec{u}_r}$$

On dérive le vecteur position dans la base mobile pour obtenir le vecteur vitesse relative :

$$\boxed{\vec{v}_r = \dot{\vec{r}} = at.\vec{u}_r}$$

Expression du vecteur de la vitesse d’entraînement :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \\ \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0 \quad \left(O \equiv O'\right) \\ \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega.\vec{u}_z \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{1}{2}at^2 + r_0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

Expression du vecteur de la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = at.\vec{u}_r + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

Son module : $\boxed{v_a = \sqrt{(at)^2 + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)^2 .\omega^2}}$

Le sens et la direction du vecteur de la vitesse absolue (voir figure ci-dessous) est donnée par :

$$\boxed{tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{\left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}{at}}$$

2/ Coordonnées et viteses du mobile au temps $t = 3s$ :

$$\theta = \omega t \ , \ \boxed{\theta = 1,884 rad = 108°} \ ; \ r = \frac{1}{2}at^2 + r_0 \ , \ \boxed{r = 0,1m}$$

$$x = r.\cos\theta \ , \ \boxed{x = -0,031m} \ ; \ y = r.\sin\theta \ , \ \boxed{y = 0,095m}$$

$$v_r = at \ , \ \boxed{v_r = 0,06 m.s^{-1}} \ ; \ v_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega \ , \ \boxed{v_e = 0,0628 m.s^{-1}}$$

3/ On dérive le vecteur de la vitesse relative pour obtenir le vecteur de l'accélération relative :

$$\vec{a}_r = a.\vec{i}' = a.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = a.\vec{u}_r}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} \ , \ \boxed{v_a = 0,087 m.s^{-1}}$$

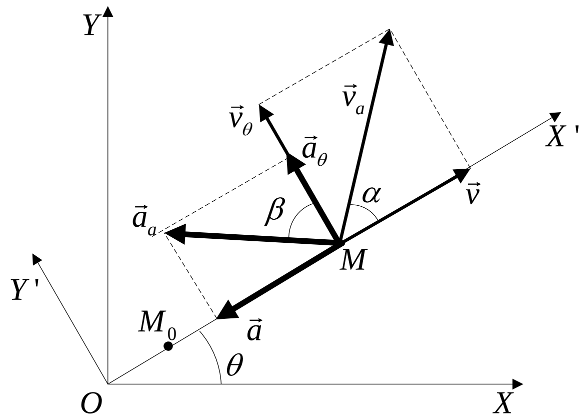
$$tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = 1,047 \Rightarrow \boxed{\alpha = 46,3°}$$

L'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{0} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e}\right)$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega.\vec{u}_z \wedge \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta = -r\omega^2\vec{u}_r \Bigg| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -\left(\underbrace{\frac{1}{2}at^2 + r_0}_{r}\right)\omega^2.\vec{u}_\theta}$$




3/ Accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ at & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2at\omega.\vec{u}_\theta}$

Expression littérale de l'accélération absolue :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega^2\right].\vec{u}_r + \left(2at.\omega\right).\vec{u}_\theta}$$

Module de l'accélération absolue : $\boxed{a_a = \sqrt{\left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega^2\right]^2 + \left(2at.\omega\right)^2}}$

La direction du vecteur accélération absolue est tirée de la figure ci-dessus :

$$\boxed{tg\beta = \frac{a_\theta}{a_r} = \frac{2at}{a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}}$$

**<u>Exercice 4.32 :</u>**

1/ **<u>Coordonnées du point</u>** $M$ **:** à partir de la figure (a) ci-dessous on voit que:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

**<u>L'abscisse</u> :** au cours de la durée $t$, le point $M$ balaie l'angle $-\omega t$, et sa position est définie par l'angle $\theta = -\frac{\pi}{2} - \omega t$ ; Pendant le même temps le centre du cercle parcoure la distance $\overline{OA'} = vt$ .   Donc : $x = \overline{OA'} + x'_M$ .

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA'} = v.t = R\omega t \\ x'_M = R.\cos\theta \\ \cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \\ \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -\sin\omega.t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x = R\left(\omega.t - .\sin\omega.t\right)}$$

**<u>L'ordonnée</u>** : de la figure (a) on voit que : $y = R + y'_M$

$$\left.\begin{aligned} & y = R + R.\sin\theta \\ & \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega.t\right) = -\cos\omega.t \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{y = R\left(1 - .\cos\omega t\right)}$$

La trajectoire est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ au cours du temps. Il est défini par les équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = R\left(\omega t - \sin\omega t\right) \\ y = R\left(1 - \cos\omega t\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

La représentation graphique de ces équations paramétriques nous conduit à une **cycloïde (منحنى دويري)**.

2/ La vitesse absolue du point $M$ est :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_a \begin{cases} \dot{x} = v_x = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right) \\ \dot{y} = v_y = R\omega\sin\omega t \\ \dot{z} = v_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right).\vec{i} + R\omega\sin\omega t.\vec{j}}$$

Le module du vecteur vitesse absolue est :

$$v_a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ ;\ v_a = \sqrt{\left[R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)\right]^2 + \left[R\omega\sin\omega t\right]^2}$$

$$v_a = \sqrt{2R^2\omega^2\left(1 - \cos\omega t\right)}$$

$$v_a = R\omega\sqrt{2\left(\underbrace{1 - \cos\omega t}_{2.\sin^2\frac{\omega t}{2}}\right)} = R\omega\sqrt{2.2\left(\sin^2\frac{\omega t}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{v_a = 2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|}$$

Pour déterminer la direction du vecteur vitesse absolue il suffit de calculer l'angle $\alpha$ comprise entre l'axe $OX$ , c'est-à-dire le vecteur unitaire $\vec{i}$ , et le vecteur $\vec{v}_a$ (voir figure b) ci-dessous. Pour ce faire on fait appel au produit scalaire :

$$\left.\begin{aligned} & \vec{v}_a.\vec{i} = v_a.i.\cos\alpha = \dot{x} \\ & \dot{x} = v_a.\cos\alpha \\ & \dot{x} = 2R\omega\left(1 - \cos\omega t\right) \end{aligned}\right| \Rightarrow v_a.\cos\alpha = 2R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)$$

Par substitution on obtient :

$$2R\omega.\sin\frac{\omega t}{2}.\cos\alpha = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)$$

En continuant les calculs on obtient la valeur $\alpha$ :

$$\left.\begin{aligned} & 2R.\sin\frac{\omega t}{2}.\cos\alpha = 2R.\sin^2\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\frac{\omega t}{2} \\ & \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ & \cos\alpha = \cos\left(-\alpha\right) \end{aligned}\right| \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\omega t}{2}\quad ,\quad \boxed{\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}\right|}$$

La vitesse relative est la vitesse absolue du point $M$ par rapport au référentiel mobile $X'AY'$ , donc :

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$$

Commençons par les coordonnées du point $M$ dans le repère $X'AY'$ :

$$x'_M = R.\cos\theta = R.\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\sin\omega t$$

$$y'_M = R\sin\theta = R.\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\cos\omega t$$

En dérivant les deux coordonnées par rapport au temps on obtient les composantes de la vitesse relative :

$$\boxed{\dot{x}'_M = -R.\omega s\cos t} \quad ; \quad \boxed{\dot{y}'_M = -R.\omega.\sin\omega t}$$

Le vecteur s'écrit alors : $\boxed{\vec{v}_r = -R.\omega s\cos t.\vec{i} - -R.\omega.\sin\omega t.\vec{j}}$

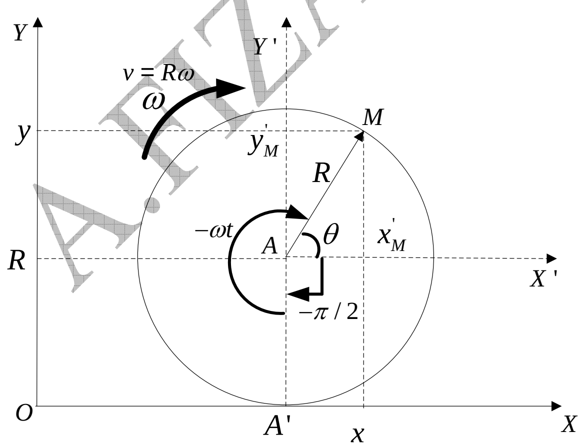
Et son module : $\vec{v}_r = \sqrt{\left(R.\omega s\cos t\right)^2 + \left(R.\omega.\sin\omega t\right)^2} \Rightarrow \boxed{v_r = R\omega}$

La direction de la vitesse relative : on utilise la même méthode que celle qui a été utilisée pour obtenir la direction du vecteur vitesse absolue.

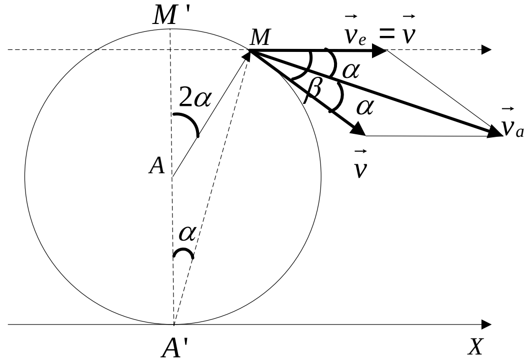
Sur la figure (b) ci-dessous, on voit bien que l'angle en question est l'angle compris entre $\vec{v}$ et $\vec{i}$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r.\vec{i} = v_r.i.\cos\beta \\ v_r.\cos\beta = \dot{x}'_M = -\underbrace{R\omega}_{v_r}\cos\omega t \\ -\cos\omega t = \cos\left(\pi - \omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \cos\beta = -\cos\omega t \quad ; \quad \boxed{\beta = \pi - \omega t = 2\alpha}$$

3/ la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ . Regardons la figure (b) ci-dessous (en se basant sur quelques propriétés géométriques). Dans un cercle l'angle au centre est égale au double de l'angle dont le sommet est situé sur la circonférence de ce cercle $\left(2.\widehat{M'A'M} = 2\alpha\right)$ . $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire circulaire au point $M$ .




( a )




( b )

De la figure (b), il vient :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \Rightarrow v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a.v_r.\cos\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_e = \sqrt{4R^2\omega^2\sin^2\dfrac{\omega t}{2} + R^2\omega^2 - 2R\omega.2R\omega\sin\dfrac{\omega t}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega t}{2}\right)} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega t}{2}\right) = \sin\dfrac{\omega t}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_e = R\omega = v}$$

La vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de translation du centre du cercle par rapport au repère fixe $XOY$ , ce qui est tout à fait logique. $\vec{v}_e$ est parallèle à l'axe $OX$ .

**Exercice 4.33**

1/ Nous partant du vecteur position en coordonnées polaires dans le repère $X'O'Y'$ :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}\,' = r.\vec{u}_r \\ r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

La vitesse relative : dans le repère mobile, le vecteur unitaire $\vec{u}$ est constant.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r \\ r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

Pour calculer la vitesse d'entraînement, nous faisons intervenir le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \\ \overrightarrow{OO'} = \vec{0} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{r}}$$

Nous effectuons l'opération suivante :

$$\vec{v}_e = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

En utilisant la loi de composition des vitesses, on peut en déduire la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta + r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

Calculons le module de cette vitesse pour vérifier q'il est constant :

$$\boxed{v_a = r_0\omega\sqrt{2} = Cte}$$

Quant à la valeur relative :

$$\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

L'accélération d'entraînement est déduite de l'expression générale vue en cours en éliminant les termes nuls :

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{0} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}$$

Calculons le produit vectoriel double :

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge r' = \vec{\omega}\wedge r = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_e = \omega\wedge r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_e = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

Calculons à présent l'accélération complémentaire en appliquant la formule :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right) & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2r_0\omega^2\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

Nous en déduisons l'accélération absolue à partir de la loi de composition des accélérations : $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

Après les calculs nécessaires on trouve l'expression de l'accélération absolue :

$$\boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\left[\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_r + \left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right)\vec{u}_\theta\right]}$$

Vérifions que son module est constant :

$$\boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\sqrt{2} = Cte}$$

**<u>Exercice 4.35</u> :**

1/ Le vecteur position de la mouche dans le repère mobile (aiguille) :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{r} = v.t..\vec{u}_r}$$

Les expressions de la vitesse et de l'accélération de la mouche dans le repère mobile : remarquons que $\theta \prec 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \prec 0$ , ceci est du au sens négatif dans lequel progresse l'aiguille des secondes.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_M = \dot{\vec{r}} = v.\vec{u}_r + vt.\dot{\vec{u}}_r \\ \dot{\vec{u}}_r = \left(-\omega\right).\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_M = v.\vec{u}_r - vt\left|\omega\right|.\vec{u}_\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_M = \ddot{\vec{r}} = v.\dot{\vec{u}}_r - v\left|\omega\right|.\vec{u}_\theta - vt\left|\omega\right|.\dot{\vec{u}}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -\left(-\omega\right).\vec{u}_r \;,\; \dot{\vec{u}}_r = \left(-\omega\right).\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_M = -v\omega^2 t.\vec{u}_r - 2v\left|\omega\right|.\vec{u}_\theta}$$

2/ Calcul des coordonnées $\theta_M , x_M , y_M$ . Consignons les résultats dans le tableau suivant :

$$v = \frac{0,2}{60} = \frac{10^{-2}}{3}\left(m/s\right) \;\; ; \;\; \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}\left(rad/s\right)$$

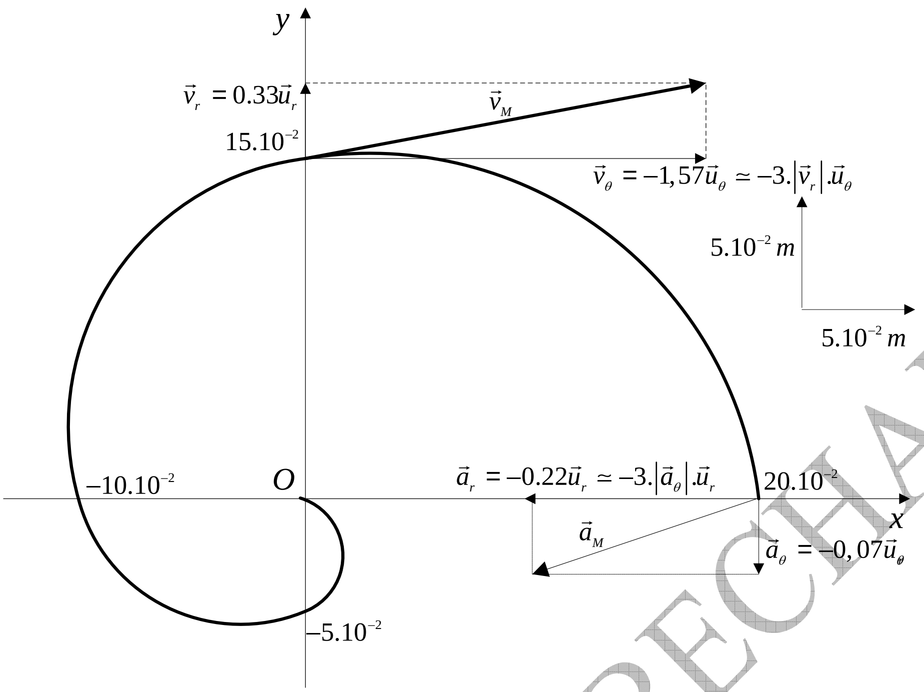
$$x_M = vt\cos\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t \;\; ; \;\; y_M = vt\sin\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t$$

| $t\left(s\right)$ | 0 | 15 | 30 | 45 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_M = -\omega t \;\left(rad.s^{-1}\right)$ | 0 | $-\pi/2$ | $-\pi$ | $-3\pi/2$ | $-2\pi$ |
| $r_M = vt \;\left(ms^{-1}\right)$ | 0 | $-5.10^{-2}$ | $10.10^{-2}$ | $15.10^{-2}$ | $20.10^{-2}$ |
| $x_M\left(m\right)$ | 0 | 0 | $-10.10^{-2}$ | 0 | $20.10^{-2}$ |
| $y_M\left(m\right)$ | 0 | $-5.10^{-2}$ | 0 | $15.10^{-2}$ | 0 |

Voir la représentation graphique c-dessous.

3/ Pour représenter la vitesse et l'accélération de la mouche par rapport au repère mobile, il faut calculer d'abord leurs deux modules respectifs aux temps prescrits :

| | |
|---|---|
| $t = 45s$ :<br>$v_M = v.\vec{u}_r - v.t.\omega.\vec{u}_\theta$<br>$\vec{v}_r = 0,33.\vec{u}_r \;\; ; \;\; \vec{v}_\theta = -1,57.\vec{u}_\theta$ | t = 60s:<br>$\vec{a}_M = -v\omega^2 t..\vec{u}_r - 2v\omega.\vec{u}_\theta$<br>$\vec{a}_r = -0,22.\vec{u}_r \;\; ; \;\; \vec{a}_\theta = -,07.\vec{u}_\theta$ |




Nous avons pris comme échelles le module de la vitesse radiale pour représenter la vitesse ; et le module de l'accélération transversale pour représenter l'accélération.

**<u>Exercice 4.36</u> :**

1/ A partir de la figure ci-dessous, on écrit l'expression du vecteur position dans le repère fixe $OXY$ :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Durant le temps $t$ , l'angle balayé par le point $A$ par rapport au repère fixe est $\theta = \omega t$ .

L'angle que balaie le point $M$ durant le même temps $t$ par rapport au repère mobile $O'X'Y'$ est égale aussi à $\theta = \omega t$ , mais par rapport au repère fixe $OXY$ il balaie l'angle $2\theta = 2\omega t$ .

La vitesse et l'accélération du point par rapport au repère sont la vitesse et l'accélération absolues.

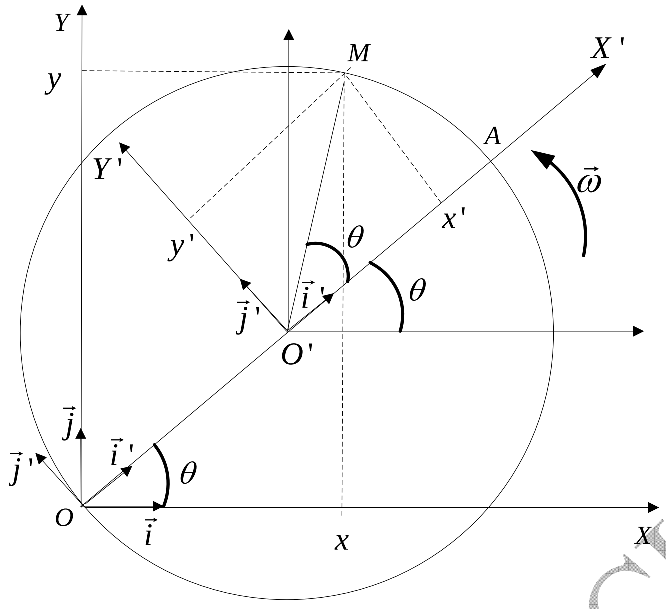
En se basant sur la figure ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OO'} = R\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j}\\ \overrightarrow{O'M} = R\cos 2\omega t.\vec{i} + R\sin 2\omega t.\vec{j}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(R\cos\omega t + R\cos 2\omega t\right)\vec{i} + \left(R\sin\omega t + R\sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

Par dérivations successives de $\overrightarrow{OM}$ on obtient la vitesse et l'accélération absolues :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \;,\; \boxed{\vec{v}_a = -R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (1)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} \;,\; \boxed{\vec{a}_a = -R\omega^2\left(\cos\omega t + 4\cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + 4\sin 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (2)$$




2/ Ecrivons l'expression du vecteur position dans le repère mobile $O'X'Y'$ en exploitant la figure ci-dessus :

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x'.\vec{i}\,' + y'.\vec{j}\,' = R\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

La vitesse et l'accélération du point $M$ par rapport au repère mobile $O'X'Y'$ sont la vitesse et l'accélération relatives. En dérivant le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ deux fois successives on obtient la vitesse et l'accélération relatives :

$$\vec{v}_{r'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \;\; , \;\; \boxed{\vec{v}_{r'} = R\omega\left(-\sin\omega t.\vec{i}\,' + \cos\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

$$\vec{a}_{r'} = \frac{d\vec{v}_{r'}}{dt} \;\; , \;\; \boxed{\vec{a}_{r'} = -R\omega^2\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

Ecrivons maintenant l'expression du vecteur position dans le repère fixe $O'XY$ à partir de la figure ci-dessus :

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = R\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t\vec{j}\right)}$$

La vitesse et l'accélération par rapport au repère $OXY$ **.**

**<u>ATTENTION</u> :** il ne faut pas dériver deux fois de suite le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ afin d'obtenir la vitesse et l'accélération relatives par rapport à $OXY$ . C'est cette erreur répondue qu'on doit éviter !!

Nous devons faire appel à la relation 4.57 (voir cours)

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}$$

$$\vec{v}_r = \vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\underbrace{\frac{dz'}{dt}}_{0}$$

A partir de la figure nous pouvons désigner :

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \;\; ; \;\; y' = R\sin\omega t \rightarrow \dot{y}' = R\omega\cos\omega t$$

Après substitution, nous obtenons :

$$\vec{v}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right).\left(-R\omega\sin\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(R\omega\cos\omega t\right)$$

$$\vec{v}_r = -2R\omega.\underbrace{\sin\omega t.\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{i} + R\omega\left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)\vec{j}$$

A la fin, la vitesse relative du mobile $M$ par rapport à $OXY$ est :

$$\boxed{\vec{v}_r = R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (3)$$

L'accélération relative du mobile $M$ par rapport à $OXY$ n'est pas égale à la dérivée de $\vec{v}$ par rapport au temps. Il faut utiliser la relation 4.59 (voir cours).

$$\vec{a}_r = \vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k}\,'\underbrace{\frac{d^2z'}{dt^2}}_{0}$$

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \ddot{x}' = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \; ; \; y' = R\sin\omega t \rightarrow \ddot{y}' = -R\omega^2\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient :

$$\vec{a}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\cos\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_r = \left(-R\omega^2\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right) + \left(R\omega^2\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\underbrace{\cos^2\omega t - \sin^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right).\vec{i} - R\omega^2\,2\underbrace{\cos\omega t\sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j}$$

A la fin l'accélération relative du mobile $M$ par rapport à $OXY$ est égale à :

$$\boxed{\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (4)$$

3/ a/ La vitesse d'entraînement, en utilisant la loi de composition des vitesses est :

$$(1) - (3) = \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \left[-R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}\;\right] - \left[R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right).\vec{j}}$$

b/ L'accélération relative en appliquant la loi de composition des accélérations est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\underbrace{\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}}_{0}$$

$$\overrightarrow{OO'} = R.\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j} \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{i}}\,' = -\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{j}}\,' = \omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2\cos\omega t.\vec{j} \; ; \qquad y' = R\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient :

$$\vec{a}_e = \left(-R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) + R\cos\omega t\left(-\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) +$$

$$R\sin\omega t\left(\omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2\cos\omega t.\vec{j}\right)$$

D'où l'accélération d'entraînement du mobile $M$ :

$$\vec{a}_e = \left[ -R\omega^2.\cos\omega t - R\omega^2 \left( \underbrace{-\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}_{\cos 2\omega t} \right) \right] \vec{i} - R\omega^2 \left( \sin\omega t + 2\underbrace{\sin\omega t.c\,os\,\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} \right) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -R\omega^2.\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

Déduction de l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire :

$$\vec{a}_c = 2\left[ \frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2} \right]$$

ou à partir de la relation 4.59 :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = +\vec{a}_a - \vec{a}_r - \vec{a}_r}$$

Le résultat est le même.

$$\dot{\vec{i}}\,' = -\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j} \quad ; \quad \dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\dot{\vec{j}}\,' = -\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j} \ ; \ \dot{y}' = R\omega\cos\omega t$$

$$\vec{a}_c = 2\left[ \frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2} \right] = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = 2\left[ -R\omega\sin\omega t\left(-\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j}\right) + R\omega\cos\omega t\left(-\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j}\right) \right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[ R\omega^2.\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\sin\omega t\cos\omega t.\vec{j} - R\omega^2.\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j} \right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[ R\omega^2.\left( \underbrace{\sin^2\omega t - \cos^2\omega t}_{-\cos\omega t} \right).\vec{i} - 2R\omega^2.\underbrace{\sin\omega t\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j} \right]$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

**Il faudra vérifier le résultat par le calcul direct** $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

4/ Introduisons à présent le vecteur de rotation $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$ . nous utilisons la loi(4.72) démontrée en cours pour calculer les deux composantes de la vitesse d'entraînement :

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos 2\omega t & R\sin 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} - R\omega.\sin 2\omega t.\vec{i} + R\omega.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega.\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega.\left(\cos\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{j}}$$

Nous utilisons la formule (4.73) démontrée en cours pour trouver l'accélération complémentaire ou accélération d Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \Rightarrow \vec{a}_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega.\sin 2\omega t & R\omega.\cos 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_c = -2R\omega^2.\cos 2\omega t.\vec{i} - 2R\omega^2.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2.\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

# V / DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL
# تـحـريك الـنـقـطـة المـاديـة

## INTRODUCTION :

La dynamique en physique est la science qui étudie la relation entre le corps en mouvement et les causes qui provoquent ce mouvement. Elle prédit aussi le mouvement du corps situé dans un milieu déterminé.

La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

## 1/ PRINCIPE D'INERTIE GALILEEN (ou première loi de Newton 1642-1727) : ( مبدأ العطالة الغليلي )

**Enoncé du principe :**

**Si le corps matériel n'est soumis à aucune force, il est :**

- **soit en mouvement rectiligne uniforme,**
- **soit au repos, s'il était initialement au repos.**

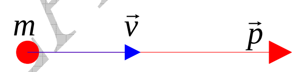
Pour une particule le principe d'inertie s'énonce ainsi : « **Une particule libre et isolée se déplace en mouvement rectiligne avec une vitesse constante** ».

C'est pour cette raison qu'une particule accélérée n'est ni libre ni isolée mais, soumise sans aucun, doute, à une force.

Et puisque le mouvement est une notion relative, il est indispensable de définir un repère auquel sera rapporté le mouvement de la particule libre : ce repère, à son tour, doit être libre (c'est pour cette raison qu'on l'appelle galiléen ou d'inertie, et dans lequel la particule libre se déplace à vitesse constante).

## 2/ LA QUANTITE DE MOUVEMENT (كمية الحركة)

❖ **Définition : la quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par son vecteur vitesse instantanée.**




$$\boxed{\vec{p} = m.\vec{v}} \qquad (1.5)$$

**Fig 5.1 : Quantité de mouvement**

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle. Cette une notion très importante car elle introduit deux éléments qui caractérisent l'état de mouvement de la particule : sa **masse** et sa **vitesse**.

Nous pouvons à présent donner un nouvel énoncé du principe d'inertie : « **une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement constante** ».

❖ **Conservation de la quantité de mouvement** (إنحفاظ كمية الحركة)

S'il y a variation de la vitesse ou de la quantité de mouvement cela implique que la particule n'est pas libre.

Supposons l'existence de deux particules libres qui ne sont soumises qu'aux influences mutuelles entre elles ; elles sont donc isolées du reste de l'univers :

Au temps t : $\vec{p} = m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2$

Au temps t' : $\vec{p}\,' = m_1.\vec{v}_1^{\,'} + m_2.\vec{v}_2^{\,'}$

Les expériences ont prouvé que $\vec{p}=\vec{p}'$ , c'est-à-dire que toute la quantité de mouvement d'un système composé de deux particules, soumises à leurs seules influences mutuelles, reste **constante**.

**Par exemple :** Pour les systèmes isolés suivants :

- Dans un atome d'hydrogène : la quantité de mouvement des deux particules (proton + électron) reste constante tout le temps, tel est le cas exactement de la terre et la lune, soit $\Delta\vec{p}=\vec{0}$ **.**
- La quantité de mouvement d'une molécule constituée d'un atome d'oxygène associé à deux atomes d'hydrogène est constante, il en est de même pour le système solaire.

Si on généralise ceci, le principe de conservation de la quantité de mouvement s'énonce ainsi:

**« la quantité de mouvement d'un système isolé constitué de particules est constante »**

On peut exprimer mathématiquement ce principe de la conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\vec{p}_n=C^{te}$$

Dans le cas de deux particules : $\vec{p}_1+\vec{p}_2=C^{te}$

Entre les instants $t$ et $t'$ :

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1^{\,'}+\vec{p}_2^{\,'}\Rightarrow\vec{p}_1^{\,'}-\vec{p}_1=\vec{p}_2-\vec{p}_2^{\,'}\Rightarrow\boxed{\Delta\vec{p}_1=-\Delta\vec{p}_2}$$

« **Dans un système isolé de deux particules,** l**a variation de la quantité de mouvement d'une particule au cours d'un certain temps est égale et de sens opposé à la variation de la quantité de mouvement de l'autre particule au cours du même temps** »

En d'autres termes, ce que gagne l'une des deux particules sous forme de quantité de mouvement, est perdu par l'autre particule sous la même forme, et vis versa, cependant la quantité de mouvement du système reste constante.

## 3/ LES AUTRES LOIS DE NEWTON (قوانين نيوتن الأخرى)

❖ **La deuxième loi de Newton :** (*c'est plutôt une définition qu'une loi*)

**« La dérivée de la quantité de mouvement s'appelle force »**

Cela veut dire que la résultante des forces appliquées à la particule est :

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad (2.5)$$

Cette équation s'appelle « **équation du mouvement** » (**معادلة الحركة** )

- **Cas de la masse constante :** suite à ce qui vient d'être dit, si la masse $m$ du mobile est constante (ce qui est fréquent en mécanique newtonienne) alors l'équation précédente s'écrit :

$$\vec{F}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}\Rightarrow\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\boxed{\vec{F}=m.\vec{a}} \qquad (3.5)$$

- **Cas particulier :** Si la résultante $\vec{F}$ est constante alors l'accélération $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}$ est elle aussi constante et le mouvement est **rectiligne uniformément varié.**

C'est ce qui arrive exactement aux corps qui tombent en chute libre sous l'effet de la force de pesanteur (appelé poids) : $\vec{P} = m.\vec{g}$

- **<u>Cas de la masse variable :</u>** dans ce cas la résultante $\vec{F}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}.\frac{dm}{dt}} \qquad (4.5)$$

**<u>Exemple 5.1</u>** : un corps de masse $10kg$ , soumis à la force $F = (120t + 40)N$ se déplace suivant une ligne droite. Au temps $t = 0$, le corps occupe la position $x_0 = 5m$ avec une vitesse $v_0 = 6ms^{-1}$ . Trouver la vitesse et la position du mobile en fonction du temps.

**<u>Réponse</u> :**

En utilisant la formule (5.3) on trouve : $F = 120t + 40 = 10a$, telle que $a = (12t + 4)ms^{-2}$.

Pour trouver l'expression de la vitesse instantanée on doit intégrer l'expression de l'accélération.

Puisque $\frac{dv}{dt} = 12t + 4$

Donc : $\int_0^v dv = \int_0^t (12t + 4)dt \Rightarrow \boxed{v = 6t^2 + 4t + 6}\left(ms^{-1}\right)$

Intégrons de nouveau, mais cette fois, l'expression obtenue de la vitesse pour trouver la position du mobile à chaque instant :

$$\int_0^x dx = \int_0^t vdt = \int_0^t (6t^2 + 4t + 6)dt \Rightarrow \boxed{x = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5}(m)$$

- **<u>La troisième loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction :</u>**

**(القانون الثالث لنيوتن أو مبدأ الفعل و رد الفعل)**

<u>Enoncé de la loi</u> : « **lorsque deux particules sont en influence mutuelle, la force appliquée par la première particule sur la deuxième est égale et de signe contraire à la force appliquée par la deuxième particule sur la première** ».

C'est ce que montre la figure 5.2 et qui nous permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}} \qquad (5.5)$$

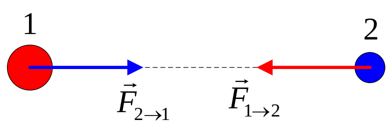



**Fig 5.2: Action et réaction**

## 4/ <u>NOTION DE FORCE ET LOI DE FORCE</u> (مفهوم القوة و قانون القوة)

La définition de la force par l'équation $\vec{F} = m.\vec{a}$ nous permet d'exprimer la force correspondante à l'effet étudié en fonction des facteurs physiques telles que la distance, la masse, la charge électrique des corps….Nous arriverons en fin de compte à dégager « la loi de force ».

**La loi de force ( ou loi des influences mutuelles)** : cette loi montre clairement l'expression de la force (la résultante) appliquée à un point matériel dans une situation bien définie.

**Par exemple** : l'expression $\vec{P} = m.\vec{g}$ est la **loi de force** qui définit le poids d'un corps au voisinage de la terre et qui nous permet de prédire le mouvement de n'importe quel corps dans le champ de pesanteur terrestre.

Possédant la relation $\vec{F} = m.\vec{a}$ , nous pouvons connaître le comportement des systèmes physiques, mieux encore nous pouvons même prédire leur évolution.

On peut résumer cette situation par l'équation symbolique :

$$\boxed{\text{PHYSIQUE=MECANIQUE+LOIS DE FORCE}}$$

Après avoir pris connaissance des lois de force correspondantes aux différents effets mutuels, nous pouvons prédire le mouvement du corps matériel qui est soumis à la force avec des conditions initiales prédéterminées.

Dans ce qui suit nous allons poser et prendre connaissance des lois relatives respectivement aux :

- Influences mutuelles dues à la gravitation au voisinage de la terre,
- Interactions mutuelles dans le cas de l'attraction universelle,
- Frottements,
- Influences mutuelles élastiques.

## 5/ MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE (حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية)

Tous les projectiles qui tombent en chute libre au voisinage de la terre ont la même accélération $\vec{g}$ constante qui est dirigée vers le bas. On peut écrire $\vec{g}$ sous la forme : $\vec{g} = -g.\vec{j} = -9.8\vec{j}(m/s^2)$ , $\vec{j}$ étant le vecteur unitaire de l'axe vertical dirigé vers le haut.

On peut prédire le mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse initiale faisant un angle avec l'horizontale.

Nous avons pris connaissance dans l'enseignement secondaire que l'étude porte essentiellement sur la détermination:

- Des composantes de la vitesse :

$$V_x(t) = V_{0x} = V_0.\cos\alpha$$

$$V_y(t) = -gt + V_{0y} = -gt + V_0 \sin\alpha$$

- Des deux équations horaires :

$$x(t) = V_0.\cos\alpha.t \quad (t=0;\ x=0)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin\alpha.t + y_0$$

- De l'équation de la trajectoire : obtenue par élimination du temps entre les équations horaires précédentes :

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + (tg\alpha).x + y_0$$

- L'apogée ou hauteur maximale atteinte par le projectile :

$$y_{\max} = h = -\frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2g} \quad (g<0)$$

- La portée : $x_{\max} = -\dfrac{V_0^{\,2}.\sin 2\alpha}{g}$ $(g<0)$

A titre de rappel on se propose d'étudier l'exemple suivant :

**Exemple 5.1** : Un projectile est lancé verticalement vers le haut, à partir du sol, avec la vitesse $10m.s^{-1}$

a/ Quelle est la hauteur atteinte par le projectile ?

b/ quelle est la vitesse du projectile après $1.5s$ depuis le lancement ?

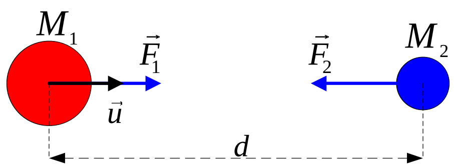
c/ quelle est l'intervalle de temps séparant l'instant du lancement et l'instant de collision du projectile avec la terre ?

**Réponses :** a/ $5.1m$ b/ $4.7m.s^{-1}$ c/ $2.04s$

## 6/ LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE (قانون الجذب العام)

La loi de gravitation universelle, qui a été établie par Newton en 1685, est la base de la théorie qui explique de nombreux phénomènes physiques : à commencer par le mouvement des planètes et en arrivant par la chute libre des corps en passant par le mouvement des marrées.

Cette loi explique l'attraction entre deux corps de masses respectives $M_1$ et $M_2$ , séparés par la distance $d$ . Ces deux corps s'attirent mutuellement avec deux forces directement opposées $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .



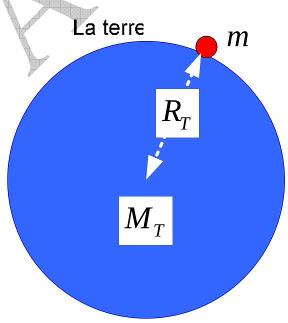

$$\vec{F}_1 = G\frac{M_1.M_2}{d^2}\vec{u} \Rightarrow \boxed{F_1 = G\frac{M_1.M_2}{d^2}} \qquad (5.6)$$

**Fig 5.3 : attraction des deux corps**

### ❖ Champ gravitationnel (حقل الجاذبية):

La force d'attraction terrestre est le poids. Il et de coutume de calculer le poids à l'aide de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ $\left(\vec{P} = m\vec{g}\right)$. Grâce à la loi de l'attraction universelle et la loi de force du poids on peut déterminer l'expression de $\vec{g}$ en fonction de l'altitude :

- **A la surface de la terre :** Nous obtenons la valeur de l'accélération de la pesanteur terrestre de la façon suivante :




$$\vec{F} = \vec{P} \Rightarrow G\frac{M_T.m}{R_T^2} = mg_0 \Rightarrow \boxed{g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}} \qquad (5.7)$$

Constante de l'attraction universelle $G = 6.67\times10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$

Masse de la terre $M_T = 5.98\times10^{24}\,kg$

Rayon terrestre $R_T = 6.37\times10^{6}\,m$

**Figure 5.4**

L'application numérique nous donne $\boxed{g_0 = 9.8N.kg^{-1}}$

- **A la hauteur $Z$ de la surface de la terre :** Le vecteur de l'accélération de la pesanteur terrestre à une hauteur $Z$ du sol, c'est-à-dire à la distance $r = R_T + Z$ du centre de la terre, s'obtient par le raisonnement suivant :

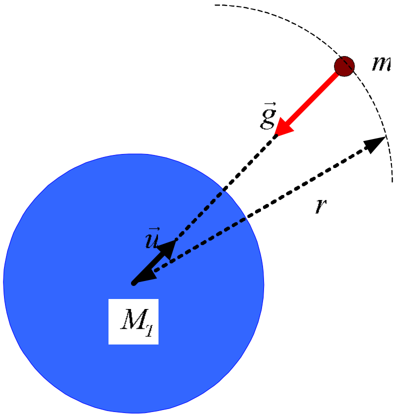



Fig 5.5

A la surface de la terre: $P_0 = mg_0 = G\dfrac{m.M_T}{R_T^2}$

A la distance $r$ du centre de la terre: $P = mg = G\dfrac{m.M_T}{r^2}$

D'où: $$\boxed{g = g_0 \frac{R_T{}^2}{r^2}} \qquad (5.8)$$

Quant à l'expression vectorielle elle est :

$$\vec{g} = -g_0 \frac{R_T{}^2}{r^2}\vec{u} \qquad (5.9)$$

**Exemple 5.3** :

Le soleil a une masse de $1.99\times10^{30}\,kg$, la terre une masse $5.98\times10^{24}\,kg$ et la lune une masse de $7.36\times10^{22}\,kg$ . Le rayon moyen de l'orbite de la terre autour du soleil est $1.496\times10^{11}\,m$ , celui de l'orbite de la lune autour du soleil est $3.84\times10^{8}\,m$.

a/ Calculer l'intensité moyenne du champ d'attraction solaire tout au long de l'orbite de la terre autour du soleil.

b/ Calculer l'intensité moyenne du champ d'attraction lunaire tout au long de l'orbite de la terre autour du soleil.

**Réponses :** a/ $5.9\times10^{-3}\,N.kg^{-1}$ b/ $3.33\times10^{-5}\,N.kg^{-1}$

❖ **Application : les satellites artificiels (الأقمار الاصطناعية):**

Durant ces dernières décennies la technologie des communications sans fil a connu un développement extraordinaire. Cette révolution est caractérisée par l'exploration de l'espace par l'homme, et la mise sur orbite de milliers de satellites artificiels géostationnaires, c'est-à-dire tournant à la même vitesse que la terre, afin d'assurer en permanence la télécommunication entre les différents points du globe terrestre.

Pour satisfaire la condition imposée ci-dessus (satellite géostationnaire), des calculs ont été effectués pour déterminer la hauteur correspondante. D'après les résultats cette hauteur est $z = 42.1\times10^{6}\,m$ , et la vitesse de rotation $v = 3.08\times10^{3}\,m.s^{-1}$.

*Nous laissons à l'étudiant le soin de s'en assurer lui même de ces résultats.*

Effectivement, c'est à la hauteur et à la vitesse précédemment calculées que les satellites artificiels géostationnaires évoluent, comme l'avait prédites la théorie.

Vu l'importance du sujet et en complément, et par souci de compréhension nous pouvons ajouter quelques informations relatives au lancement des satellites artificiels.

La seule force agissant sur le satellite artificiel est son poids ou force de pesanteur. La phase étudiée ici est la phase balistique, c'est-à-dire l'étape où le satellite atteint le point $M_0$ ( figure5.6) . En ce point $\vec{V}_0$ représente la vitesse initiale géocentrique du satellite étudié, et ${}_0$ la distance entre le centre de la terre et le point $M_0$ telle que l'altitude mesurée à partir de la surface de la terre soit comprise entre 100 et 200km. Le satellite doit évoluer à une distance ne dépassant pas les quelques dizaines de fois le rayon de la terre, et ce afin de pouvoir négliger les influences de la lune et du soleil.

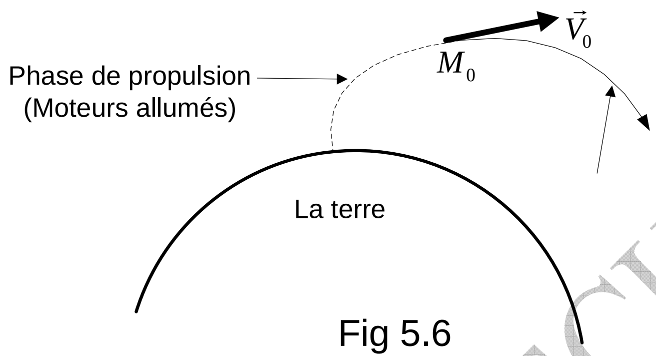


Fig 5.6

Dans ce qui suit nous allons donner les définitions de différentes vitesses propres aux lancements de satellites artificiels suivantes:

❖ **La première vitesse cosmique (السرعة الكونية الأولى) :**

**La première vitesse cosmique est la vitesse circulaire géocentrique d'un satellite artificiel tournant à basse altitude (située entre 100 et 200km depuis la surface de la terre). Elle est donnée par l'expression :**

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{M_T G}{r_0}}} \qquad (10.5)$$

En acceptant $r_0 \approx R_T = 6400km$ les calculs conduisent à :

$$g_0 = \frac{M_T G}{R_T^{\ 2}} \approx 10m.s^{-2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{Rg_0}} \simeq \sqrt{64.10^6} \Rightarrow \boxed{V_1 \approx 8000ms^{-1}}$$

❖ **La deuxième vitesse cosmique (السرعة الكونية الثانية) :**

**La deuxième vitesse cosmique est la vitesse géocentrique que doit atteindre un satellite artificiel pour se libérer de l'attraction terrestre. Elle est donnée par la formule :**

$$V_2 = \sqrt{\frac{2M_T G}{r_0}} \Rightarrow \boxed{V_2 = V_1\sqrt{2}} \qquad (11.5)$$

En considérant le point $M_0$ au voisinage de la terre, on obtient $\boxed{V_2 \approx 11000ms^{-1}}$

❖ **La troisième vitesse cosmique (السرعة الكونية الثالثة) :**

**La troisième vitesse cosmique est la vitesse géocentrique que doit atteindre un satellite artificiel pour se libérer du système solaire.**

**Les calculs ont donné :**

$$\boxed{V_3 = 16800ms^{-1}} \qquad (12.5)$$

## 7/ FORCES DE LIAISON OU FORCES DE CONTACT(قوى التلامس أو قوى الترابط)

Entendons nous qu'ici nous parlons des forces agissant mutuellement entre les corps en contact.

La figure5.7 représente un corps solide posé sur une table. Le corps est en équilibre sur cette table, c'est à dire que l'accélération est nulle $\left(\vec{a}=\vec{0}\right)$.

Face à la force $\vec{F}$ , représentant la résultante de toutes les interactions des molécules constituant le corps, et appliquée à la table, cette dernière à son tour applique la force $\vec{F}'$ qui est la résultante de toutes les interactions des molécules constituant la surface de la table qui est en contact avec le corps. Les deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ sont appelées forces de contact ou de liaison à cause du contact des deux corps entre eux.

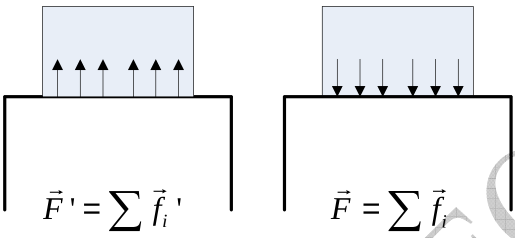



**Fig 5.7 : Forces de contact**

## 7/ FORCES DE FROTTEMENT ( قوى الإحتكاك )

Chaque fois qu'il y a contact entre deux surfaces rugueuses de deux corps solides, une résistance apparaît alors et s'oppose au mouvement relatif des deux corps. Il existe plusieurs types de frottements :

- Les frottements entre les corps solides qui peuvent être statique et dynamique,
- Les frottements dans les fluides.

❖ **force de frottement statique( قوة الإحتكاك السكوني)**

La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en état de repos même en présence d'une force extérieure.

- **Cas d'un corps posé sur un plan horizontal :**

Considérons le corps de la figure 5.8. Il est soumis à quatre forces. Soit $\vec{f}_s$ la force de frottement statique. $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont respectivement le poids et la force de réaction. Pour que le corps posé sur la table se met en mouvement il faut lui appliquée une force minimale $\vec{F}$ **.**

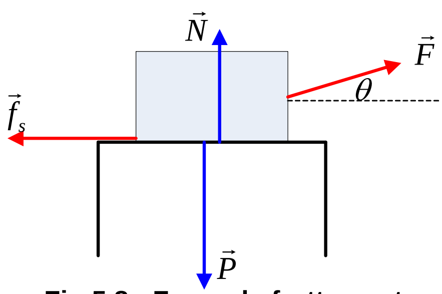



**Fig 5.8 : Force de frottement**

Le corps est au repos : $\sum_i \vec{F}_i=\vec{0}$

En projetant sur les deux axes horizontal et vertical on obtient:

$$\left.\begin{array}{l} N+F.\sin\theta-P=0 \\ F.\cos\theta-f_s=0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f_s=F.\cos\theta}$$

Si l'angle $\theta$ était nul on aurait $f_s=F$ et $P=N$.

Remarquer que $P\neq N$ avec $N=P-F.\sin\theta$ qui est la force qui maintient le corps au repos jusqu'à ce que la force $\vec{F}$ appliquée arrive à l'arracher de la surface. Tout juste avant d'arracher le corps, la force de frottement statique atteint sa valeur maximale définie par la loi: $f_s=h_s.N$ où $h_s$ est le coefficient de frottement statique et $N$ la force normale.

Donc :

$$\boxed{f_s\leq f_{s,\max}=h_s.N} \qquad (13.5)$$

Dans notre exemple:

$$N=P-F\sin\theta \Rightarrow \boxed{f_{s,\max}=h_s.N=h_s(P-F\sin\theta)}$$

Il faut que $N>0$ et par conséquent $P>F.\sin\theta$ , sinon le corps se soulève.

**Exemple 5.4 :**

Un corps de poids $80N$ est posé sur la surface d'un plan horizontal rugueux. On applique à ce corps une force d'intensité $20N$ faisant un angle de $30°$ avec l'horizontal. Le coefficient de frottement statique étant $0.30$ :

a/ Quelle est l'intensité de la force de frottement ?
b/ Quelle est l'intensité de la force normale ?
c/ Quelle est l'intensité de la force de frottement maximale ?
d/ Quelle doit être l'intensité de la force appliquée pour que le corps se décroche ?

**Réponse** : a/ $f=17.3N$ , b/ $N=70N$ , c/ $f_{s,\max}=21N$ , d/ $F=24.1N$

❖ **force de frottement cinétique( قوة الإحتكاك الحركي)**

La force de frottement cinétique est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface rugueuse. Son intensité est donnée par la formule :

$$\boxed{f_c=h_c.N} \qquad (14.5)$$

**Remarque :** Dans le cas des forces de frottement **statique** le corps est au **repos**, par contre dans le cas des forces de frottement cinétique ou **dynamique** le corps est en **mouvement**.

Considérons l'exemple schématisé sur la figure5.9 :

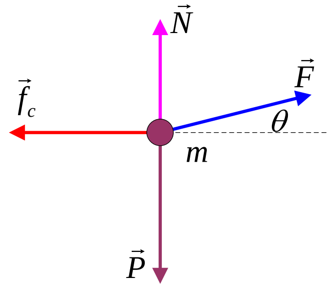



**Fig 5.9**

Le corps est considéré à présent en mouvement. Il est possible de déterminer l'expression de la force de frottement dynamique après avoir posé l'expression de la force normale :

$$\left.\begin{array}{l} N = P - F.\sin\theta \\ f_c = h_c.N \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f_c = h_c.(P - F.\sin\theta)}$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, sachant que $m$ est la masse du corps, nous pouvons écrire:

$$F.\cos\theta - f_c = ma \Rightarrow \boxed{f_c = F.\cos\theta - ma}$$

Où $h_c$ est le symbole du coefficient de frottement cinétique (ou dynamique) et $N$ représente la force normale.

ICI on ne parle pas de force de frottement maximale.

*A l'étudiant de trouver l'expression de l'accélération.*

**Exemple 5.5 :**

Un corps de masse $10,2kg$ glisse sur un plan horizontal rugueux sous l'effet d'une force d'intensité $20N$ . La direction de la force fait un angle de $45°$ vers le haut avec l'horizontale. Le coefficient de frottement dynamique est $0,15$ . On prend $g = 9,8ms^{-2}$ . Calculer :

a/ la force normale, b/ la force de frottement cinétique, c/ la résultante des forces, d/ l'accélération acquise.

**Réponse** : a/ $N = 85.82N$ , b/ $f_c = 12.9N$ , c/ $F_R = 1.24N$ , d/ $a = 0.12ms^{-2}$

## ❖ LES FROTTEMENTS DANS LES FLUIDES( الإحتكاكات في المائع)

Quant un corps solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide) avec une faible vitesse relative, une force de frottement apparaît. Elle se calcule par la formule :

$$\boxed{\vec{f}_f = -K\eta.\vec{v}} \qquad (15.5)$$

$K$ : Un coefficient qui dépend de la forme du corps solide en mouvement dans le fluide.

Pour une sphère, par exemple, on trouve $K = 6\pi.R$, et par conséquent :

$$\boxed{\vec{f}_f = -6\pi.R.\eta.\vec{v}} \qquad (16.5)$$

Cette loi est connue sous le nom de **Loi de Stockes.**

$\eta$ : Coefficient qui dépend des frottements internes dans le fluide (c'est à dire les frottements entre les différentes couches qui sont en mouvement avec différentes vitesses). Le frottement interne au fluide s'appelle la **viscosité**, et c'est pour cette raison que $\eta$ s'appelle le **coefficient de viscosité**. Dans les liquides, le coefficient de viscosité diminue avec l'élévation de température, par contre il augmente avec la diminution de la température pour les gaz.

## 9/ LES FORCES ELASTIQUES (القوى المرنة) :

Les forces élastiques provoquent des mouvements périodiques.

Par exemple : dans notre étude du mouvement rectiligne sinusoïdal, nous avons vu que l'accélération est calculée par :

$$\vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = m.\vec{a} \;\; ; \;\; \vec{F} = -m\omega^2.\overrightarrow{OM} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k.\overrightarrow{OM}} \qquad (17.5)$$

Cela veut dire, que pour le mouvement rectiligne sinusoïdal, la résultante de toutes les forces appliquées à un point matériel, est proportionnelle au vecteur position et de sens contraire. Cette force est toujours dirigée vers le centre, c'est pour cette raison qu'elle est appelée **force centrale**. Elle ne s'annule qu'au centre.

Par projection sur l'axe, on arrive à la loi de force suivante :

$$\boxed{F = -kx} \qquad (18.5)$$

## 10/ FORCES D'INERTIE OU PSEUDO FORCES (قوى العطالة أو شبه القوة)

Lors de notre étude du mouvement relatif, nous avons rencontré la loi de composition des accélérations:

$$a_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'observateur lié au repère absolu galiléen doit écrire:

$$\vec{F} = m\vec{a}_a = m\frac{d\vec{v}_a}{dt} \;\; ; \;\; \vec{v} = \vec{v}_a \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad (19.5)$$

L'observateur lié au repère relatif non galiléen doit écrire:

$$\vec{F} = m\vec{a}_r = m\frac{d\vec{v}_r}{dt} \;\; ; \;\; \vec{F} = m(\vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c)$$

Soit:

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c} \qquad (20.5)$$

**Conclusion** : Dans le repère galiléen on doit écrire :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dans le repère non galiléen on écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

En comparant les deux dernières équations nous pouvons en déduire ce qui suit : on peut appliquer la loi de la dynamique dans un référentiel **non galiléen** $(R)$ à condition qu'au terme $\vec{F}$ , qui représente les forces réelles, c'est-à-dire les forces résultant des effets mutuels effectifs, on doit ajouter les deux termes $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$ connus respectivement sous les noms de **force d'entraînement** et **force Coriolis**.

Ces deux termes traduisent la forme **non galiléenne** du référentiel $(R)$.

Tous les résultats de la mécanique newtonienne peuvent être utilisés dans un référentiel non galiléen à condition d'ajouter l'effet des forces d'inertie à l'effet des forces réelles.

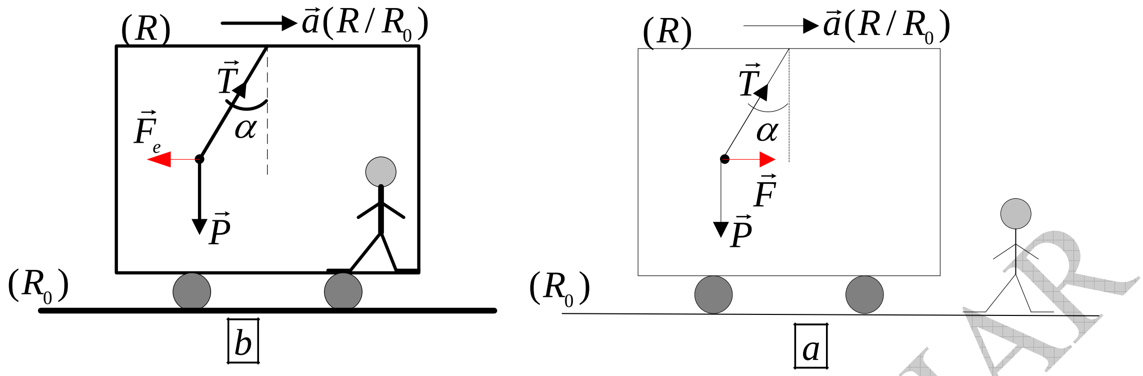
**Par exemple** : Lorsqu'un bus en mouvement freine subitement, un passager qui est à bord subit l'effet de la force d'inertie.

**Exemple d'application :**

Un pendule est suspendu au toit d'une voiture en mouvement de translation accéléré (voir figure5.10).

Nous allons recensé les observations de chacun des deux observateurs dont l'un, debout est lié à la terre, l'autre étant lié à la voiture.

Les deux observateurs constatent l'inclinaison du pendule dans le sens contraire du mouvement de la voiture.




Observateur ié au repère $(R)$ mobile    Observateur ié au repère $(R_0)$ fixe

**Fig 5.10 :**

**<u>Par rapport à l'observateur fixe</u>** : la masse $m$ est en mouvement avec l'accélération $\vec{a}$ . Il applique la loi (5.6) et écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{P}+\vec{T}$$

**<u>Par rapport à l'observateur en mouvement</u>** : la masse $m$ est en équilibre relatif. Cet observateur considère que les forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont compensées par la force d'inertie $\vec{F}_e$ telle que : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e=\vec{0}$

En comparant les écritures des deux observateurs on en déduit que la force d'inertie est:

$$\boxed{\vec{F}_e=-m\vec{a} \;\; ; \;\; F_e=ma}$$

L'équation du mouvement appliquée au pendule dans le repère $(R)$ s'écrit :

$$m\frac{dv}{dt}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e+\vec{F}_c$$

Or la force de Coriolis est nulle puisque le repère $(R)$ est en mouvement de translation par rapport au repère fixe $(R_0)$ . Donc :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=m(\vec{g}-\vec{a})+\vec{T}$$

On pose $\vec{g}\,'=\vec{g}-\vec{a}$ , ce qui nous permet d'écrire : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{g}\,'+\vec{T}$

Cette dernière équation montre que tout se passe comme si à l'intérieur de la voiture règne une **<u>pesanteur apparente</u>** :

$$\boxed{\vec{g}\,'=\vec{g}-\vec{a}} \quad \vec{a}\perp\vec{g} \Rightarrow \boxed{g'=\sqrt{g^2+a^2}}$$

Nous pouvons à présent calculer l'angle d'inclinaison du pendule qui est le même pour les deux observateurs :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{a}{g}}$$

Nous pouvons aussi calculer la période des oscillations de faible amplitude par rapport à l'observateur mobile :

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\left(g^2 + a^2\right)^{1/2}}}}$$

Si la voiture était au repos, la période serait plus grande :

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

**Exemple5.6 :** Une personne se tient debout sur une balance pèse personne à l'intérieur d'un ascenseur au repos, elle lit $650N$ . Combien lira-t-elle sur la balance lorsque l'ascenseur se met en mouvement avec une accélération de $2ms^{-1}$ dans les deux cas :

a/ vers le haut,

b/ vers le bas.

**Réponse :**

a/ **Mouvement vers le haut** : Par rapport à un observateur extérieur à l'ascenseur, la personne pèse $650N$ et sa masse $65kg$ .

L'ascenseur est en état d'équilibre par rapport à la personne qui est soumise aux forces $\vec{R}, \vec{P}, \vec{F}_e$. Ce que lit la personne est l'intensité de la réaction $\vec{R}$ de la balance, soit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow R - P - F_e = 0 \Rightarrow R = P' = mg + ma$$

$$\boxed{P' = mg' = m(g + a)} = 65(10 + 2) \qquad \boxed{P' = 780N}$$

b/ **Mouvement vers le bas :**

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow -R + P - F_e = 0 \Rightarrow \boxed{R = P' = m(g - a)}$$

$$P' = 65(10 - 2) \qquad \boxed{P' = 520N}$$

## 11/ MOMENT D'UNE FORCE(عزم قوة )

❖ Soit la figure 5.11 où $\Delta$ est un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ ; $\Delta$ et $\vec{u}$ sont de même sens. Soit $O$ un point de cet axe :

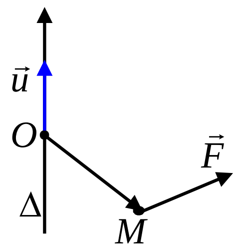



**Fig 5.11**

❖ **Définition : On appelle moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point $M$ par rapport à l'axe $\Delta$ la grandeur scalaire :**

$$\boxed{\tau_\Delta = \vec{\tau}_O.\vec{u}} \qquad (21.5)$$

**Avec $\vec{\tau}_O$ le moment de la force $\vec{F}$ au point $O$.**

Remarquons que le moment de la force $\tau_\Delta$ (grandeur scalaire) est la projection du moment de la force $\vec{\tau}_O$ (grandeur vectorielle) en un point de l'axe , et c'est une grandeur indépendante de la position de $O$ sur l'axe.

$$\boxed{\vec{\tau}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}} \qquad (22.5)$$

❖ **Expression du moment de la force par rapport à l'axe $\Delta$ :**

La figure 5.12 représente une porte soumise à une force quelconque $\vec{F}$ et assujettie à tourner autour de l'axe $\Delta = Oz$. Pour faire notre étude, nous optons pour les coordonnées cylindriques $(r,\theta,z)$, les mieux adaptées à ce cas, et ayant comme origine $O$ et $Oz$ comme axe vertical.

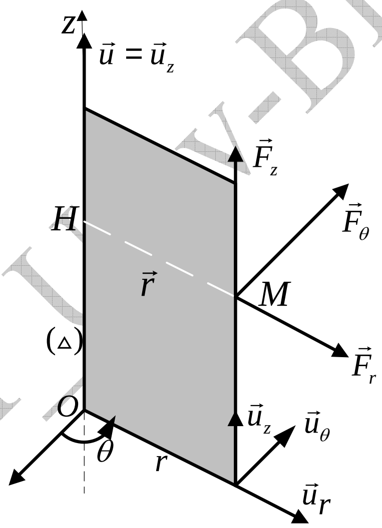



**Fig 5.12**

Nous décomposons la force $\vec{F}$ en trois composantes :

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta + \vec{F}_z \Rightarrow \vec{F} = F_r.\vec{u}_r + F_\theta.\vec{u}_\theta + F_z.\vec{u}_z$$

$Oz$ étant l'axe, donc $\vec{u} = \vec{u}_z$ et par conséquent $\tau_\Delta = \tau_z = \vec{\tau}_O.\vec{u}_z \quad ; \quad \vec{\tau}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

$$\tau_\Delta = \tau_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}_z = (r.\vec{u}_r + z.\vec{u}_z) \wedge (F_r.\vec{u}_r + F_z.\vec{u}_z + F_\theta.\vec{u}_\theta).\vec{u}_z$$

Effectuons cette opération qui est un produit mixte de vecteurs :

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r & 0 & z \\ F_r & F_\theta & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{u}_r(0 - z.F_\theta) - \vec{u}_\theta(r.F_z - z.F_r) + \vec{u}_z(r.F_\theta - 0)$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = -z.F_\theta.\vec{u}_r - r.F_z.\vec{u}_\theta + z.F_r\vec{u}_\theta . + r.F_\theta.\vec{u}_z$$

$$\tau_{\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}_z = -z.F_{\theta}.\underbrace{\vec{u}_r.\vec{u}_z}_{0} - r.F_z.\underbrace{\vec{u}_{\theta}.\vec{u}_z}_{0} + z.F_r.\underbrace{\vec{u}_{\theta}.\vec{u}_z}_{0} + r.F_{\theta}.\underbrace{\vec{u}_z.\vec{u}_z}_{1}$$

$$\boxed{\tau_{\Delta} = \tau_z = r.F_{\theta}} \qquad (23.5)$$

Nous remarquons que les composantes radiale $\vec{F}_r$ et axiale $\vec{F}_z$ ne contribuent pas dans le moment par rapport à l'axe $\Delta$ .

**Conclusion** :

- La force radiale $\vec{F}_r$ qui rencontre l'axe $\Delta$ n'a aucun effet de rotation sur la porte (elle l'arrache).
- La force axiale $\vec{F}_z$ parallèle à l'axe $\Delta$ n'a elle aussi aucun effet de rotation sur la porte (elle la soulève).
- La force normale $\vec{F}_{\theta}$ perpendiculaire à l'axe $\Delta$ est la seule qui a un effet de rotation sur la porte. Plus la longueur du bras est grande, plus il est facile de faire tourner la porte.

## 12/ LE MOMENT CINETIQUE (العزم الحركي)

### ❖ Le moment cinétique d'un point matériel en un point de l'espace :

Soit $O$ un point de l'espace (il n'est pas indispensable qu'il soit au repos dans un référentiel $R$ ) :

**On appelle moment cinétique d'un point matériel de masse $m$ , de quantité de mouvement $\vec{p}$ et situé au point $M$ par rapport au point $O$ le produit vectoriel:**

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}} \qquad (24.5)$$

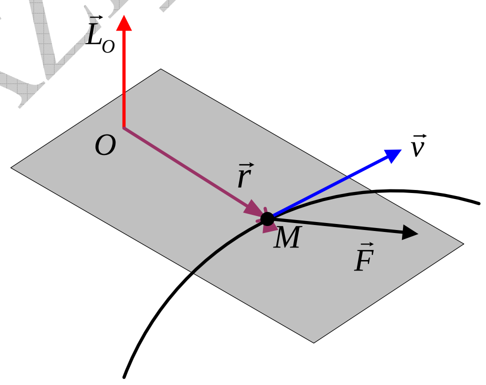



**Fig 5.13**

Vu la similitude entre cette expression 5.24 et l'expression du moment cinétique de la force 5.22, on peut qualifier le moment cinétique de moment de la quantité de mouvement.

### ❖ Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe :

Par comparaison avec la définition du moment d'une force par rapport à un axe, on peut en déduire la définition du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe $\Delta$ comme suit :

$$\boxed{L_\Delta = \vec{L}_O.\vec{u}} \qquad (25.5)$$

Remarquons que le moment cinétique $L_\Delta$ (grandeur scalaire) est la projection du moment cinétique $\vec{L}_O$ (grandeur vectorielle) en un point de l'axe. $L_\Delta$ est indépendant du choix de la position $O$ sur l'axe.

Sans de nouveaux calculs et en se référant uniquement à la comparaison, nous arrivons à l'expression du moment cinétique d'un point matériel par rapport à l'axe $Oz$ en fonction de la coordonnée transversale de sa quantité de mouvement, soit :

$$\boxed{L_\Delta = L_z = r.p_\theta} \qquad (26.5)$$

Partant des deux expressions transversales de la quantité de mouvement et de la vitesse, nous arrivons à une nouvelle expression du moment cinétique en fonction de la masse, du vecteur position et de la vitesse angulaire :

$$\left.\begin{array}{l} p_\theta = m.v_\theta \\ v_\theta = r.\dot{\theta} \\ L_\Delta = L_z = r.p_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{L_\Delta = L_z = m.r^2.\dot{\theta}} \qquad (27.5)$$

**Remarque :** Cette expression peut demeurer constante si $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow L_\Delta = m.r^2.\omega$

On pose $C = r^2.\dot{\theta}$

Sous l'effet d'une force centrale, le vecteur position balaie entre les instants $t_1$ et $t_2$ le triangle $OP_1P_2$ dont l'aire est $ds = \frac{1}{2}r^2.d\theta$ , (figure5.14).

Divisons les deux membres par $dt$ :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2.\dot{\theta} \qquad (28.5)$$

On remarque que : $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2.\dot{\theta} = \frac{1}{2}C = C^{te}$

Nous découvrons une expression appelée **loi des aires** relative au mouvement à force centrale qui stipule que « **le vecteur position balaie pendant des intervalles de temps égaux des aires égales** ». Figure5.14

Il est utile de donner par la même occasion la définition de la **vitesse aréolaire** en relation avec le sujet de la force centrale « **la vitesse aréolaire** $\frac{dS}{dt}$ **est la surface balayée par le vecteur position par unité de temps** ».

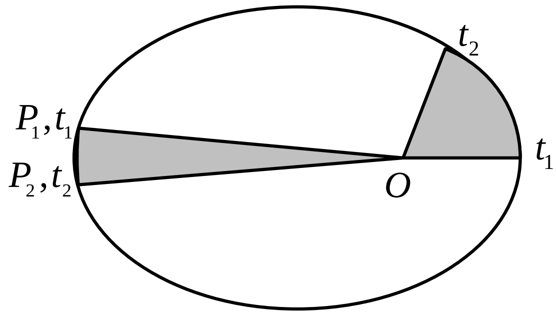



**Fig 5.14 : Schématisation de la loi des aires les surfaces colorées sont égales**

### ❖ Le théorème du moment cinétique :

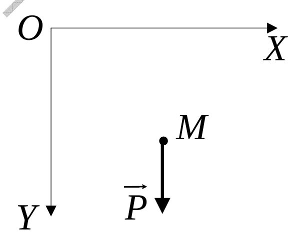
Enoncé : **En un point fixe $O$ d'un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel est égal au moment de la force qui lui est appliquée en ce point.**

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O} \qquad (29.5)$$

Le moment cinétique joue pour la rotation ( $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$ ) un rôle similaire à celui que joue la force pour la translation ( $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ ) .

**Exemple 5.7:**

Un point matériel $M$ de masse $m$ vibre autour d'un axe horizontal $OZ$ perpendiculaire au plan vertical $(OX, OY)$ du mouvement (figure5.15). Sa position est définie à chaque instant par ses coordonnées cartésiennes.




Calculer directement :

1/ le moment du poids $\vec{P}$ par rapport au point $O$, puis par rapport à l'axe $OZ$ en fonction de $x, g$ et $m$.

2/ le moment cinétique du point $M$ par rapport au point $O$, puis par rapport à l'axe $OZ$ en fonction de $m, x, y, \dot{x}$ et $\dot{y}$.

3/ Trouver l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique sur le point $M$ .

**Réponse :**

1/ On calcule le moment de la force $\vec{P}$ appliquée au point $M$ par rapport au point $O$ dans la base $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \\ \vec{P} = \underbrace{\vec{P}_x}_{0} + \vec{P}_y = mg.\vec{j}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} \ ; \ \boxed{\vec{\tau}_O = mgx.\vec{k}}$$

Par rapport à l'axe $\Delta = OZ$ , on obtient :

$$\tau_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right).\vec{k} \ ; \ \boxed{\tau_\Delta = mgx}$$

2/ Calculons le moment cinétique du point $M$ par rapport au point $O$ dans la base $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v}_x + m\vec{v}_y\end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \ ; \ \boxed{\vec{L}_O = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

Par rapport à l'axe nous obtenons : $\Delta = OZ$

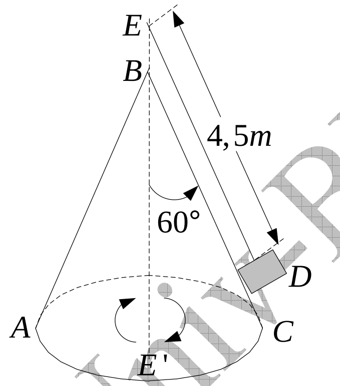
$$L_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}\right).\vec{k} \ ; \ \boxed{L_O = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)}$$

Appliquons le théorème du moment cinétique :

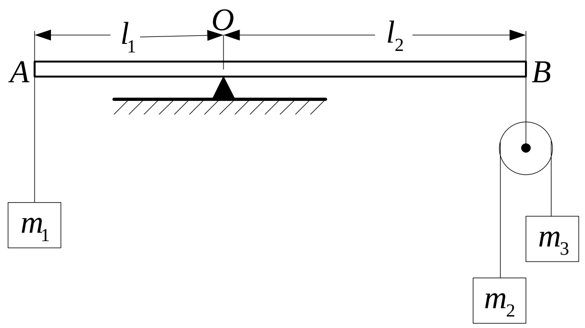
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_0 \ ; \ m\left(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x}\right)\vec{k} = mgx.\vec{k} \Rightarrow \boxed{x\ddot{y} - y\ddot{x} = gx}$$

# EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

| Exercice 5.1 | تمرين 1.5 |
|---|---|
| Un corps $D$ de masse $5,5kg$ (figure ci-dessous) se déplace sans frottement sur la surface d'un cône $ABC$, en tournant autour de l'axe $EE'$ avec une vitesse angulaire de $10tours/mn$. Calculer :<br>a/ la vitesse linéaire du corps,<br>b/ la réaction de la surface sur le corps,<br>c/ la tension du fil,<br>d/ la vitesse angulaire nécessaire pour rendre nulle la réaction du plan.<br>On prend $g = 9,8ms^{-1}$ | ينتقل جسم $D$ كتلته $5,5kg$ بدون احتكاك على سطح مخروط $ABC$ (الشكل في الأسفل)، و ذلك بدورانه حول المحور $EE'$ بسرعة زاوية $10tours/mn$. أحسب:<br>ا/ السرعة الخطية للجسم،<br>ب/ رد فعل السطح على الجسم،<br>ج/ توتر الخيط،<br>د/ السرعة الزاوية اللازمة لكي ينعدم رد فعل المستوى. نأخذ $g = 9,8ms^{-1}$. |




| Exercice 5.2 | تمرين 2.5 |
|---|---|
| En considérant les forces de frottement comme négligeables ainsi que la masse de la poulie,<br>1/ montrer que la barre $AB$ dans la figure ci-dessous sera en équilibre à condition que l'équation suivante soit vérifiée :<br>$m_1(m_2+m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2$,<br>2/ trouver la force que le couteau exerce sur la barre. | باعتبار قوى الاحتكاك مهملة و كذا كتلة البكرة:<br>1/ برهن أن القضيب في الشكل أسفله يكون في توازن بشرط أن تتحقق المعادلة التالية:<br>$m_1(m_2+m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2$<br>2/ أوجد القوة التي يطبقها السكين على القضيب. |



**Exercice 5.3**

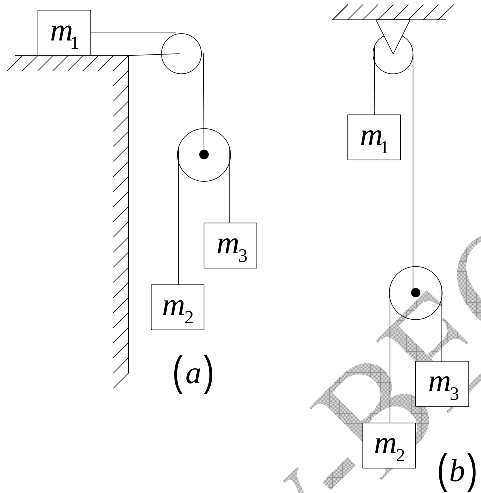
Dans cet exercice on néglige les forces de frottement ainsi que les masses des poulies et celles des fils que nous considérons comme inextensibles.

Trouver les accélérations des corps de la figure ci-dessous dans les deux cas $(a)$ et $(b)$.

**تمرين 3.5**

في هذا التمرين نهمل قوى الاحتكاك و كذا كتل البكرتين و الخيوط التي نعتبرها غير قابلة للتمطيط.

أوجد تسارعات أجسام الشكل أسفله في كل من الحالتين $(a)$ و $(b)$.




**Exercice 5. 4**

La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est $5N$ et qui repose sur un plan rugueux incliné de $\theta = 35°$. Le coefficient de frottement statique est $0.80$ . On prend $g = 10ms^{-2}$ .

a/ Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps décolle ?

b/ Quelle est la force de frottement statique maximale?

c/ Quelle est la force normale pour $35°$ ?

d/ Quelle est la force de frottement statique pour une inclinaison de $35°$ ?

**تمرين 4.5**

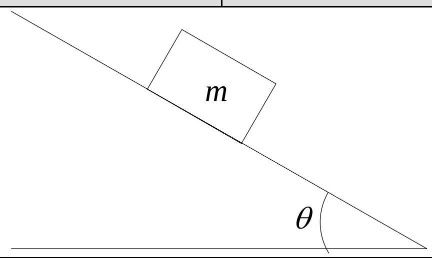
يبين الشكل جسما ثقله $5N$ موضوعا على مستوي خشن مائل بـــ $\theta = 35°$ . معامل الاحتكاك السكوني هو $0.80$ . نأخذ $g = 10ms^{-2}$ .

ا/ ما هي زاوية الميل اللازمة لكي يقلع الجسم ؟

ب/ ما هي قوة الاحتكاك السكوني الأعظمية ؟

ج/ ما هي القوة الناظمية عند ميل $35°$ ؟

د/ ما هي قوة الاحتكاك السكوني عند الميل $35°$؟



**Exercice 5.5**

La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est $8N$ et qui repose sur un plan rugueux incliné de $\theta = 35°$. Le coefficient de frottement cinétique est $0.40$. On prend $g = 10ms^{-2}$.

a/ Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps glisse avec une vitesse constante ?

b/ Quelle set la force normale pour une inclinaison de $\theta = 35°$ ?

c/ Quelle est la force de frottement pour $\theta = 35°$ ?

d/ Quelle est l'accélération pour une inclinaison de $\theta = 35°$ ?

**تمرين 5.5**

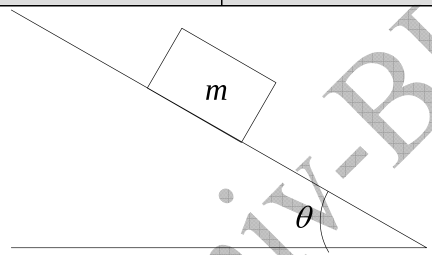
يبين الشكل جسما ثقله $8N$ موضوعا على مستوي خشن مائل ب $\theta = 35°$. معامل الاحتكاك الحركي هو $0.40$. نأخذ $g = 10ms^{-2}$

ا/ ما هي زاوية الميل اللازمة لكي ينتقل الجسم بسرعة ثابتة ؟

ب/ ما هي القوة الناظمية عند ميل $\theta = 35°$ ؟

ج/ ما هي قوة الاحتكاك الحركي عند $\theta = 35°$ ؟

د/ ما هو التسارع عند ميل $\theta = 35°$؟




**Exercice 5.6**

Un corps $B$ de masse $3kg$ est placé sur un autre corps $A$ de masse $5kg$ (figure ci-dessous). On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre le corps $A$ et la surface sur laquelle il repose Les coefficients de frottement statique et cinétique entre les deux corps sont respectivement $0,2$ et $0,1$.

a/ Quelle force maximale peut-on appliquer à chaque corps pour faire glisser le système en maintenant ensemble les deux corps ?

b/ Quelle est l'accélération quand cette force maximale est appliquée ?

c/ Quelle est l'accélération du corps $B$ si la force est plus grande que la force maximum ci-dessus et est appliquée au corps $A$ ? et appliquée au corps $B$ ?

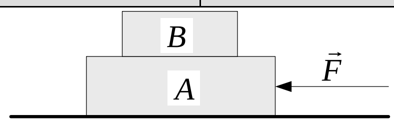
**تمرين 6.5**

يوضع جسم $B$ كتلته $3kg$ على جسم آخر $A$ كتلته $5kg$ (الشكل في الأسفل). نفترض عدم وجود احتكاك بين الجسم $A$ و السطح الذي يرتكز عليه. معاملا الاحتكاك السكوني و الحركي بين الجسمين هما على التوالي $0,2$ و $0,1$.

ا/ ما هي القوة الأعظمية الممكن تطبيقها على كل جسم حتى تنزلق الجملة مع إبقاء الجسمين معا؟

ب/ ما هو التسارع حين تطبق هذه القوة الأعظمية؟

ج/ ما هو تسارع الجسم $B$ إذا كانت قوة أكبر من القوة الأعظمية المذكورة أعلاه مطبقة على الجسم $A$ ؟ مطبقة على الجسم $B$ ؟




**Exercice 5.7**

On pose une masse $m_2$ sur une masse $m_1$, puis on pose l'ensemble sur un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontal. Le coefficient de frottement cinétique entre $m_1$ et $m_2$ est $h_2$, et entre $m_1$ et la

**تمرين 7.5**

وضعت كتلة $m_2$ فوق كتلة $m_1$، ثم وضعت الجملة على مستوى مائل بزاوية $\alpha$ مع الأفق. معامل الإحتكاك الحركي بين $m_1$ و $m_2$ هو $h_2$، و بين $m_1$ و السطح المائل

surface inclinée il est $h_1$ .

Calculer les accélérations des deux masses.

Application numérique :

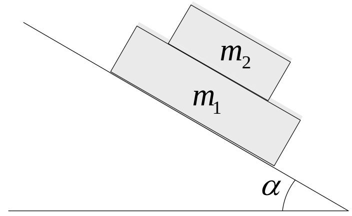
$$h_1 = 2h_2 = 0,3 \ , \ m_2 = 8kg \ ,$$
$$m_1 = 5kg \ , \ \alpha = 60° \ , \ g = 9,8ms^{-2}$$

هو $h_1$ .

أحسب تسارع كل من الكتلتين.

تطبيق عددي:

$$h_1 = 2h_2 = 0,3 \ , \ m_2 = 8kg \ ,$$
$$m_1 = 5kg \ , \ \alpha = 60° \ , \ g = 9,8ms^{-2}$$



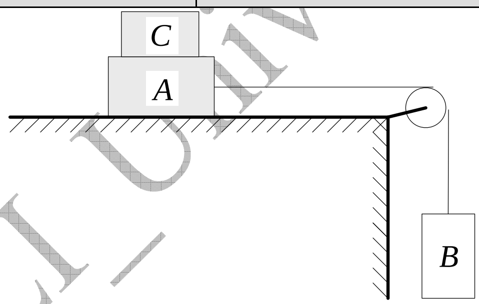

**Exercice 5.8**

Les masses des corps $A$ et $B$ sur la figure ci-dessous sont respectivement $10kg$ et $5kg$ . Le coefficient de frottement de $A$ avec la table est $0,20$ . La masse de la poulie est négligeable. Le fil est inextensible et de masse négligeable. Trouver la masse minimale de $C$ qui empêche $A$ de bouger.

Calculer l'accélération du système si on soulève $C$ .

**تمرين 8.5**

كتلتا الجسمين $A$ و $B$ على الشكل أسفله هما على التوالي $10kg$ و $5kg$ . معامل الاحتكاك لـــ $A$ مع الطاولة هو $0,20$ . نهمل كتلة البكرة كما نفترض الخيط مهمل الكتلة و عديم الإمتطاط. أوجد الكتلة الأصغرية لـــ $C$ التي تمنع $A$ من التحرك. أحسب تسارع الجملة إذا رفعنا $C$ .




**Exercice 5.9**

Un point matériel de masse $m$ est lancé avec une vitesse initiale $v_0$ faisant un angle $\theta$ avec l'horizontale. Il est soumis au champ de gravitation terrestre.

**I. Le tir a lieu dans le vide :**

1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamental de la dynamique. Calculer alors l'accélération $\vec{a}(t)$ .

Calculer :

2. la vitesse $\vec{v}(t)$ .

3. la position $\overrightarrow{OM}(t)$ .

4. la distance $OA$ .

5. l'altitude maximale $z_{max}$ atteinte par ce projectile.

**II. Le tir a lieu dans l'air :**

Le point matériel est soumis à un frottement

**تمرين 9.5**

تقذف نقطة مادية كتلتها $m$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ تصنع الزاوية $\theta$ مع الأفق و تخضع لحقل الجاذبية الأرضية.

**I/ يتم الرمي في الفراغ:**

1/ إعزل النقطة المادية و طبق عليها المبدإ الأساسي للتحريك. إحسب حينئذ التسارع $\vec{a}(t)$ .

أحسب:

2/ السرعة $\vec{v}(t)$ .

3/ الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$ .

4/ المسافة $OA = x_{max}$ .

5/ الارتفاع الأعظمي $z_{max}$ الذي تبلغه القذيفة.

**II/ الرمي في الهواء:**

تخضع النقطة المادية لاحتكاك لزج من النوع $\vec{f} = -k.\vec{v}$ .

visqueux du type $\vec{f} = -k.\vec{v}$ :

1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

2. En remplaçant $\vec{a}$ par $\frac{d\vec{v}}{dt}$, montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g} .$$

3. En déduire l'expression vectorielle de la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$. Montrer que celle-ci tend vers une valeur limite $\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}$.

4. En déduire la position $\overrightarrow{OM}(t)$. Ecrire les expressions des composantes de ce vecteur.

5. Calculer l'instant $t_s$ pour lequel le projectile atteint le sommet $S$ de la trajectoire et en déduire les coordonnées $x_s$ et $z_s$ correspondants.

6/ Démontrer que la trajectoire a une asymptote lorsque $t \to \infty$ .

**III**. **Synthèse graphique :**

Tracer qualitativement sur un même graphique la trajectoire dans les deux cas suivants :

1. le tir a lieu dans le vide (pas de frottement).

2.le tir a lieu dans l'air (frottement visqueux).

1/ إعزل النقطة المادية و طبق عليها المبدإ الأساسي للتحريك.

2/ بتعويض $\vec{a}$ بـــ $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ، بيّن أننا نحصل على المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$

3/ إستنتج العبارة الشعاعية للسرعة اللحظية $\vec{v}(t)$.

بيّن أن هذه الأخيرة تؤول إلى قيمة حدية $\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}$.

4/ إستنتج الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$. أكتب عبارتي مركبتي هذا الشعاع.

5/ أحسب اللحظة $t_s$ التي تبلغ فيها القذيفة الذروة $S$ لمسارها و استنتج الإحداثيتين المناسبتين $x_s$ و $z_s$.

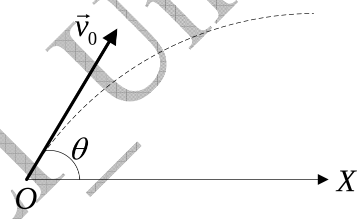
6/ برهن أن المسار يقبل خطا مقاربا عندما $t \to \infty$.

**III/ خلاصة بيانية:**

أرسم الشكل العام للمسار على نفس البيان في الحالتين:

1/ يتم الرمي في الفراغ( عدم وجود احتكاك).

2/ يتم الرمي في الهواء( وجود احتكاك لزج).




**Exercice 5.10**

Une demi sphère de rayon $R = 2m$ et de centre $O$ repose sur un plan horizontal. Une particule de masse $m$ , partant du repos du point $M_0$ situé en haut de la demi sphère, glisse sous l'action de son poids.

1/ Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la particule au cours de son glissement, sachant que le coefficient de glissement sur la surface de la sphère est $\mu$ .

2/ **En négligeant les frottements :**

a/ démontrer que la vitesse acquise au point $M$ défini par l'angle $\theta = \widehat{MOM_0}$ est donnée par l'expression $v = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$ ,

b/ en déduire alors l'angle $\theta_0$ sous lequel la particule quitte la surface de la sphère, discuter le résultat,

c/ calculer la vitesse $v_0$ correspondante.

3/ Au moment où la particule quitte le point $M$ avec

**تمرين 10.5**

توضع كرة نصف قطرها $R = 2m$ و مركزها $O$ على مستوى أفقي. تنزلق جسيمة كتلتها $m$ من السكون تحت تأثير ثقلها من النقطة $M_0$ الواقعة في أعلى نصف الكرة.

1/ اكتب المعادلة التفاضلية لحركة هذه الجسيمة أثناء انزلاقها علما أن معامل الاحتكاك الإنزلاقي على سطح الكرة هو $\mu$.

2/ **بإهمال الاحتكاك:**

ا/ بين أن السرعة المكتسبة عند النقطة $M$ المعرفة بالزاوية $\theta = \widehat{MOM_0}$ تعطى بالعلاقة $v = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$،

ب/ إستنتج عندئذ مقدار الزاوية $\theta_0$ التي من أجلها تغادر الجسيمة سطح الكرة، ناقش النتيجة،

ج/ أحسب السرعة $v_0$ الموافقة.

la vitesse $v_0$ , on demande :

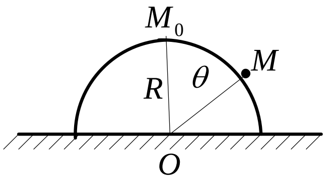
a/ de trouver la vitesse $v$ instantanée en fonction de $g, R, v_0, \theta_0, t$ ,

b/ les modules des forces tangentielle et normale.

3/ عند مغادرة الجسيمة النقطة $M$ بالسرعة $v_0$ يطلب:

ا/ إيجاد السرعة $v$ اللحظية للحركة بدلالة $g, R, v_0, \theta_0, t$ ،

ب/ شدتي القوة المماسية و القوة الناظمية.




**Exercice 5.11**

La fusée « Apollo » effectue un voyage de la terre à la lune. La lune est à la distance $3.84\times10^{8}\,m$ de la terre. La masse de la terre est $5.98\times10^{24}\,kg$ tandis que celle de la lune vaut $7.36\times10^{22}\,kg$ .

a/ Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la terre lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?

b/ Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?

d/ Quelle est l'intensité du champ résultant du champ de pesanteur de la terre et celui de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?

e/ A quelle distance du centre de la terre le champ résultant des deux champs terrestre et lunaire s'annule-t-il ?

**تمرين 11.5**

الصاروخ " أبولو" يقوم برحلة من الأرض إلى القمر. يبعد القمر عن الأرض بمسافة $3.84\times10^{8}\,m$ . كتلة الأرض $5.98\times10^{24}\,kg$ بينما كتلة القمر $7.36\times10^{22}\,kg$ .

ا/ ما هي شدة حقل الجاذبية الأرضية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟

ب/ ما هي شدة حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟

ج/ ما هي شدة الحقل الناتج عن حقل الجاذبية الأرضية و حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟

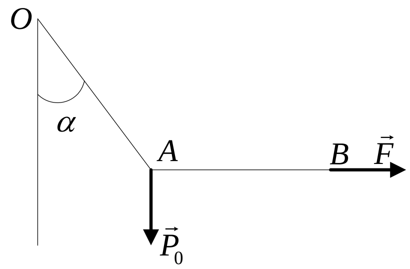
د/ على أي بعد من مركز الأرض ينعدم الحقل الناتج عن جاذبيتي الأرض و القمر ؟

**Exercice 5.12**

On dispose de deux ressorts linéaires identiques de longueur au repos $l$ . Chacun, soumis à un poids $\vec{P}_0$ , prend un allongement $l_0$, déterminé par leur raideur commune $k$ . On suspend un poids $P_0$ à l'un des ressorts et on tire horizontalement le poids à l'aide de l'autre ressort que l'on tire avec une force variable $\vec{F}$ . Le premier fait alors un angle $\alpha$ avec la verticale. Pour chaque valeur de $\alpha$ correspondant à une force $\vec{F}$ , le ressort $(1)$ prend un allongement $l_1$ et le ressort $(2)$ un allongement $l_2$. Calculer les allongements $l_1$ et $l_2$ en fonction de $\alpha$ et $l_0$ .

**تمرين 12.5**

نتوفر على نابضين خطيين متماثلين طول كل منهما $l$ في حالة سكون. حين يخضع كل منهما لثقل $\vec{P}_0$ يأخذ استطالة $l_0$، محددة بثابت مرونتهما المشتركة $k$. نعلق ثقلا $P_0$ إلى أحد النابضين و نسحب أفقيا الثقل بواسطة النابض الآخر الذي نجذبه بقوة متغيرة $\vec{F}$. يصنع الأول زاوية $\alpha$ مع الشاقول. من أجل كل قيمة لـــ $\alpha$ مناسبة للقوة $\vec{F}$ ، يستطيل النابض $(1)$ بـــ $l_1$ و النابض $(2)$ الثاني بـــ $l_2$. أحسب الإستطالتين $l_1$ و $l_2$ بدلالة $\alpha$ و $l_0$.




**Exercice 5.13**

On donne le vecteur position $\vec{r}$ d'un corps de masse $6kg$ : $\vec{r} = \vec{i}.(3t^2 - 6t) + \vec{j}.(-4t^3) + \vec{k}.(3t+2)(m)$.

Trouver :

a/ la force $\vec{F}$ agissant sur le corps,

b/ le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'origine,

c/ la quantité de mouvement $\vec{p}$ du corps et son moment cinétique par rapport à l'origine,

d/ vérifier que $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ et que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$.

**تمرين 13.5**

يعطى شعاع الموضع لجسم كتلته $6kg$ :

$\vec{r} = \vec{i}.(3t^2 - 6t) + \vec{j}.(-4t^3) + \vec{k}.(3t+2)(m)$

أوجد:

ا/ القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم،

ب/ عزم $\vec{F}$ بالنسبة للمبدإ،

ج/ كمية الحركة $\vec{p}$ للجسم و عزمه الحركي بالنسبة للمبدإ،

د/ تأكد أن $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ و أن $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$.

**Exercice 5.14**

Un pendule est constitué d'une masse $m$ accrochée au point $M$ à un fil de masse négligeable et de longueur $l$. Le fil est repéré par rapport à la verticale par l'angle orienté $\theta$. Le mouvement s'effectue sans frottement.

1/ Exprimer dans la base $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ la vitesse de $M$ par rapport au référentiel $R$.

2/ Etablir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique dans chacune des deux bases $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ et $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Démontrer qu'elles sont équivalentes Retrouver cette même équation en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

3/ En considérant des oscillations d'amplitude $\theta_0$, trouver l'expression de la tension du fil lors du passage du pendule par sa position d'équilibre. Quelle est donc la condition sur la tension du fil pour que celui-ci ne casse pas ?

**تمرين 14.5**

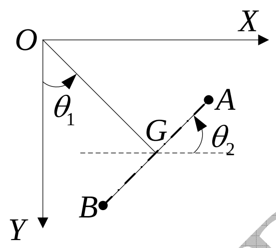
يتكون نواس من كتلة $m$ مثبتة في النقطة $M$ لخيط كتلته مهملة و طوله $l$. موضع الخيط معين بالنسبة للشاقول بالزاوية الموجهة $\theta$. تتم الحركة بدون احتكاك.

1/ عبر في القاعدة $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$، عن سرعة $M$ بالنسبة للمرجع $R$.

2/ ضع معادلة الحركة باستعمال نظرية العزم الحركي في كل من القاعدتين $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ و $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. برهن أن المعادلتين متكافئتان. أوجد من جديد المعادلة نفسها بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك.

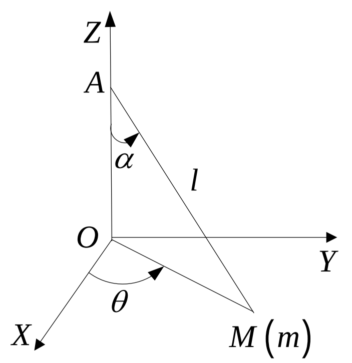
3/ باعتبار الاهتزازات ذات السعة الصغيرة جدا $\theta_0$، جد عبارة توتر الخيط عند مرور النواس من موضع التوازن بدلالة $m,g,l$ و $\theta_0$. ما هو إذن الشرط في توتر الخيط حتى لا ينقطع؟

| | |
|---|---|
| **Exercice 5.15**<br>Deux boules identiques, assimilables à deux points matériels de masse $m$, sont fixées aux deux extrémités d'une barre $AB$ de masse négligeable et de longueur $2d$. Cette barre, astreinte à rester dans le plan $(OX,OY)$, est articulée en $G$ à une tige $OG$ de masse négligeable et de longueur $a$. Le mouvement est repéré par les angles $\theta_1$ et $\theta_2$ (voir figure).<br>Calculer directement le moment cinétique $\vec{L}_O$ du système par rapport au point $O$ en fonction de $m,a,l,\theta_1$ et $\theta_2$. | **تمرين 15.5**<br>تثبت كرتان متماثلتان، نفترضهما نقطيتين ماديتين ذات كتلة $m$، في نهاتي قضيب $AB$ كتلته مهملة و طوله $2d$. هذا القضيب المجبر على البقاء في المستوى $(OX,OY)$، متمفصل في $G$ مع ساق كتلتها مهملة و طولها $a$. تعين الحركة بالزاويتين $\theta_1$ و $\theta_2$ (أنظر الشكل).<br>أحسب مباشرة العزم الحركي $\vec{L}_O$ للجملة بالنسبة للنقطة $O$ بدلالة $m,a,l,\theta_1$ و $\theta_2$. |






| | |
|---|---|
| **Exercice 5.16**<br>Un point matériel $M$, de masse $m$, lié par un fil inextensible de longueur $l$ à un point fixe $A$, tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega$ autour de l'axe $AZ$.<br>1. $\alpha$ étant l'angle que forme $AM$ avec la verticale, calculer la tension $T$ du fil puis l'angle $\alpha$ en fonction de $m,g,l$ et $\omega$.<br>2. Calculer en coordonnées cylindriques d'origine $O$ l'expression du moment cinétique de $M$ par rapport à $A$.<br>Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à $A$ de la résultante des forces appliquées à $M$. | **تمرين 16.5**<br>تدور نقطة مادية $M$ كتلتها $m$، موصلة بخيط غير قابل للتمدد طوله $l$ إلى نقطة ثابتة $A$، حول المحور $AZ$ بسرعة زاوية ثابتة $\omega$.<br>1/ إذا كانت $\alpha$ هي الزاوية التي تصنعها $AM$ مع الشاقول، أحسب التوتر $T$ للخيط ثم الزاوية $\alpha$ بدلالة $m,g,l$ و $\omega$.<br>2/ أحسب بالإحداثيات الأسطوانية ذات المبدإ $O$ عبارة العزم الحركي لـــ $M$ بالنسبة لـــ $A$.<br>تأكد أن مشتقته بالنسبة للزمن تساوي عزم محصلة القوى المطبقة على $A$ بالنسبة لـــ $M$. |



**Exercice 5.17**

Un pendule simple est suspendu au toit du wagon d'un train qui roule en ligne droite sur un terrain plat à une vitesse de $120 km.h^{-1}$. Un passager s'aperçoit que le pendule dévie subitement vers la droite, faisant un angle $\alpha = 10°$ avec la verticale ; il conserve cette position pendant $30$ secondes, puis revient à la verticale.

1/ Comment interprétez-vous la déviation du pendule ?

2/ Calculer le rayon de courbure.

3/ De quel angle le train a-t-il tourné ?

On prend $g = 9.8 m.s^{-2}$ .

**تمرين 17.5:**

نواس بسيط معلق إلى سقف عربة قطار يسير على خط مستقيم فوق أرضية مستوية بسرعة $120 km.h^{-1}$. يلاحظ مسافر أن النواس ينحرف فجأة نحو اليمين، صانعا زاوية $\alpha = 10°$ مع الشاقول؛ يحافظ على هدا الوضع مدة $30$ ثانية، ثم يود إلى الشاقول.

1/ كيف تفسر انحراف النواس عن الشاقول؟

2/ أحسب نصف قطر الانحناء.

3/ ما هي الزاوية التي استدار بها القطار؟

نأخذ $g = 9.8 m.s^{-2}$ .

**Exercice 5.18**

Une corde de masse $M$ uniformément répartie sur sa longueur $L$ (figure ci-dessous) peut glisser sans frottement sur la gorge d'une poulie bloquée de très petit rayon. Quand le mouvement commence $BC = b$ . Montrer que lorsque $BC = \frac{2}{3} L$ , l'accélération est $a = \frac{g}{3}$ et la vitesse $v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(bL - b^2 - \frac{2}{9}L\right)}$ .

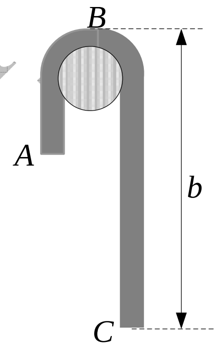
Application numérique : $L = 12m$ et $b == 7m$

**تمرين 18.5**

حبل كتلته $M$ موزعة بانتظام على طوله $L$ (الشكل في الأسفل) يمكنه الانزلاق بدون احتكاك على محزّ بكرة غير قابلة للدوران ذات نصف قطر صغير جدا. عندما تبدأ الحركة تكون $BC = b$ . برهن أنه لما $BC = \frac{2}{3} L$ ، فإن التسارع هو $a = \frac{g}{3}$ و عبارة السرعة هي:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(bL - b^2 - \frac{2}{9}L\right)} .$$

تطبيق عددي: $L = 12m$ و $b = 7m$ .



**Exercice 5.19**

Un point matériel $M$ de masse $m$ se déplace sans frottement sur la surface intérieure d'un cône de révolution d'axe $(Oz)$, de sommet $O$ et de demi angle au sommet $\alpha$ .

A l'instant $t$ , $M_0$ a pour coordonnées cylindriques $(r_0,\theta_0,z_0)$. Dans la région considérée, l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ sera considérée comme uniforme. Le référentiel $\mathbb{R}(0,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ est galiléen.

1/ Montrer que la côte du point $M$ , notée $z$ , est donnée par : $z = r\dfrac{z_0}{r_0}$ .

2/ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathbb{R}$ et la projeter sur la base locale des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. Ecrire le système des trois équations différentielles obtenues.

3/ Déduire la relation $\dot{\theta} = f(r_0,v_0,r)$ de l'expression de la composante orthoradiale de l'accélération du point $M$ .

4/ Mettre l'équation différentielle d'intégrale $r(t)$ sous la forme :

$$\ddot{r} + \frac{A(r_0,v_0,z_0)}{r^3} = B(r_0,z_0,g)$$

5/ Pour quelle vitesse initiale $v_1 = f(z_0,g)$ le point $M$ a-t-il un mouvement circulaire uniforme de rayon $_0$ sur le cône, autour de l'axe $(Oz)$ ?

6/ Multiplier par $2\dot{\ }$ les deux membres de l'équation différentielle de solution $r(t)$ et l'intégrer une fois par rapport au temps $t$. Présenter l'équation différentielle obtenue sous la forme : $\dot{r}^2 = f(r_0,v_0,z_0,r,g)$.

**تمرين 19.5**

تنتقل نقطة مادية $M$ كتلتها $m$ بدون احتكاك على السطح الداخلي لمخروط دوران محوره $(Oz)$ قمته $O$ و نصف زاويته الرأسية $\alpha$.

في اللحظة $t$، تكون لـــ $M_0$ الإحداثيات الأسطوانية $(r_0,\theta_0,z_0)$. يعتبر تسارع الجاذبية الأرضية $\vec{g}$ منتظما في المنطقة المعينة. المرجع $\mathbb{R}(0,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ غليلي.

1/ برهن أن علو النقطة $M$، المرموز له بـــ $z$، معطى بـــ $z = r\dfrac{z_0}{r_0}$ .

2/ طبق العلاقة الأساسية للتحريك في $\mathbb{R}$ ثم أسقطها على القاعدة المحلية للإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. أكتب جملة المعادلات التفاضلية الثلاثة المتحصل عليها.

3/ إستنتج العلاقة $\dot{\theta} = f(r_0,v_0,r)$ لعبارة المركبة العرضية لتسارع النقطة $M$ .

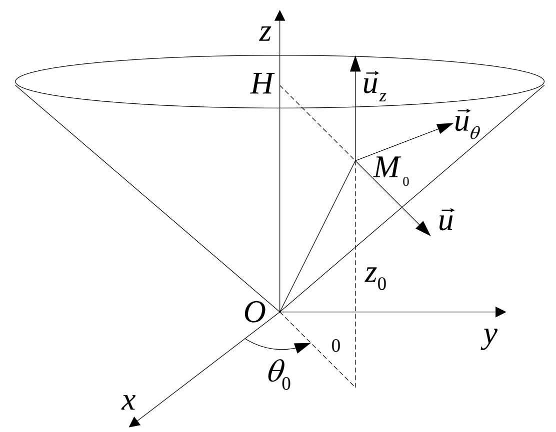
4/ ضع المعادلة التفاضلية لتكامل $r(t)$ على الشكل:

$$\ddot{r} + \frac{A(r_0,v_0,z_0)}{r^3} = B(r_0,z_0,g)$$

5/ من اجل أي قيمة للسرعة الإبتدائية $v_1 = f(z_0,g)$ يكون للنقطة $M$ حركة دائرية منتظمة نصف قطرها $_0$ على المخروط، حول المحور $(Oz)$؟

6/ إضرب في $2\dot{\ }$ طرفي المعادلة التفاضلية ذات الحل $r(t)$ و كاملها مرة واحدة بالنسبة للزمن $t$. أكتب المعادلة التفاضلية المحصل عليها على الشكل:

$$\dot{r}^2 = f(r_0,v_0,z_0,r,g)$$



**Exercice 5.20**

Une particule de charge $q$ et de masse $m$, se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ électromagnétique ( (le champ électrique étant $E\vec{k}$ et le champ magnétique $B\vec{i}$ ) subit une force de la forme : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$.

On suppose $\vec{E}$ et $\vec{B}$ constants en module et sens.

Montrer dans ce cas que la particule se déplace dans le plan $yOz$ selon une trajectoire en forme de cycloïde d'équations :

$y(t) = a(\theta - \sin\theta)$ et $z(t) = a(1 - \cos\theta)$.

Avec $a = \dfrac{m}{q}$ et $\theta = \dfrac{qB}{m}$ . La vitesse initiale est nulle.

**تمرين 20.5**

تتحرك جسيمة شحنتها $q$ و كتلتها $m$ بسرعة $\vec{v}$ في مجال كهرومغناطيسي( المجال الكهربائي هو $E\vec{k}$ و المجال المغناطيسي هو $B\vec{i}$ ) فتتأثر بقوة من الشكل:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

نفترض $\vec{E}$ و $\vec{B}$ ثابتي الشدة و الاتجاه.

تأكد أن في هذه الحالة تتحرك الجسيمة في المستوى $yOz$ وفق مسار دويري معادلتاه:

$y(t) = a(\theta - \sin\theta)$ و $z(t) = a(1 - \cos\theta)$ .

مع $a = \dfrac{m}{q}$ و $\theta = \dfrac{qB}{m}$ . السرعة الابتدائية معدومة.

## Corrigés des exercices de 5.1 à 5.20 — حلول التمارين من 1.5 إلى 20.5

**Exercice 5.1 :**

a/ Puisque le mouvement est circulaire, la vitesse linéaire du corps est : $\boxed{v = \omega r}$

Convertissons la vitesse angulaire dans les unités du système international :

$$\omega = \frac{10.6,28}{60} \simeq 1,05 rad.s^{-1}$$

Calculons le rayon du mouvement circulaire qu'effectue le corps autour de l'axe $EE'$ :

$$r = l.\sin 60° \ \ , \ \ r = 4,5.0,87 \Rightarrow r = 3,9m$$

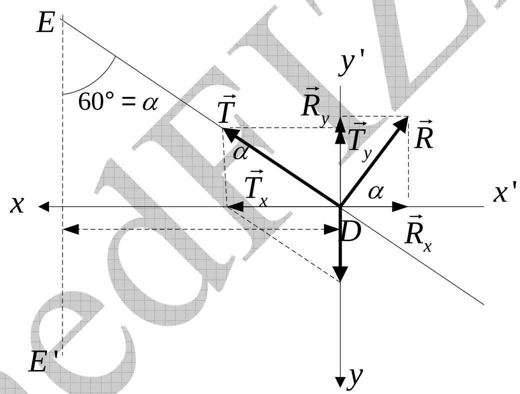
D'où : $v = 1,05.3,9 \Rightarrow \boxed{v \simeq 4,1ms^{-1}}$

b/ Calcul de l'intensité de la force de réaction du plan sur le corps : le corps est en mouvement circulaire uniforme sous l'action de forces dont la résultante est une force centrale de module $m\omega^2$ . Projetons les différentes forces sur les deux axes (voir figure).

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\omega^2 r.\vec{i}$$

$$T.\sin\alpha - R.\cos\alpha = m\omega^2 r \rightarrow (1)$$

$$P - R.\sin\alpha - T.\cos\alpha = 0 \rightarrow (2)$$




Eliminons la tension entre les deux équations $(1)$ et $(2)$ pour obtenir le module de la réaction :

$$\frac{T.\sin\alpha}{T.\cos\alpha} = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha}$$

$$\boxed{R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right)} \rightarrow (3) \quad ; \quad \boxed{R \simeq 37N}$$

c/ La tension du fil peut être calculée à partir de l'une des deux équations $(1)$ ou $(2)$ :

$$T = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{\sin\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 46,4N}$$

$$T = \frac{P - R.\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 43.42N}$$

La différence entre les deux valeurs de la tension est due à la valeur approchée que nous avons prise pour chaque cas.

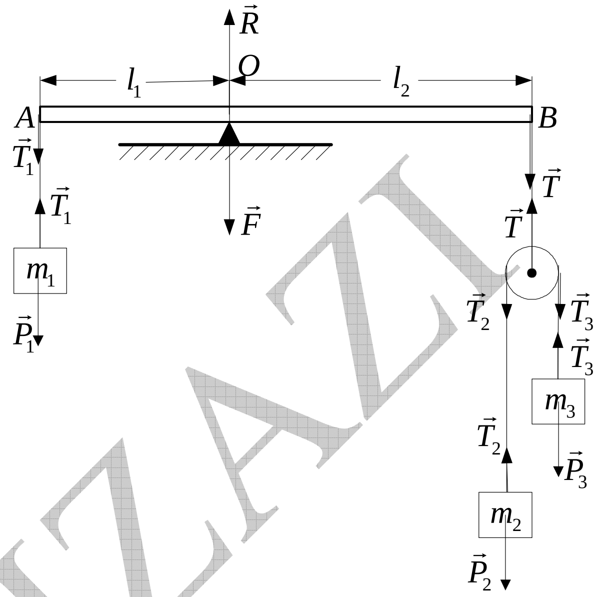
d/ La vitesse angulaire nécessaire pour que la réaction du plan sur le corps s'annule est déduite de l'équation $(3)$ :

$$R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g.\sin\alpha}{r.\cos\alpha} = \frac{g.\sin\alpha}{l.\sin\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}} \;,\; \boxed{\omega \simeq 2{,}1 rad.s^{-1}}$$

**<u>Exercice 5.2</u> :**

1/ Nous représentons toutes les forces agissant sur le système. L'équilibre du système est vérifié si la somme algébrique des moments des forces appliquées sur la barre par rapport à l'axe (le couteau) est nulle, soit : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta}$




Pour calculer l'intensité de la tension $\vec{T}$, on doit calculer d'abord l'accélération des deux masses $m_2$ et $m_3$ par rapport à la poulie en rotation sans translation. Pour cela on applique la relation fondamentale de la dynamique :

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g}$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \Rightarrow T_3 = m_3\left(g - a\right) \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \Rightarrow T_2 = m_2\left(g + a\right) \\ a = \dfrac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g \\ T = T_2 + T_3 \;\;,\;\; T = m_2\left(g + a\right) + m_3\left(g - a\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{T = 4g\,\frac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}}$$

Pour $m_1$ : $P_1 = T_1$

D'après le théorème des moments : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta} \Rightarrow T_1.l_1 = T.l_2$

Et à la fin : $m_1 g.l_1 = 4g\dfrac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}.l_2 \Rightarrow \boxed{m_1\left(m_2 + m_3\right).l_1 = 4m_2 m_3.l_2}$

2/ La force appliquée par le couteau sur la barre est égale à la résultante des deux forces parallèles $\vec{T}$ et $\vec{T}_1$ :

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T} \Rightarrow \boxed{R = g\left(m_1 + \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}\right)}$$

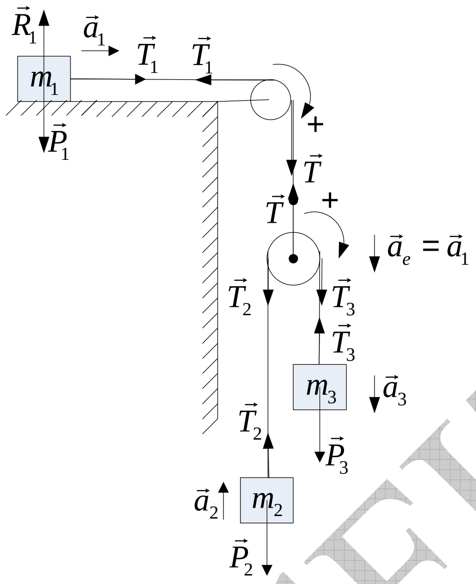
**<u>Exercice 5.3</u> :**

**<u>Premier cas</u>** : (voir figure ci-dessous).

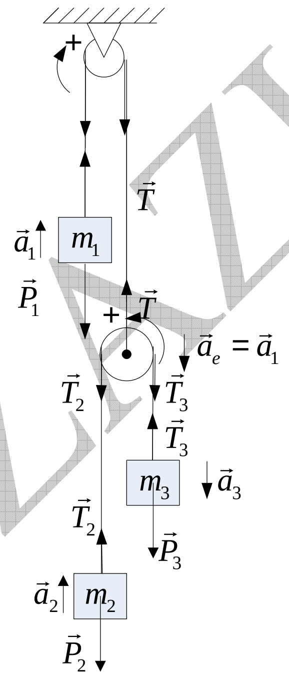
Nous sommes en présence d'un exercice de dynamique associé au mouvement relatif.

Commençons par appliquer le principe de la relation fondamentale aux masses $m_1$ , $m_2$ et $m_3$ :

$$\begin{array}{l|}\vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3.\vec{a}_3 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \\ \vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \dfrac{1}{2}\vec{T}_1 \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ 2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2m_3.\vec{a}_3 \\ 2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2m_2.\vec{a}_2 \end{array}\right.$$




**Premier cas**




**Deuxième cas**

Nous connaissons la loi de composition des accélérations pour le mouvement relatif de translation (sans rotation) : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. L'accélération d'entraînement est égale à l'accélération de la poulie en translation, c'est-à-dire à l'accélération de la masse $m_1$ $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$ . Quant à l'accélération relative $\vec{a}$ elle est commune aux deux masses $m_2$ et $m_3$ .

En tenant compte du sens indiqué sur la figure :

Pour la masse $m_2$ l'accélération absolue est : $a_2 = a_r - a_1$

Pour la masse $m_3$ l'accélération absolue est : $a_3 = a_r + a_1$

Par projection, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} T_1 = ma_1 \rightarrow (1) \\ T_1 - 2P_2 = 2m_2(a_r - a_1) \rightarrow (2) \\ -T_1 + 2P_3 = 2m_3(a_r + a_1) \rightarrow (3) \end{cases}$$

Nous venons d'obtenir un système d'équations à trois inconnues. L'accélération relative commune est déduite de l'équation $(3)$ :

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3 g - 2m_3 a_1 - m_1 a_1}{2m_3} g} \rightarrow (4)$$

Remplaçons $a$ par sa valeur tirée de l'équation $(2)$ pour trouver l'expression de l'accélération $a_1$ de la masse $m_1$ :

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g} \rightarrow (5)$$

Revenons à l'expression $(4)$ pour calculer l'accélération relative en remplaçant l'accélération absolue par sa valeur que nous avons trouvée dans l'équation $(5)$ :

$$\boxed{a_r = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g} \rightarrow (6)$$

Il devient facile maintenant de déduire les deux accélérations restantes $a_2$ et $a_3$.

L'accélération $a_2$ de la masse $m_2$ :

$$a_2 = a_r - a_1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g - \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

L'accélération $a_3$ de la masse $m_3$ :

$$a_3 = a_r + a_1 \;\; ; \;\; a_3 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g + \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\boxed{a_3 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 + 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

**<u>Deuxième cas</u> :** (voir figure ci-dessus)

Nous commençons par appliquer la relation fondamentale de la dynamique aux masses $m_1$ , $m_2$ et $m_3$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3.\vec{a}_3 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \\ \vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \dfrac{1}{2}\vec{T}_1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ 2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2m_3.\vec{a}_3 \\ 2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2m_2.\vec{a}_2 \end{array}\right.$$

Comme dans le premier cas $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. L'accélération d'entraînement est égale à l'accélération de la poulie en translation, c'est-à-dire à l'accélération de la masse $m_1$ $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$ . Quant à l'accélération relative $\vec{a}$ elle est commune aux deux masses $m_2$ et $m_3$ .

En tenant compte du sens indiqué sur la figure :

Pour la masse $m_2$ son accélération absolue est : $a_2 = a_r - a_1$

Pour la masse $m_3$ son accélération absolue est : $a_3 = a_r + a_1$

Par projection, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} T_1 = ma_1 \rightarrow (8) \\ T_1 - 2P_2 = 2m_2\left(a_r - a_1\right) \rightarrow (9) \\ -T_1 + 2P_3 = 2m_3\left(a_r + a_1\right) \rightarrow (10) \end{cases}$$

Nous venons d'établir un système de trois équations à trois inconnues.

Nous en déduisons l'accélération relative commune de l'équation $(9)$ :

$$\boxed{a_r = \frac{\left(m_1 - 2m_2\right)g - \left(m_1 + 2m_2\right)a_1}{2m_2}g} \rightarrow (11)$$

En remplaçant $a$ par sa valeur dans l'équation $(10)$ nous trouvons l'expression de l'accélération $a_1$ de la masse $m_1$ :

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g} \rightarrow (12)$$

En revenant à l'expression $(11)$ nous calculons l'accélération relative en remplaçant l'accélération absolue par sa valeur que nous venons de trouver dans l'équation $(12)$ :

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g} \rightarrow (13)$$

Il est facile à présent d'en déduire les deux accélérations manquantes.

Expression de l'accélération $a_2$ de la masse $m_2$ :

$$a_2 = a_r - a_1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g - \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{3m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

Expression de l'accélération $a_3$ de la masse $m_3$ :

$$a_3 = a_r + a_1 \;\; ; \;\; a_3 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g + \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\boxed{a_3 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_3 - 3m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

**Exercice 5.4 :**

a/ Angle d'inclinaison nécessaire pour que le corps décolle.

Quand la force de frottement statique atteint sa valeur maximale pour un angle de décollage $\theta_0$, appelé angle de frottement et qui est un angle limite, elle s'équilibre avec la composante du poids $\vec{P}_x$ , à ce moment là, le corps décolle :

$$\left.\begin{array}{l} f_{s,\max} = P_x = mg\sin\theta_0 \\ f_{s,\max} = \mu N \\ N = P_y = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu} \;\; , \;\; tg\theta_0 = 0{,}80 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 38{,}66°}$$

b/ Intensité de la force de frottement maximale :

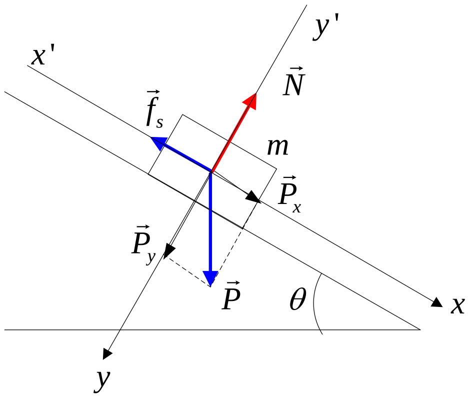
$$\boxed{f_{s,\max} = \mu N} \;\; , \;\; \boxed{f_{s,\max} = 3{,}13N}$$

c/ La force normale pour l'angle $35°$ :

$$\boxed{N = P_y = mg\cos\theta} \ , \ \boxed{N = 4{,}1N}$$

d/ Force de frottement pour l'angle $35°$ :

$$\boxed{f_s = P_x = mg\sin\theta} \ , \ \boxed{f_s = 2{,}87N}$$




**Exercice 5.5 :**

a/ Angle d'inclinaison nécessaire pour que le corps se déplace à vitesse constante, cela veut dire que la somme des forces doit être nulle :

$$\vec{f}_c + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

Par projection sur les deux axes, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} P_x - f_c = 0 \Rightarrow mg\sin\theta_0 = \mu_c N \\ P_y - N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu_c} \ , \ tg\theta_0 = 0{,}40 \ , \ \boxed{\theta_0 = 21{,}8°}$$

b/ Force de frottement pour l'angle $35°$ :

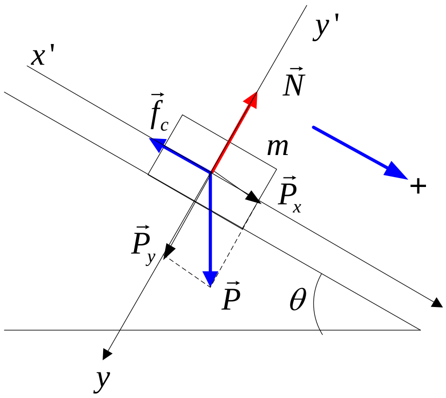
$$\boxed{N = mg\cos\theta} \ , \ \boxed{N = 6{,}55N}$$

c/ Force de frottement cinétique pour l'angle $35°$ :

$$\boxed{f_c = \mu_c N} \ ; \ \boxed{f_c = 2{,}62N}$$

d/ Accélération pour l'angle $35°$ :

$$mg\sin\theta - f_c = ma \Rightarrow \boxed{\frac{mg\sin\theta - f_c}{m}} \ , \ \boxed{a = 2{,}46N}$$




**Exercice 5.6 :**

a/ Pour que le système glisse, tout en maintenant ensemble les deux corps, il faut que les deux corps aient la même vitesse, donc la même accélération par rapport au plan fixe.(Du point de vue du mouvement relatif, il faut que l'accélération absolue du corps $B$ soit égale à l'accélération d'entraînement du corps $A$).

Soit $\vec F$, la force qu'il faut appliquer sur le corps $A$ pour que le système glisse tout en maintenant les deux corps ensembles. Figure (a)

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour calculer l'accélération des deux corps :

Pour le corps $A$ :

$$\vec F + \underbrace{\vec P + \vec N}_{\vec 0} = (m_A + m_B).\vec a \quad , \quad F = (m_A + m_B).a \Rightarrow a = \frac{F}{m_A + m_B} \rightarrow (1)$$

Pour le corps $B$ : par rapport au repère fixe il est en mouvement, mais par rapport au corps $A$ il est au repos. C'est pour cette raison que la force de frottement agissant sur lui est une force de frottement statique. On peut donc écrire :

$$\left.\begin{array}{l} -f_{s,\max,A} = m_A.a \\ f_{s,\max,A} = \mu_s N_A \\ N_A = P_A = m_A g \end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{-\mu_s m_A g}{m_A} \Rightarrow a = -\mu_s g \rightarrow (2)$$

Pour en déduire la force, il suffit d'égaler les deux équations $(1)$ et $(2)$ :

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} = -\mu_s g \Rightarrow \boxed{F = \mu_s (m_A + m_B) g} \; , \; \boxed{F = 15,7 N}$$

(a) (b)

b/ Accélération du système quand on applique la force $\vec F$ :

Par rapport au plan de glissement il n'y a pas de force de frottement. Le système est donc soumis au forces $\vec P, \vec N$ et $\vec F$. Figure (b)

La relation fondamentale de la dynamique nous permet d'écrire :

$$\left.\begin{array}{l} \vec P + \vec N = \vec 0 \\ F = (m_A + m_B) a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{(m_A + m_B)}} \; , \; \boxed{a = 1,96 ms^{-2}}$$

c/ Accélération du corps $B$, par rapport au corps $A$, si la force est appliquée sur le corps $A$ (figure (c)) :

(c) (d)

Le corps $B$ est soumis à trois forces $\vec P_B, \vec N_B$ et $\vec f_{c,B}$ (force de frottement cinétique, car le

Corps $B$ est en mouvement par rapport au corps $A$). Le corps $A$ qui est soumis à la force $\vec{F}$ porte le corps $B$.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au corps $B$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P}_B + \vec{N}_B = \vec{0} \\ -f_{c,B} = m_B a' \\ f_{c,B} = \mu_c N_B \\ N_B = m_B g \end{array}\right| \Rightarrow a' = \frac{\mu_c m_B g}{m_B} \Rightarrow \boxed{a' = -\mu_c g}\ ,\ \boxed{a' = -0,98 ms^{-2}}$$

**Le signe négatif indique que le corps est attiré dans le sens contraire de celui du mouvement.**

L'accélération du corps $B$ si la force qui lui est appliquée est la même (figure (d)). Dans ce cas le corps $B$ est soumis à quatre forces $\vec{P}_B, \vec{N}_B, \vec{F}$ et $\vec{f}_{c,B}$. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au corps $B$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \\ F - f_{c,B} = m_B a'' \\ f_{c,B} = \mu_c N_B \\ N_B = m_B g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a'' = \frac{F - \mu_c m_B g}{m_B}}\ ,\ \boxed{a'' = +0,98 ms^{-2}}$$

**Le signe plus indique que le corps $B$ est attiré dans le sens du mouvement.**

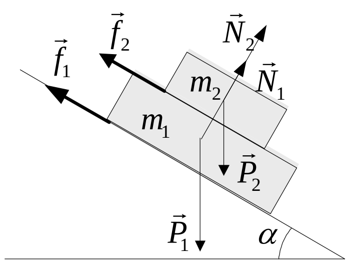
**<u>Exercice 5.7</u> :**

On applique la relation fondamentale de la dynamique aux deux masses :

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m_1 \vec{a}_1$$
$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{f}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

On projette les relations sur l'axe parallèle au plan incliné :

$$m_1 g \sin\alpha - f_1 - f_2 = m_1 a_1 \rightarrow (1)$$
$$m_2 g \sin\alpha_1 - f_2 = m_1 a_2 \rightarrow (2)$$




On exprime les deux forces de frottement cinétique :

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = h_1 (N_1 + N_2) \\ N_1 = m_1 g \cos\alpha \\ N_2 = m_2 g \cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow f_1 = h_1 g (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2 = h_2 N_2 \\ N_2 = m_2 g \cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow f_2 = h_2 m_2 g \cos\alpha$$

On remplace les forces de frottement cinétique dans les deux équations $(1)$ et $(2)$ pour obtenir les deux nouvelles équations :

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g h_2 \cos\alpha - h_1 g (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\alpha) = m_1 a_1 \rightarrow (3)$$
$$m_2 g \sin\alpha_1 - h_2 m_2 g \cos\alpha = m_2 a_2\ (4)$$

On en déduit maintenant les deux accélérations à partie des équations $(3)$ et $(4)$ :

$$\boxed{a_1 = g\left(\sin\alpha - h_1\cos\alpha\right) - \frac{m_2}{m_1} g\cos\alpha\left(h_2 + h_1\right)} \rightarrow \boxed{a_1 = 3,53 ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_2 = g\left(\sin\alpha - h_2\cos\alpha\right)} \rightarrow \boxed{a_2 = 7,79 ms^{-2}}$$

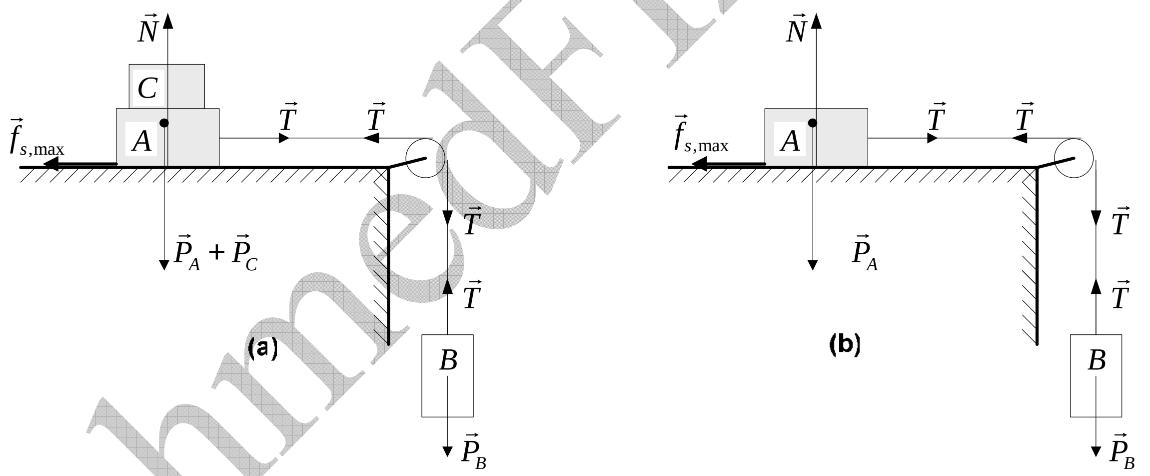
**<u>Exercice 5.8</u> :**

Pour calculer la masse du corps $C$, nous avons représenté sur la figure (a) toutes les forces agissant sur le système. Les conditions de décollage, c'est à dire pour que le système entame son mouvement, est $T = f_{s,\max}$ et $T = P_B$ :

$$\left.\begin{array}{l} T = f_{s,\max} \\ T = P_B = m_B g \\ f_{s,\max} = \mu_s N \\ N = P_A = \left(m_A + m_C\right) g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{m_C = \frac{\left(m_B - \mu_s m_A\right)}{\mu_s}} \;,\; \boxed{m_C = 15 kg}$$

Lorsque on enlève le corps $C$ (figure(b)), nous obtenons l'accélération en appliquant la relation fondamentale de la dynamique au système :

$$\left.\begin{array}{l} T - f_c = m_A a \\ P_B - T = m_B a \\ f_c = \mu_c m_A g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{\left(m_B - \mu_c m_A\right) g}{m_B + m_A}} \;,\; \boxed{a = 1.36 ms^{-2}}$$




**<u>Exercice 5.9</u> :**

I/ **<u>Lancement dans le vide</u>** :

1/ Faisons l'inventaire de toutes les forces et faisons un schéma, puis appliquons la relation fondamentale de la dynamique. La seule force qui agit sur le point matériel est son poids $\vec{P}$. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{a} \\ \vec{P} = m\vec{g} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} = -g.\vec{u}_z}$$

2/ A chaque instant $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_z$

Suivant l'axe des $X$, le mouvement est rectiligne uniforme :

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_{0x} = v_0.\cos\theta \rightarrow (1)$$

Suivant l'axe des $Z$, le mouvement est rectiligne uniformément varié :

$$\sum \vec{F}_z = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_z = -g = Cte$$

$$v_z = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\theta \rightarrow (2)$$

Le vecteur de la vitesse instantanée est donc :

$$\vec{v} = v_x.\vec{u}_x + v_z.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + \left(-gt + v_0 \sin\theta\right).\vec{u}_z} \rightarrow (3)$$

3/ Intégrons l'expression $(3)$ pour obtenir le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{0}}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \left[v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + \left(-gt + v_0 \sin\theta\right).\vec{u}_z\right]dt$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\underbrace{v_0.\cos\theta.t}_{x}\right).\vec{u}_x + \left(\underbrace{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta.t}_{z}\right).\vec{u}_z} \rightarrow (4)$$

4/ Le projectile atteint sa portée lorsque sa hauteur s'annule $(z=0)$ . Calculons en premier lieu l'instant pour lequel $(z=0)$ :

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta.t = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g} \end{cases}$$

Remplaçons le temps dans l'équation de la coordonnée $x$ pour trouver la portée :

$$x = v_0.\cos\theta.t \Rightarrow x_{\max} = \frac{2v_0^2.\sin\theta.\cos\theta}{g} \quad , \quad \boxed{x_{\max} = \frac{v_0^2.\sin 2\theta}{g}}$$

5/ Le projectile atteint son apogée $z_{\max}$ lorsque la composante verticale $v_z$ de la vitesse s'annule. Cherchons l'instant pour laquelle cette vitesse s'annule et cela à partir de l'équation $(2)$ :

$$v_z = -gt + v_0 \sin\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Remplaçons maintenant le temps dans l'expression de $z$ de l'équation $(4)$ . Nous trouvons :

$$\boxed{z_{\max} = \frac{v_0^2.\sin^2\theta}{2g}}$$

**II/ <u>Lancement dans l'air</u>** :

1/ Dans cette partie : le projectile est soumis à deux forces : $\boxed{\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}}$

2/ Retrouvons l'équation différentielle :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}} \rightarrow (5)$$

3/ On en déduit directement l'expression vectorielle de la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ en résolvant l'équation différentielle précédente. Sa solution est:

$$\vec{v} = \vec{A}e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}$$

Reste la détermination de la constante $\vec{A}$ que nous allons déduire à partir des conditions initiales qui sont : $t = 0, \vec{v} = \vec{v}_0$ ; d'où :

$$\vec{v}_0 = \vec{A}e^{-0} + \vec{g}\,\frac{m}{k} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = \vec{v}_0 - \vec{g}\,\frac{m}{k}}$$

3/ Donc :

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\,\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\,\frac{m}{k}} \rightarrow (6)$$

La valeur limite est celle pour laquelle le temps tend vers $\infty$, on obtient de l'équation $(6)$ : $\boxed{\vec{v}_L = \vec{g}\,\frac{m}{k}}$

Introduisons cette valeur limite dans l'équation $(6)$ pour obtenir :

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\,\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\,\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L} \rightarrow (7)$$

Exprimons maintenant le vecteur vitesse en fonction des vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ :

$$\vec{v}_0 = v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_L = \vec{g}\,\dfrac{m}{k}\\ \vec{g} = -g\vec{u}_z\end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_L = -g\,\frac{m}{k}\vec{u}_z \Rightarrow v_L = -g\,\frac{m}{k}$$

$$\vec{v} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]e^{-\frac{k}{m}t} - v_L.\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\left(v_0\cos\theta\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_x}\vec{u}_x + \left[\underbrace{-v_L + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_z}\right]\vec{u}_z}$$

4/ Pour obtenir l'expression du vecteur position il suffit d'intégrer l'expression $(7)$ de la vitesse :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L\\ \displaystyle\int_{\vec{0}}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L\right]dt\\ \overrightarrow{OM} = \left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\left(-\dfrac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L.t\right]_0^t\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \vec{v}_L.t} \rightarrow (8)$$

Pour obtenir les composantes de $\overrightarrow{OM}$ , nous développons l'équation $(8)$ et puis nous remplaçons $\vec{v}_0$ par ses composantes et $\vec{v}_L$ par sa valeur, comme nous l'avons fait pour l'expression de la vitesse instantanée, et enfin ordonnons l'équation obtenue.

$$\overrightarrow{OM} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L t.\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(v_0\cos\theta\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\vec{u}_x + \left[-v_L.t + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]\vec{u}_z$$

On arrive aux composantes :

$$\boxed{x(t)=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)}\ ,\ \boxed{z(t)=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-v_L.t}\rightarrow(9)$$

5/ Le projectile atteint son apogée quand la vitesse verticale s'annule. Cherchons d'abord l'instant pour lequel cette vitesse s'annule :

$$v_z=-v_L+\left(v_0\sin\theta+v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t_s}=0$$

$$e^{-\frac{k}{m}t_s}=\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}\Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t_s}=\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}$$

$$\ln e^{-\frac{k}{m}t_s}=\ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}\right)\Rightarrow\frac{k}{m}t_s=-\ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}\right)$$

$$\boxed{t_s=\frac{k}{m}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

Revenons aux deux équations horaires $(9)$ et remplaçons le temps par la valeur que nous venons de trouver :

$$x_s=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}\right)$$

$$\boxed{x_s=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-\frac{1}{1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta}\right)}$$

$$z_s=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}\right)-v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-\frac{1}{1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta}\right)-v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(\frac{v_0\sin\theta}{v_L+v_0\sin\theta}\right)-v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$\boxed{z_s=\frac{m}{k}v_0\sin\theta-v_L\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)}\ ,\ \boxed{z(t)=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-v_L.t}=(8)$$

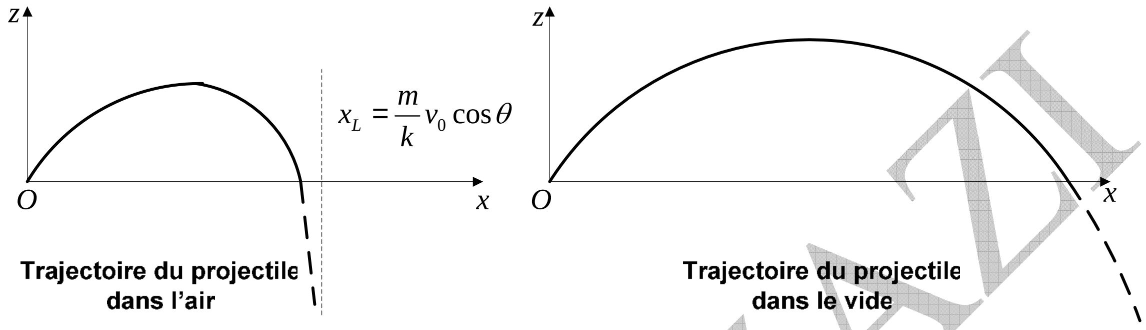
6/ Cherchons dans l'expression $(9)$ les limites de $x(t)$ et $z(t)$ quand $t\rightarrow\infty$ :

$$x(t)_{t\rightarrow\infty}=\frac{m}{k}v_0\cos\theta=A\Rightarrow x(t)_{t\rightarrow\infty}=A\rightarrow(10)$$

$$z(t)_{t\to\infty} = \underbrace{\frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)}_{B} - v_L.t \Rightarrow z(t)_{t\to\infty} = -v_L.t + B \to (11)$$

On en déduit de l'équation $(11)$ que lorsque $t \to \infty$ le mouvement du projectile devient rectiligne uniforme, donc la trajectoire a une asymptote quand $t \to \infty$ dont l'équation est$(10)$ .

**III**. **Synthèse graphique** : les deux graphes montrent la trajectoire dans les deux cas considérés.




**Exercice 5.10 :**

**1/Le mouvement en présence de frottement** :

La particule est soumise à trois forces, son poids $\vec{P}$ , la réaction $\vec{N}$ de la surface de la sphère sur la particule et la force de frottement $\vec{f}$ . A partir de la figure (a) ci-dessous, et en appliquant a relation fondamentale de la dynamique nous pouvons écrire :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$$

Projetons les forces sur les deux axes $MT$ et $MN$ :

$$P_T - f = ma_T = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow mg\sin\theta - f = m\frac{dv}{dt} \to (1)$$

$$-N + P_N = ma_N = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow -N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \to (2)$$

L'expression de la force de frottement cinétique est :

$$\left.\begin{aligned} f &= \mu N \\ N &= mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} \end{aligned}\right| \Rightarrow f = \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right)$$

Remplaçons dans l'équation $(1)$ pour obtenir l'équation différentielle du mouvement :

$$mg\sin\theta - \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{R}v^2 = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}$$

2/ **Mouvement sans frottement** :

a/ Revenons à l'équation $(1)$ en supprimant $f$ et en simplifiant par la masse :

$$\frac{dv}{dt} - g\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

On multiplie les deux membres par $d\theta$ , sachant que $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$ :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} dv = g\sin\theta . d\theta \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{R} \end{array}\right| \Rightarrow vdv = gR\sin\theta . d\theta \to (3)$$

Intégrons les deux membres de l'équation $(3)$ sachant que le domaine de variation de $\theta$ est $[0,\theta]$ , celui de $v$ est $[0,v]$ :

$$\int_0^v vdv = gR\int_0^\theta \sin\theta . d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - 0 = -Rg(\cos\theta - \cos 0)$$

On obtient finalement :

$$v^2 = 2Rg(1-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}} \to (4)$$

b/ Recherche de la valeur angulaire $\theta_0$ pour laquelle la particule quitte la surface de la sphère : cela se produit lorsque la force de réaction $\vec{N}$ s'annule.

Revenons à l'équation $(2)$ et calculons $N$ :

$$-N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

On remplace $v^2$ par sa valeur pour aboutir à :

$$N = mg\cos\theta - m\frac{2Rg(1-\cos\theta)}{R} \Rightarrow \boxed{N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

D'où l'angle recherché est :

$$mg(3\cos\theta_0 - 2) = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = 2/3 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 48°}$$

**<u>Discussion</u>** : D'après l'expression obtenue, l'angle $\theta_0$ ne dépend ni de la masse de la particule, ni du rayon de la sphère, ni de l'accélération de pesanteur, *avec pour condition* $v(0)$ *nulle*.

**<u>N.B</u> :** Si $v_0 \neq v(0)$ $v_0$ étant la vitesse avec laquelle la particule quitte la surface de la sphère.

$v(0)$ : La vitesse absolue.

Dans le cas où la vitesse initiale n'est pas nulle, on peut démontrer que :

$$\boxed{\cos\theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{v(0)^2}{3Rg}}$$

Dans ce cas l'angle $\theta_0$ dépend de $v(0)$ , $R$ et $g$ mais reste indépendant de $m$ .

c/ Calcul de la vitesse correspondante :

$$\left.\begin{array}{l} v_0^2 = 2Rg(1-\cos\theta_0) \\ \cos\theta_0 = 2/3 \end{array}\right| \Rightarrow v_0 = \sqrt{2Rg(1-2/3)} \ , \ \boxed{v_0 = 3,65ms^{-1}}$$

3/ Etude du mouvement lorsque la particule quitte la surface de la sphère.

Nous sommes en présence du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre.

a/ On étudie le mouvement dans le repère $MXY$ (figure(b)).

Suivant l'axe des $X$ : le mouvement est rectiligne uniforme :

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_0.\cos\theta_0 \rightarrow (5)$$

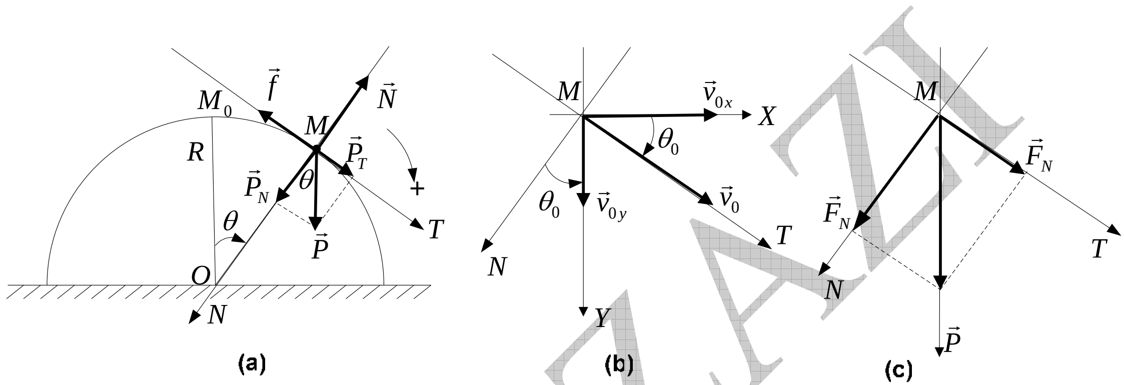
Suivant l'axe des $Y$ : le mouvement est rectiligne uniformément varié :

$$\sum \vec{F}_y = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_y = g = Cte$$

$$v_y = gt + v_0 \sin\theta_0 \rightarrow (6)$$

Passons à l'expression de la vitesse instantanée du projectile :

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v_0^2 = 2Rg(1-\cos\theta_0) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + 2Rg(1-\cos\theta_0)}}$$




L'expression du vecteur vitesse est donc : $\boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta_0.\vec{i} + (gt + v_0 \sin\theta_0)\,\vec{j}}$

b/ Intensités des forces normale et tangentielle : figure (c).

**Force tangentielle**:

$$F_T = m.a_T = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{F_T = \frac{mg(gt + v_0 \sin\theta_0)}{\sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$

**Force normale** : Il n'est pas conseillé d'appliquer la formule $F_N = m\dfrac{v^2}{r}$ car le rayon de courbure est inconnu, à ne pas confondre avec le rayon $R$ de la sphère !!

Cette force est calculée à partir de la relation : $\vec{P} = \vec{F}_N + \vec{F}_T \Rightarrow \boxed{F_N = \sqrt{P^2 - F_T^2}}$

D'où :

$$\boxed{F_N = mg\sqrt{1 - \frac{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + v_0^2 \sin^2\theta_0}{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$

**<u>Exercice 5.11</u> :**

a/ Intensité du champ de pesanteur terrestre quand le satellite est à mi-chemin entre la terre et la lune :

$$\boxed{g_T = G\frac{M_T}{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_T = 6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}}{(1,92.10^8)^2} \Rightarrow \boxed{g_T = 1,08.10^{-2}\,N.kg^{-1}}$$

b/ Intensité du champ de pesanteur lunaire quand le satellite est à mi-chemin entre la terre et la lune :

$$\boxed{g_L = G\frac{M_L}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_L = 6,67.10^{-11}\frac{7,36.10^{22}}{\left(1,92.10^8\right)^2} \Rightarrow \boxed{g_L = 1,33.10^{-4}\,N.kg^{-1}}$$

c/ Intensité du champ résultant des champs de pesanteur de la terre et de la lune lorsque le satellite est à mi-chemin entre la terre et la lune :

$$\boxed{g_R = g_T - g_L} \quad , \quad \boxed{g_R = 1,07.10^{-2}\,N.kg^{-1}}$$

d/ La distance, depuis le centre de la terre, à laquelle le champ résultant s'annule :

$$g_R = 0 \Rightarrow g_L = g_T \quad , \quad G\frac{M_L}{(d-r)^2} = G\frac{M_T}{r^2} \Rightarrow \frac{M_L}{(d-r)^2} = \frac{M_T}{r^2}$$

$$\frac{r^2}{(d-r)^2} = \frac{M_T}{M_L} \Rightarrow \frac{r^2}{(d-r)^2} = 81,25$$

$$\frac{r}{d-r} = 9,01 \Rightarrow r = 3,45.10^8 m \rightarrow \boxed{r = 345000km}$$

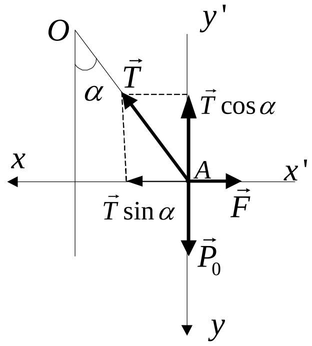
**Exercice 5.12 :**

Nous avons représenté sur la figure ci-dessous les forces agissant sur le point $A$ . En projetant sur les deux axes perpendiculaires entre eux, nous obtenons à l'état d'équilibre :

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = T\cos\alpha \\ P_0 = kl_0 \\ T = kl_1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{l_1 = \frac{l_0}{\cos\alpha}}$$

$$F = T\sin\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} F = kl_2 = T\sin\alpha \\ T = \dfrac{P_0}{\cos\alpha} = \dfrac{kl_0}{\cos\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{kl_0}{\cos\alpha}\sin\alpha = kl_2 \Rightarrow \boxed{l_2 = l_0 tg\alpha}$$




**Exercice 5.13 :**

a/ Force agissant sur le corps :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = 6\left(6\vec{i} - 24t.\vec{j}\right) \quad , \quad \boxed{\vec{F} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j}}$$

b/ Moment de la force par rapport à l'origine :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k}}$$

c/ Quantité de mouvement du corps :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}}$$

Moment cinétique par rapport à l'origine :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36t - 36 & -72t & 18 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}}$$

d/ Vérifions que $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ :

$$\vec{p} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j} = \vec{F}}$$

Vérifions que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$:

$$\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k} = \vec{\tau}}$$

**Exercice 5.14 :**

1/ Exprimons la vitesse de $M$ par rapport à $R$ :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = l\vec{u}_r$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = l\dot{\vec{u}}_r \\ \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

2/ Calculons le moment cinétique du point $M$ par rapport à $O$ dans la base $\left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v}_r + m\vec{v}_\theta \\ \vec{v}_r = l.\dot{\vec{u}}_r = 0\left(l = Cte\right) \\ \vec{v}_\theta = l\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r = l & 0 & 0 \\ 0 & ml\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \;;\; \boxed{\vec{L}_O = ml^2\dot{\theta}.\vec{u}_z}$$

Pour que l'on puisse appliquer le théorème du moment cinétique il faut calculer le moment de la force appliquée au point $M$, par rapport au point $O$ dans la base $\left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\tau}_O = \left(\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{\vec{0}}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \\ \vec{P} = \vec{P}_r + \vec{P}_\theta \\ \vec{P}_r = mg\cos\theta.\vec{u}_r \\ \vec{P}_\theta = -mg\sin\theta.\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & -mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_O = -mgl\sin\theta.\vec{u}_z}$$

**Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique :**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_0 \;;\; ml^2\ddot{\theta}.\vec{u}_z = -mgl\sin\theta.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \rightarrow (1)$$

On calcule le moment cinétique du point $M$ par rapport au point $O$ dans la base $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\\ \vec{p}=m\vec{v}_x+m\vec{v}_y\end{array}\right|\Rightarrow\vec{L}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{L}_O=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

On calcule le moment de la force appliquée au point $M$ par rapport au point $O$ dans la base $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O=\left(\underbrace{\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}}_{0}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right)\\ \vec{P}=\underbrace{\vec{P}_x}_{0}+\vec{P}_y=mg.\vec{j}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{\tau}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ 0 & mg & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{\tau}_O=mgx.\vec{k}}$$

Appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{\tau}_0\ ;\ m\left(\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y}-y\ddot{x}\right)\vec{k}=mgx.\vec{k}\Rightarrow\boxed{x\ddot{y}-y\ddot{x}=gx}\rightarrow(2)$$

Vérifions que les deux résultats sont identiques :

$$x=l\sin\theta\ ;\ \dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta\ ;\ \ddot{x}=l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta$$

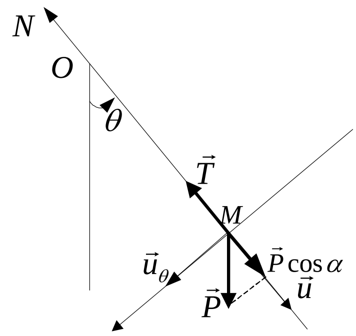
$$y=l\cos\theta\ ;\ \dot{y}=-l\dot{\theta}\sin\theta\ ;\ \ddot{y}=-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta$$

Remplaçons les cinq éléments dans l'équation $(2)$ pour trouver l'équation $(1)$ :

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}\rightarrow(3)$$

**Appliquons maintenant la relation fondamentale de la dynamique :**

La masse $m$ est soumise à chaque instant à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ du fil ; Soit $\vec{F}$ leur résultante. Nous pouvons décomposer la résultante en deux composantes, normale et tangentielle (voir figure).




$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}\\ \vec{F}=\vec{F}_T+\vec{F}_N=m\vec{a}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{P}+\vec{T}=\vec{F}_T+\vec{F}_N$$

On connaît la relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire ainsi que la relation entre l'accélération linéaire et l'accélération angulaire :

$$v=\dot{\theta}l\ ,\ a_T=\frac{dv}{dt}=\ddot{\theta}l\ ,\ a_N=\frac{v^2}{l}=\dot{\theta}^2l$$

Puisqu'on est dans le cas d'un mouvement de rotation de la masse $m$, il nous est permis d'introduire le moment de la force par rapport à l'axe $OZ$. Les moments des forces $\vec{F}_N$ et $\vec{T}$ sont nuls parce que ces forces rencontrent l'axe de rotation. Le moment du poids est un moment de rappel, donc négatif.

$$\left.\begin{array}{l}\tau=\tau_{\vec{P}}+\tau_{\vec{T}}=\tau_{\vec{F}_T}+\tau_{\vec{F}_N}\\ \tau_{\vec{T}}=\tau_{\vec{F}_N}=0\\ \tau_{\vec{P}}=-P.l\sin\theta\\ \tau_{\vec{F}_T}=F_T.l=m\ddot{\theta}l^2\end{array}\right|\Rightarrow-mgl\sin\theta=m\ddot{\theta}l^2$$

De tout cela on déduit l'équation de mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}\rightarrow(4)$$

**Les équations $(1)$ et $(4)$ obtenues sont parfaitement identiques.**

3/ A chaque instant, nous avons $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$. En projetant sur l'axe normal, nous obtenons :

$$-mg\cos\theta+T=ma_N\Rightarrow T=mg\cos\theta+m\dot{\theta}^2 l$$

Remarquons que la tension varie à chaque instant. Pour des oscillations de très faible amplitude$(\sin\theta\approx\theta)$, l'équation différentielle $(1)$ s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

Sa solution est :

$$\theta=\theta_0\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Donc, la vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta}=\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Lors du passage du pendule par la position d'équilibre, l'angle $\theta$ s'annule :

$$\theta=0\Rightarrow\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t=0\Rightarrow\sqrt{\frac{g}{l}}t=0\pm k\pi$$

A ce moment la vitesse est maximale :

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\theta}=\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos(0\pm k\pi)\\ \cos(0\pm k\pi)=\pm1\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{|\dot{\theta}|=\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Il en est de même pour la tension qui prend la valeur :

$$\boxed{T=m\left(g+\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\right)}$$

C'est cette condition sur la tension qui doit être satisfaite pour que le fil ne casse pas, en d'autres termes le fil doit supporter au moins cette tension sans se rompre.

**Exercice 5.15 :**

Le moment cinétique du système est égal à la somme des moments cinétiques de tous les composants partiels du système. Dans notre cas, le moment cinétique du système par rapport au point $O$ est égal au moment$\left(\vec{L}_{O/G}\right)$ du point $G$ (qui est le centre d'inertie des deux masses) par rapport à $O$, plus les moments des points $A$ $\left(\vec{L}_{A/G}\right)$ et $B$ $\left(\vec{L}_{B/G}\right)$ par rapport à $G$.

$$\vec{L}_O=\vec{L}_{G/O}+\vec{L}_{A/G}+\vec{L}_{B/G}$$

Commençons par le calcul de$\left(\vec{L}_{O/G}\right)$ :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_{G/O}=\overrightarrow{OG}\wedge\vec{p}_{G/O}\\ \vec{p}_{G/O}=2m\vec{v}_{G/O}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{L}_{G/O}=2m\left(\overrightarrow{OG}\wedge\vec{v}_{G/O}\right)$$

$$\vec{L}_{G/O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_G = a\cos\theta_1 & y_G = a\sin\theta_1 & 0 \\ \dot{x}_G = -a\dot{\theta}_1\sin\theta_1 & \dot{y}_G = a\dot{\theta}_1\cos\theta_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(x_G\dot{y}_G - \dot{x}_G y_G\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{G/O} = 2ma^2\dot{\theta}_1^2} \rightarrow (1)$$

Calculons ensuite $\left(\vec{L}_{A/G} = \vec{L}_{B/G}\right)$ :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_{A/G} = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{p}_{A/G} \\ \vec{p}_{A/G} = m\vec{v}_{A/G} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_{A/G} = m\left(\overrightarrow{GA} \wedge \vec{v}_{A/G}\right)$$

$$\vec{L}_{O/G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x'_A = d\cos\theta_2 & y'_A = d\sin\theta_2 & 0 \\ \dot{x}'_A = -d\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & \dot{y}'_A = d\dot{\theta}_2\cos\theta_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(x'_A\dot{y}'_A - \dot{x}'_A y'_A\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{A/G} = md^2\dot{\theta}_2^2 = \vec{L}_{B/G}} \rightarrow (2)$$

Il ne nous reste qu'à additionner les expressions $(1)$ et $(2)$ pour trouver la réponse à la question :

$$\vec{L}_O = 2ma^2\dot{\theta}_1^2 + 2md^2\dot{\theta}_2^2 \quad , \quad \boxed{\vec{L}_O = 2m\left(a^2\dot{\theta}_1^2 + d^2\dot{\theta}_2^2\right)}$$

**Exercice 5.16 :**

1/ Le point $M$ , soumis à chaque instant à son poids et à la tension du fil, est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon , dans le plan $OXY$ ,autour de l'axe $AZ$ . Des projections des deux forces sur l'axe radial résulte une force centripète $T\sin\alpha$ .

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} T\sin\alpha = ma_N = m\omega^2 r \\ r = l\sin\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{T = m\omega^2 l}$$

Quant à l'angle il est déterminé à l'aide de la figure ci-dessous, nous trouvons :

$$tg\alpha = \frac{T\sin\alpha}{mg} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{mg}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}}$$

2/ Calcul de l'expression du moment cinétique de $M$ par rapport à $A$ en coordonnées cylindriques de centre $O$ :

$$\vec{L}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{AM} = -l\cos\alpha.\vec{u}_z + l\sin\alpha.\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \underbrace{-\dot{z}\vec{u}_z + z\dot{\vec{u}}_z + \dot{r}\vec{u}_r}_{\vec{0}} + r\dot{\vec{u}}_r = r\omega\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\theta = l\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{p} = ml\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{L}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha \\ 0 & ml\omega\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)}$$

Vérifions que la dérivée par rapport au temps est égale au moment de la résultante des forces appliquées sur $A$, par rapport à $M$ :

Calculons en premier lieu le moment des forces par rapport au point $A$ : $\vec{\tau}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$

Le vecteur $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

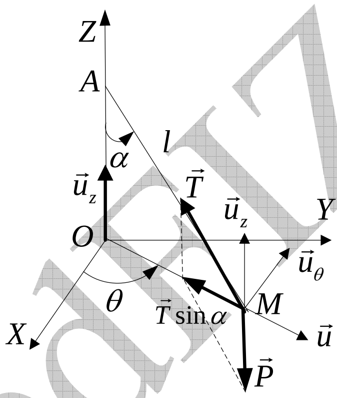
$$\vec{F} = T\sin\alpha = ma_N = m\omega^2 r$$

$$\boxed{\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}_r}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ :

$$\overrightarrow{AM} = -z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}$$




Donc :

$$\vec{\tau}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha \\ m\omega^2 l\sin\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{M/A} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\vec{u}_\theta} \rightarrow (1)$$

Dérivons le moment cinétique par rapport au temps :

$$\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\dot{\vec{u}}_r + 0\right)$$

Nous savons que $\dot{\vec{u}}_r = \omega.\vec{u}_r$ , et par remplacement on obtient :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\cos\alpha.\vec{u}_\theta} \rightarrow (2)$$

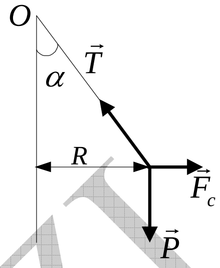
Ainsi nous avons pu vérifier le théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = \vec{\tau}_{M/A}}$$

**Exercice 5.17 :**

1/ Le train en abordant un virage circulaire, son mouvement devient circulaire vers la gauche, car la force centrifuge attire le pendule vers la droite.

2/ Sur la figure ci contre sont représentées les forces qui agissent sur le pendule par rapport au voyageur. De l'équilibre de ces forces résulte :




$$\vec{P}+\vec{F}_c+\vec{T}=\vec{0} \Rightarrow \vec{P}+\vec{F}_c=-\vec{T}$$

$$tg\alpha=\frac{F_c}{P} \Rightarrow tg\alpha=\frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} \Rightarrow \boxed{R=\frac{v^2}{g.tg\alpha}}$$

Application numérique :

$$R=\frac{\left(\frac{120.10^3}{3600}\right)^2}{9.8\times 0,176} \Rightarrow \boxed{R=631N}$$

3/ Le train parcourt en trente secondes un arc de cercle qui intercepte l'angle demandé.

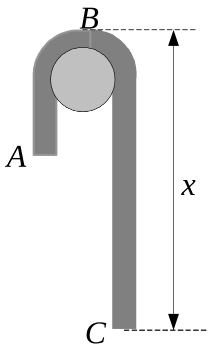
La distance parcourue en $30s$ est: $d=vt$ , $d=1000m$

Cela veut dire que le train a tourné de l'angle :

$$d=R\theta \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{d}{R}} \ , \ \theta\approx 1,59rad \ , \ \boxed{\theta\approx 91°}$$

**Exercice 5.18 :**

A l'instant $t$, soit $\vec{P}_1$ le poids de la partie $BC$ et $\vec{P}_2$ le poids de la partie $AB$ :




Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au système :

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=\left(\underbrace{M_1+M_2}_{M}\right)\vec{a}$$

On projette l'expression vectorielle sur l'axe vertical dirigé vers le bas et on note par $x$ la longueur de la partie $BC$ du câble :

$$\left.\begin{array}{l} P_1-P_2=Ma \\ M=\lambda L \\ P_1=M_1g=\lambda xg \\ P_2=M_2g=\lambda\left(L-x\right)g \end{array}\right| \Rightarrow \lambda xg-\lambda\left(L-x\right)g=\lambda L\frac{dv}{dt}$$

En simplifions par $\lambda$ nous obtenons une équation différentielle de deuxième ordre avec second membre :

$$\left.\begin{array}{l} 2gx-gL=L\dfrac{dv}{dt} \\ a=\dfrac{dv}{dt}=\ddot{x} \end{array}\right| \Rightarrow L\ddot{x}=2gx-gL \Rightarrow \boxed{\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g}$$

Pour vérifier que $x=\frac{2}{3}L \rightarrow a=\frac{g}{3}$, on remplace dans l'équation différentielle $x$ par la valeur proposée, soit :

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x}-\dfrac{2g}{L}x=-g\\ x=\dfrac{2}{3}L\end{array}\right|\Rightarrow \ddot{x}=a=\frac{4g}{3}-g\Rightarrow \boxed{a=\frac{g}{3}}$$

Cherchons à présent le résultat relatif à la vitesse. L'équation caractéristique de cette équation différentielle de deuxième ordre sans le second membre est : $r^2-\dfrac{2g}{L}=0$

Ses deux racines sont : $r_1=+\sqrt{\dfrac{2g}{L}}\quad ;\quad r_1=-\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$

Sa solution est donc : $\boxed{x=Ae^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+Be^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+\dfrac{L}{2}}\rightarrow(1)$

Reste à déterminer les deux constantes $A$ et $B$. C'est ce qu'on en déduit des conditions initiales et qui sont : $t=0\left|\begin{array}{l}x=b\\ v=\dot{x}=0\end{array}\right.$

L'expression de la vitesse est : $\boxed{v=\dot{x}=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}}\rightarrow(2)$

Remplaçons par les conditions initiales dans les deux équations $(1)$ et $(2)$ pour tirer $A$ et $B$ :

$$\left.\begin{array}{l}b=A+B+\dfrac{L}{2}\\ 0=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}}\Rightarrow A=B\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{A=B=\frac{b}{2}-\frac{L}{4}}$$

Afin de simplifier les calculs, on pose $\omega=\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$. On doit connaître en trigonométrie les définitions et les formules particulières du sinus hyperbolique $(sh)$ et du cosinus hyperbolique $(ch)$, en particulier :

$$sh\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\quad ;\quad ch\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\quad ;\quad ch^2\omega t-sh^2\omega t=1$$

Ecrivons les deux équations $(1)$ et $(2)$ sous la forme :

$$x=2.\frac{2b-L}{4}\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)+\frac{L}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2b-L}{2}ch\omega t+\frac{L}{2}\rightarrow(3)$$

$$v=\dot{x}=2.\frac{2b-L}{4}\omega\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)\Leftrightarrow v=\dot{x}=\frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t\rightarrow(4)$$

Puisque $x=\dfrac{2}{3}L$, remplaçons dans l'équation $(3)$ et tirons de l'équation l'expression du cosinus hyperbolique $(3)$ :

$$\frac{2}{3}L=2\frac{2b-L}{4}ch\omega t+\frac{L}{2}\Rightarrow \boxed{ch\omega t=\frac{L}{6b-3L}}\rightarrow(5)$$

De l'équation $(4)$ on tire le sinus hyperbolique :

$$v = \dot{x} = \frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t \Rightarrow \boxed{sh\omega t = \frac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}} \rightarrow (6)$$

Nous savons que $ch^2\omega t - sh^2\omega t = 1$ . Sommons les équations $(5)$ et $(6)$ membre à membre après les avoir élevées au carré :

$$\left.\begin{array}{l} ch^2\omega t = \left(\dfrac{L}{6b-3L}\right)^2 \\ sh^2\omega t = \left(\dfrac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}\right)^2 \\ ch^2\omega t - sh^2\omega t = 1 \end{array}\right| \Rightarrow v^2 = \omega^2\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)$$

Revenons en arrière et remplaçons $\omega$ par sa valeur pour obtenir à la fin la valeur que nous devons vérifier :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}}$$

Application numérique : $L = 12m$ et $b = 7m$

$$\boxed{v \approx 10,6ms^{-1}}$$

**<u>Autre méthode</u> :** beaucoup plus simple !!

A partir de l'équation $\ddot{x} - \frac{2g}{L}x = -g$ , et par une intégration on trouve la fonction $v = f\left(x\right)$ :

$$\ddot{x} - \frac{2g}{L}x = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{2g}{L}x - g \Rightarrow \frac{dv}{dt}dx = \left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\frac{dx}{dt}dv = \left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx \Rightarrow v.dv = \left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\int_0^v v.dv = \int_b^x\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{g}{L}x^2 - gx \Rightarrow \boxed{v^2 = 2\frac{g}{L}x^2 - 2gx - 2\frac{g}{L}b^2 + 2gb}$$

Il ne reste plus qu'à retrouver le résultat précédent en remplaçant $x$ par $\frac{2}{3}L$ . A la fin on retrouve le même résultat :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}}$$

**<u>Exercice 5.19</u> :**

1/ Quelque soit la position du point $M$ sur la surface conique, l'angle à chaque instant est $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Oz}\right) = \alpha$ , et par conséquent $\tan\alpha = \frac{r}{z} = \frac{r_0}{z_0} \Rightarrow \boxed{z = r\frac{r_0}{z_0}}$

2/ D'après le cours, nous savons que l'accélération du point $M$ en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{a} = \left(\underbrace{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}_{a_r}\right)\vec{u}_r + \left(\underbrace{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}_{a_\theta}\right)\vec{u}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{u}$$

Si le point reste sur la surface du cône : $\ddot{z} = \ddot{r}\dfrac{r_0}{z_0}$. Les forces agissant sur le point matériel sont son poids $\vec{P}$, à composante unique $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, et la force de réaction $\vec{R}$ de la surface qui a deux composantes $\vec{R} = \vec{R}_r + \vec{R}_z = -R\cos\alpha.\vec{u}_r + R\sin\alpha.\vec{u}_z$.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique, puis projetons les deux forces sur les trois axes du repère cylindrique. Nous obtenons :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} = \vec{F}$$

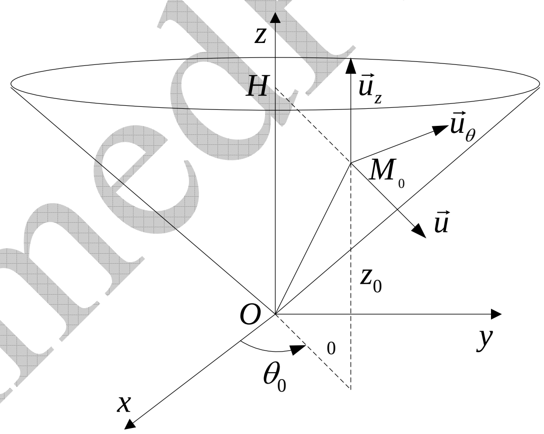
$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta + \vec{F}_z = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + m\ddot{z}\vec{u}_z \rightarrow (1)$$

$$\vec{F} = -R\cos\alpha.\vec{u}_r + R\sin\alpha.\vec{u}_z - mg\vec{u}_z$$

$$\vec{F} = -R\cos\alpha.\vec{u}_r + \left(R\sin\alpha - mg\right)\vec{u}_z \rightarrow (2)$$

Par identification des deux équations $(1)$ et $(2)$ on obtient trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} -R\cos\alpha = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \rightarrow (3) \\ 0 = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \rightarrow (4) \\ -mg + R\sin\alpha = m\dfrac{z_0}{r_0}\ddot{r} \rightarrow (5) \end{cases}$$




3/ De l'équation $(4)$ on en déduit l'équation $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$, qui est la dérivée de la quantité $r^2\dot{\theta}$ par rapport au temps. Ceci nous conduit à $r^2\theta = C^{te}$ :

$$\left(r^2\dot{\theta}\right)' = 2\dot{r}r.\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = C^{te}$$

Nous connaissons l'expression de la vitesse linéaire en coordonnées cylindriques à partir de laquelle nous déduisons la vitesse initiale :

$$v(t) = \dot{r}(t)\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\vec{u}_r \Rightarrow v(0) = \dot{r}(0)\vec{u}_r + r(0)\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta + \dot{z}(0)\vec{u}_r$$

L'intensité de la vitesse initiale est donc:

$$v(0) = \sqrt{\left[\dot{r}(0)\right]^2 + \left[r(0)\dot{\theta}(0)\right]^2 + \left[\dot{z}(0)\right]^2}$$

L'énoncé nous impose l'expression de $\dot{\theta}$ sans $\dot{r}(0)$ ni $\dot{z}(0)$ . Ceci n'est possible que sous des conditions initiales de la forme $\dot{r}(0)=\dot{z}(0)=0$ . C'est ce que nous admettons dans le reste de l'exercice. Partant de là, la vitesse initiale est :

$$v(0)=r(0)\dot{\theta}(0)$$

Suite à tout cela, nous pouvons poursuivre notre étude tel que :

$$r^2\dot{\theta}=C^{te}\Rightarrow r(t)^2\,\dot{\theta}(t)=r(0)^2\,\dot{\theta}(0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\theta}(t)=\dfrac{r(0).r(0).\dot{\theta}(0)}{r(t)^2}\\ v(0)=r(0).\dot{\theta}(0)\\ v(0)=v_0\ \ ,\ \ r(0)=r_0\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\dot{\theta}=\frac{r_0v_0}{r^2}}$$

4/ L'équation $(5)$ fait l'objet de cette question car elle renferme une fonction unique $r(t)$ , contrairement aux équations $(3)$ et $(4)$ qui sont fonctions de $r(t)$ et $\theta(t)$ en même temps. De l'équation $(3)$ nous pouvons écrire :

$$R=\frac{1}{\sin\alpha}\left[mg+m\frac{z_0}{r_0}\ddot{r}\right]$$

Remplaçons $R$ par cette dernière expression dans l'équation $(3)$ pour obtenir :

$$\ddot{r}-\underbrace{\frac{v_0^2r_0^4}{r_0^2+z_0^2}}_{A(r_0,v_0,z_0)}.\frac{1}{r^3}=-\underbrace{\frac{z_0r_0}{r_0^2+z_0^2}g}_{A(r_0,z_0,g)}\rightarrow(6)$$

5/ Si le mouvement est circulaire uniforme cela veut dire qu'à chaque instant $r(t)=r(0)$ , en même temps que $\left(\dot{\theta}(t)=C^{te}\right)$. L'expression $(4)$ devient :

$$\frac{v_1^2r_0^4}{r_0^2+z_0^2}.\frac{1}{r_0^3}=\frac{z_0r_0}{r_0^2+z_0^2}g\Rightarrow\frac{v_1^2}{r_0^2+z_0^2}=\frac{z_0}{r_0^2+z_0^2}g$$

La vitesse demandée est donc : $\boxed{v_1=\sqrt{2gz_0}}$

6/ Multiplions l'équation $(6)$ par $2\dot{r}$ pour obtenir : $2\dot{r}\ddot{r}+A\dfrac{2\dot{r}}{r^3}=2B\dot{r}$

La première intégration donne : $\int 2\dot{r}\ddot{r}d\dot{r}+\int A\dfrac{2\dot{r}}{r^3}d\dot{r}=\int 2B\dot{r}d\dot{r}\Rightarrow\dot{r}^2-\dfrac{A}{r^2}=2Br+C\rightarrow(7)$

Pour obtenir la constante $C$ on doit revenir aux conditions initiales citées plus haut $\left[t=0,\dot{r}(0)=0\right]$ :

$$0-\frac{A}{r^2}=2Br+C\Rightarrow\boxed{C=-\frac{A}{r^2}-2Br}$$

L'équation $(7)$ devient finalement :

$$\boxed{\dot{r}^2=2A\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)+2B(r-r_0)}$$

**Exercice 5.20 :**

Nous utilisons la notation de Newton pour exprimer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération :

$$\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Calculons l'expression de la force :

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B\dot{z} \\ -B\dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = q\left(E\vec{k} + 0\vec{i} + B\dot{z}\vec{j} - B\dot{y}\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = q\left[0\vec{i} + B\dot{z}\vec{j} + \left(E - B\dot{y}\right)\vec{k}\right]} \rightarrow (1)$$

En appliquons la relation fondamentale de la dynamique on peut écrire :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\ddot{x} + m\ddot{y} + m\ddot{z}} \rightarrow (2)$$

L'identification des deux équations $(1)$ et $(2)$ nous donne trois équations différentielles :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = -q\left(E + B\dot{y}\right) \end{cases}$$

En tenant compte des conditions initiales :

$t = 0$:

$x(0) = 0 \text{ , } y(0) = 0 \text{ , } z(0) = 0 \text{ , } \dot{x}(0) = 0 \text{ , } \dot{y}(0) = 0 \text{ , } \dot{z}(0) = 0$

Nous écrivons le nouveau système de trois équations différentielles :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C^{te} = \dot{x}(0) = 0 \rightarrow (3) \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \Rightarrow \ddot{y} = \dfrac{q}{m}B\dot{z} \Rightarrow \dot{y} = \dfrac{q}{m}Bz \rightarrow (4) \\ m\ddot{z} = q\left(E - B\dot{y}\right) \Rightarrow \ddot{z} = \dfrac{q}{m}E - \dfrac{q}{m}B\dot{y} \rightarrow (5) \end{cases}$$

Dans l'équation différentielle $(5)$ on remplace $\dot{y}$ par sa valeur tirée de l'équation $(4)$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \rightarrow (6) \\ \dot{y} = \omega z \rightarrow (7) \\ \ddot{z} + \left(B\dfrac{q}{m}\right)^2 z = \dfrac{q}{m}E \rightarrow (8) \end{cases}$$

En posant $\omega = B\dfrac{q}{m}$, la solution de l'équation $(8)$ est :

$$z = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \frac{qE}{m}\left(\frac{m}{qB}\right)^2$$

$$\boxed{z = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \frac{mE}{qB^2}} \rightarrow (9)$$

Déterminons $\alpha$ et $\beta$ à partir des conditions initiales en utilisant les deux équations :

$$z = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \frac{mE}{qB^2}$$

$$\dot{z} = \alpha\omega \cos \omega t - \beta\omega \sin \omega t$$

$$t = 0 \ , \ z(0) = 0 \ , \ \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ , \ \beta = -\frac{mE}{qB^2}$$

Nous obtenons à la fin l'expression $z(t)$ :

$$z(t) = -\frac{mE}{qB^2}\cos \omega t + \frac{mE}{qB^2} \Rightarrow z(t) = \underbrace{\frac{mE}{qB^2}}_{a}\Big(1 - \cos \underbrace{\omega t}_{\theta}\Big)$$

$$\boxed{z(t) = a(1 - \cos\theta)}$$

Il nous reste à définir l'équation $y(t)$. Dans l'équation $(7)$ on remplace $z$ , puis on intègre pour arriver à l'expression $y(t)$ :

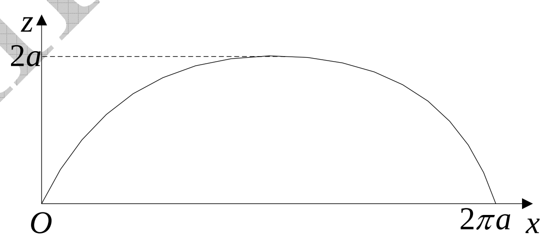
$$\dot{y} = \omega a(1 - \cos\theta) \Rightarrow \dot{y} = \omega a - \omega a \cos \underbrace{\omega t}_{\theta}$$

$$y(t) = a(\omega t - \sin \omega t) \Rightarrow \boxed{y(t) = a(\theta - \sin\theta)}$$

Finalement :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a(\theta - \sin\theta) \\ z(t) = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Se sont là les équations paramétriques caractéristiques d'une cycloïde.



# VI/TRAVAIL ET ENERGIE
# الـــعـــمـــل و الـــطـــاقـــة

## 1/ TRAVAIL ET PUISSANCE (العمل و الاستطاعة) :

❖ **La puissance :**

➢ **Définition : Soit $M$ un point matériel de vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel $R$. La puissance de la force $\vec{F}$ à laquelle est soumise $M$ est définie à chaque instant par la relation 6.1 :**

$$\begin{array}{r|l} watt(W) \leftarrow P & \\ N \leftarrow F & \boxed{P = \vec{F}.\vec{v}} \\ m.s^{-1} \leftarrow v & \end{array} \qquad \textbf{(6.1)}$$

❖ **Le travail :**

➢ **Définition : le travail de la force $\vec{F}$ entre l'instant $t$ , quand le point matériel $M$ est en $M$ de position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, et l'instant $t + dt$ quand M est en $M'$ de position $\overrightarrow{OM'} = \vec{r} + d\vec{r}$, est la grandeur exprimée en joule :**

$$\boxed{dW = P.dt} \qquad \textbf{(6.2)}$$

D'après la définition de la vitesse, on a : $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = \vec{v}.dt$

Ainsi on en déduit l'expression du travail de la force $\vec{F}$ pour un déplacement élémentaire $d^{\rightarrow}$ :

$$\boxed{dW = \vec{F}.d\vec{r}} \qquad \textbf{(6.3)}$$

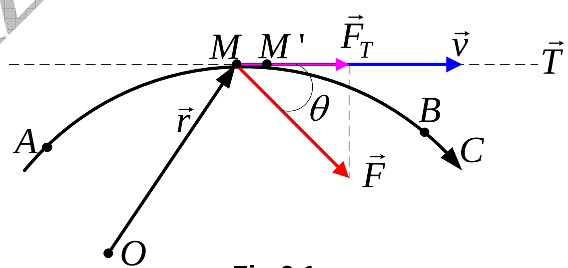



**Fig 6.1**

Remarquons que le travail est un produit scalaire du vecteur force et du vecteur déplacement.

$$\boxed{dW = \left\|\vec{F}\right\|.\left\|d\vec{r}\right\|.\cos\theta} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Notons que $F.\cos\theta = F_T$ . Si on pose $\left\|d\vec{r}\right\| = ds$ , on obtient alors une nouvelle expression du travail qui est :

$$\boxed{dW = F_T.ds} \quad \textbf{(6.5)}$$

Cela veut dire que le travail est égal au produit de déplacement élémentaire par la composante de la force suivant la direction du déplacement.

Pour un déplacement total de $A$ (à l'instant $t_A$) à $B$ (à l'instant $t_B$) tout au long de la courbe $C$ , on obtient l'expression :

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F_T.ds} \quad \textbf{(6.6)}$$

- Dans le cas particulier où la force $\vec{F}$ est constante en module et en sens, et le corps se déplaçant suivant une trajectoire rectiligne, le travail de cette force est :

$$F = F_T \Rightarrow W = \int_A^B F.ds = F\int_A^B ds \Leftrightarrow \boxed{W = F.s} \quad \textbf{(6.7)}$$

- La force qui ne travail pas est la force perpendiculaire au déplacement ($\theta = \pi/2$).

**__Par exemple__** : Le corps représenté sur la figure 6.2 est soumis à quatre forces constantes, et se déplace sur un plan horizontal.

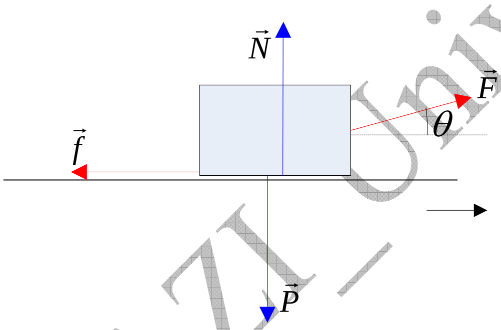


Fig 6.2

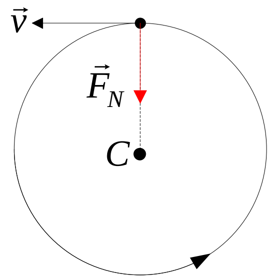


Fig 6.3

Soit $s$ le déplacement du corps, et donc de chacune des forces :

Le travail de la force $\vec{F}$ : $W_{\vec{F}} = F.s.\cos\theta$

Le travail de la force résistante $\vec{f}$ : $W_{\vec{f}} = -f.s$

Le travail du poids $\vec{P}$ : $W_{\vec{P}} = 0$

Le travail de la force normale $\vec{N}$ : $W_{\vec{N}} = 0$

Dans le mouvement circulaire, le travail de la force normale est nul (figure 6.3).

- Si $F_x, F_y, F_z$ sont les composantes rectangulaires de la force $\vec{F}$, et $dx, dy, dz$ les composantes rectangulaires du vecteur de déplacement élémentaire $d\vec{r}$ , alors :

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)} \quad \textbf{(6.8)}$$

- Cas de plusieurs forces : Si le corps est soumis à plusieurs forces $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3........\vec{F}_n$, dont la résultante est $\vec{F}_R$, le travail effectué par ces forces est égal au travail de la résultante :

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 + ............. + dW_n$$

$$dW = \vec{F}_1.d\vec{r} + \vec{F}_2.d\vec{r} + \vec{F}_3.d\vec{r} + .......... + \vec{F}_n.d\vec{r} \qquad \textbf{(6.9)}$$

$$\boxed{dW = \vec{F}_R.d\vec{r}}$$

**Exemple 6.1 :**

Calculer le travail nécessaire pour allonger un ressort suspendu verticalement, comme indiqué sur la figure (6.4), de $3cm$ sans aucune accélération, sachant que la constante de raideur est $k = 50N.m^{-1}$.

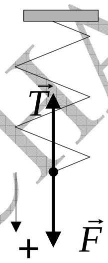


Fig 6.4

**Réponse :**

$$F = kx \rightarrow dW = \int_0^x kx.dx \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}k.x^2}$$

$$W = 2.25.10^{-2}\,J$$

**Exemple 6.2 :**

Une force $F = 2t(N)$ agit sur une particule de masse $m = 2kg$ . Calculer le travail effectué par cette force durant la première seconde, sachant que la particule était initialement au repos.

**Réponse :**

Partant de l'expression du travail : $W = \int F.dx$

Dans ce cas la force est une fonction du temps et non du déplacement. Il est indispensable d'exprimer le déplacement en fonction du temps. Calculons d'abord la vitesse en fonction du temps :

$$\vec{F}=m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} = 2t \Rightarrow v = \int_0^1 2.\frac{t}{m}.dt \Rightarrow v = \frac{1}{2}t^2 \ (m.s^{-1})$$

Exprimons le déplacement en fonction du temps :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^2dt$$

Revenons à l'expression du travail et remplaçons $dx$ par l'expression à laquelle nous sommes parvenue :

$$W = \int_0^x F.dx = \int_0^1 2t.\frac{1}{2}t^2dt \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{4}t^4} \qquad \boxed{W=0.25J}$$

**Exemple 6.3 :**

Une particule est soumise à la force $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ . Calculer le travail effectué par la force $\vec{F}$ quand la particule se déplace du point $(0,0)$ au point $(2,0)$ suivant une droite.

**Réponse :**

D'après les données nous voyons que la particule se déplace parallèlement à l'axe $OX$ , et par conséquent $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ .

De là on peut calculer facilement le travail effectué :

$$W = \int (F_x.dx + F_y.dy) = \int (2x.0.dx + x^2.0) \Rightarrow \boxed{W = 0}$$

Ceci était prévisible puisque la force est perpendiculaire au vecteur déplacement :

$$\left. \begin{array}{l} F = x^2.\vec{j} \\ d\vec{r} = dx.\vec{i} \end{array} \right| \Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow W = 0$$

## 2/ ENERGIE CINETIQUE(الطاقة الحركية)

Nous avons vu que $dW = F_T ds$ . Partant de cette expression on peut déduire ce qui suit :

$$dW = F_T.ds = m\frac{dv}{dt}ds \Rightarrow dW = m\frac{ds}{dt}dv \Rightarrow \boxed{dW = mvdv} \qquad \textbf{(6.10)}$$

Intégrons l'expression 6.10 du travail élémentaire, et tirons la définition de l'énergie cinétique :

$$W = m\int_A^B vdv \Rightarrow \boxed{W = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2} \qquad \textbf{(6.11)}$$

Où $v_a$ est la vitesse du mobile au point $A$ et $v_B$ sa vitesse au point $B$ .

- **Définition : L'énergie cinétique d'un point matériel de masse $m$ , de vitesse instantanée $\vec{v}$ est l'expression :**

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}mv^2} \qquad \textbf{(6.12)}$$

Et puisque $p = mv$ , on peut écrire aussi :

$$\boxed{E_c = \frac{p^2}{2m}} \qquad \textbf{(6.13)}$$

- **Théorème de l'énergie cinétique(نظرية الطاقة الحركية) :**

Enoncé **: « La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la résultante de toutes les forces qui lui sont appliquées entre ces deux instants »**

$$\boxed{W = \Delta E_c \Leftrightarrow \sum_i W_i = \Delta E_c} \qquad \textbf{(6.14)}$$

**Exemple 6.4 :**

Quelle est la vitesse initiale $v_0$ orientée verticalement vers le haut, communiquée à un corps pour qu'il atteigne une hauteur $h$ en dessus de la surface de la terre ? (On néglige tous les frottements).

**Réponse :**

La seule force qui agit sur le corps est son poids $\vec{P}$ :

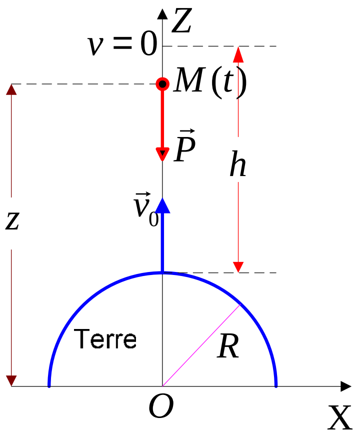



**Fig 6.5**

A la surface de la terre $\quad P_0 = m.g_0 = G\dfrac{mM_T}{R^2}$

A la distance $z$ du centre de la terre $P = mg = G\dfrac{mM_T}{z^2}$

En divisant les équations membre à membre on obtient

$$\frac{P}{P_0} = \frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{z^2} \Rightarrow g = g_0\frac{R^2}{z^2} \quad ; \vec{g} = -g.\vec{k}$$

On applique le théorème de l'énergie cinétique : $W = \Delta E_c$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2} = \int_R^{R+h} \vec{P}.d\vec{z} = \int_R^{R+h} m\vec{g}.d\vec{z}$$

Le corps atteint sa hauteur maximale quand $v=0$, d'où :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2} = m\int_R^{R+h} -g_0\frac{R^2}{z^2}.dz = -g_0.R^2\left[-\frac{1}{z}\right]_R^{R+h}$$

$$v_0 = g_0.R^2\left[-\frac{1}{z}\right]_R^{R+h} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2g_0R.h}{R+h}}}$$

## 3/ LES FORCES CONSERVATIVES OU DERIVANT D'UN POTENTIEL

(القوى المحافظة أو القوى المشتقة من كمون)

- **Définition** : On dit d'une force qu'elle est conservative (ou conservatrice), ou dérivant d'un potentiel, si son travail est indépendant du chemin suivi, quelque soit le déplacement probable entre le point de départ et le point d'arrivée.
  - Si la trajectoire $C$ est fermée, alors :

$$\forall C \;, \quad \boxed{W = \oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow W = 0} \qquad \textbf{(6.15)}$$

**Exemple du poids :** Dans un système de coordonnées cartésiennes, où $OZ$ est la verticale orientée vers le haut, on a :

$$\vec{P} = \vec{F} = -mg\vec{k} \qquad \textbf{(6.16)}$$

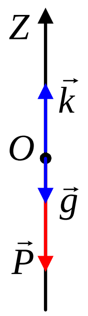



**Fig 6.6**

En utilisant l'expression du déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes,

on écrit : $d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$

On peut en déduire : $\quad dW = \vec{F}.d\vec{r} = -mgdz$. En intégrant cette dernière expression, on se rend compte que le travail pour un déplacement entre deux points $A$ et $B$ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de leurs altitudes :

$$W = -\int_{z_1}^{z_2} mgdz \Rightarrow W = -mg(z_2 - z_1) \Rightarrow \boxed{W = mg(z_1 - z_2)}$$

Si les deux points sont situés dans le même plan, le travail effectué par le poids est nul, ce qui prouve que le poids est une force conservative. $z_1 = z_2 \Rightarrow W = 0$

**Exemple 6.5 :**

La force $\vec{F} = (x^2 - y^2).\vec{i} + 3xy.\vec{j}$ peut aller du point $A(0,0)$ au point $B(2,4)$ suivant chacun des deux chemins $y = 2x$ et $y = x^2$ . Cette force est-elle conservatrice ?

**Réponse :**

Suivant le premier chemin $y = 2x$ :

$$y = 2x \Rightarrow \vec{F} = -3x^2.\vec{i} + 6x^2.\vec{j}$$

$$dy = 2dx \; ; \; d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} \Rightarrow d\vec{r} = dx.\vec{i} + 2dx.\vec{j}$$

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F_x.dx + F_y.dy) = \int (-3x^2.dx + 12x^2)dx$$

$$W = \int_0^2 9x^2 dx = 3x^3\Big|_0^2 ; \quad \boxed{W = 24J}$$

Suivant le deuxième chemin $y = x^2$ :

$$y = x^2 \Rightarrow \vec{F} = (x^2 - x^4).\vec{i} + 3x^3.\vec{j}$$

$$dy = 2xdx \; ; \; d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} \Rightarrow d\vec{r} = dx.\vec{i} + 2xdx.\vec{j}$$

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F_x.dx + F_y).dy = \int \left[(x^2 - x^4)dx + 6x^4 dx\right]$$

$$W = \int_0^2 (x^2 + 5x^4)dx = x^5 + \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 \Rightarrow \boxed{W = 34.6J}$$

Les deux travaux ne sont pas égaux, donc la force dans ce cas n'est pas conservatrice.

## 4/ ENERGIE POTENTIELLE (الطاقة الكامنة)

- Définition : L'énergie potentielle est une fonction de coordonnées, telle que l'intégration entre ses deux valeurs prises au départ et à l'arrivée soit égale au travail fourni à la particule pour la déplacer de sa position initiale à sa position finale.
- Si la force $\vec{F}$ est une force dérivant d'un potentiel, alors :

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = E_{p_A} - E_{p_B}} \qquad \textbf{(6.17)}$$

L'énergie potentielle est toujours rapportée à un référentiel pris comme origine pour la calculer ($E_p = 0$). La fonction de l'énergie potentielle $E_p$ est déterminée à une constante près.

## ❖ Relation entre les différentielles du travail et de l'énergie potentielle
(العلاقة بين تفاضلي العمل و الطاقة الكامنة)

En considérant la fonction $E_p(z) = mgz$ , sa différentielle est :

$$dE_p(z) = E_p^{'}(z).dz \Rightarrow dE_p(z) = mgdz$$

Dans l'exemple de calcul du travail, on a trouvé $dW = -mgdz$ . Par identification des deux expressions $dE_p(z)$ et $dW$, on arrive au résultat : La différentielle de l'énergie potentielle est égale et de sens opposé à la différentielle du travail

$$\boxed{dW = -dE_p(z) \quad \Leftrightarrow \quad dE_p(z) = -dW} \qquad \textbf{(6.18)}$$

## ❖ Energie potentielle de quelques champs de force (الطاقة الكامنة لبعض حقول القوة)

### ▪ Particule dans le champ de pesanteur terrestre uniforme
(جسيمة في الحقل المنتظم للجاذبية الأرضية)

Si $z$ est la hauteur, définie à partir de la surface de la terre, prise comme origine de l'énergie potentielle, alors l'énergie potentielle de la particule par rapport à la surface de la terre est :

$$dE_p = -dW \Rightarrow \boxed{E_p = mgz} \qquad \textbf{(6.19)}$$

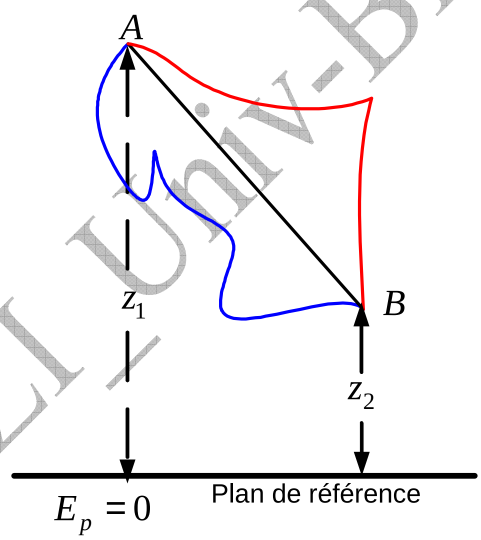



**Fig 6.7**

Dans le cas général, si la particule se déplace entre deux plans, l'énergie potentielle, et quelque soit la trajectoire suivi, est donnée par la formule :

$$E_p = mg(z_1 - z_2) \quad \left| \begin{array}{l} z_1 > z_2 \Rightarrow E_p > 0 \\ z_1 < z_2 \Rightarrow E_p < 0 \end{array} \right.$$

Plus précisément, l'énergie potentielle calculée représente toujours la variation de sa valeur entre deux positons données.

### ▪ Particule soumise à une force élastique (جسيمة خاضعة لقوة مرنة)

Nous allons calculer l'énergie potentielle d'un système composé d'une particule accrochée à un ressort, suspendu verticalement, de constante de raideur $k$, sa longueur à vide étant $l_0$. Sa longueur lorsqu'il est chargé de la particule est $l$, d'où :

$$dE_p = -dW \quad ; \quad E_p = -\int_0^x -kx dx \Rightarrow \boxed{E_p = \tfrac{1}{2}k.x^2 = \tfrac{1}{2}k(l-l_0)^2} \qquad \textbf{(6.20)}$$

- **<u>Particule dans un champ électrostatique</u>** (جسيمة في حقل كهروساكن)

On étudie dans le cours de l'électromagnétisme que le champ électrostatique $\vec{E}$, produit par une charge $Q$ au repos et se trouvant à l'origine $O$ des coordonnées $(\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r)$, est défini par la formule :

$$\boxed{\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(6.21)}$$

Une charge $q$ située dans ce champ est soumise à une force électrostatique :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r^2}.\vec{u}$$

Il est facile de vérifier que la force électrostatique dérive de l'énergie potentielle d'expression :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r}} \qquad \textbf{(6.22)}$$

Dans le cas général, si $q$ est une charge située en un point $(M)$ dans un champ électrostatique et où $V(M)$ est le potentiel électrostatique, l'énergie potentielle est la fonction $E_p(M) = E_p(x,y,z)$ donnée sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r} \\ V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E_p = q.V} \qquad \textbf{(6.23)}$$

- **<u>Particule dans un champ d'un point de masse</u>** $M$ (جسيمة في حقل نقطة كتلتها $M$)

Si $\vec{g} = -g\vec{k}$, et par comparaison avec le champ électrostatique, on arrive à l'expression de l'énergie potentielle de la particule située dans le champ uniforme de pesanteur au voisinage de la terre :

$$\left.\begin{aligned} &Q \to M \\ &q \to m \\ &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E_p = -G\frac{mM}{r}} \qquad \textbf{(6.24)}$$

Toujours par comparaison avec le champ électrostatique, on peut écrire l'expression 6.24 sous la forme :

$$\boxed{E_p = mV} \qquad \textbf{(6.25)}$$

$$\boxed{V = -G\frac{M}{r}} \qquad \textbf{(6.26)}$$

$V$ : désigne ici le **potentiel de l'attraction** au point où se trouve la particule $m$ .

## 5/ EXPRESSION DU CHAMP DE FORCE CONSERVATIVE A PARTIR DE L'ENERGIE POTENTIELLE DONT IL DERIVE

(عبارة حقل القوة المحافظة انطلاقا من الطاقة الكامنة التي تشتق منها)

Nous avons explicité dans le paragraphe relatif au travail que l'expression $F.\cos\theta$ est la composante de la force suivant la direction du déplacement $ds$ ; partant de là, si nous connaissons l'expression $E_p(x,y,z)$, nous pouvons obtenir alors une composante $\vec{F}$ suivant n'importe quelle direction et ce en calculant la dérivée $-dE_p/ds$ qui s'appelle la *dérivée directionnelle* de la fonction $E_p$ .

Suite à cela, nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{array}{l} dW = -dE_p \\ dW = \vec{F}.d\vec{r} \\ d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k} \\ \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F} + \vec{F}_z \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{dE_p = -(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)} \qquad \textbf{(6.27)}$$

Sachant que $E_p(x,y,z)$ est une fonction à trois variables, sa différentielle s'écrit :

$$\boxed{dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz} \qquad \textbf{(6.28)}$$

Par identification des deux expressions 6.27 et 6.28 on obtient les coordonnées cartésiennes de la force qui est fonction de $E_p(x,y,z)$ :

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \; ; \; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \; ; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}} \qquad \textbf{(6.29)}$$

Comme on peut écrire l'expression simplifiée :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p} \qquad \textbf{(6.30)}$$

❖ **Comment démontrer mathématiquement qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel donné ?**

Puisque l'expression 6.30 est vérifiée dans le cas des forces conservatives, nous pouvons montrer que le rotationnel du gradient du potentiel $E_p$ est nul , ce qui implique que le rotationnel de la force $\vec{F}$ est nul :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F} = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}E_p) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}} \qquad \textbf{(6.31)}$$

Le calcul conduit à :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

**Afin de prouver que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel il suffit de vérifier les équations suivantes :**

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}} \qquad \textbf{(6.32)}$$

**Exemple 6.6 :** Soit le potentiel $E_p = 2x^2 - xy + yz$

Trouver l'expression de la force dans le système des coordonnées cartésiennes. La force dérive-t-elle d'un potentiel ?

**Réponse :**

Cherchons les composantes de la force en exploitant l'expression 6.29 :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -4x + y \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = x - z \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -y$$

D'où l'expression vectorielle de la force : $\vec{F} = (-4x+y).\vec{i}+(x-z).\vec{j}-y.\vec{k}$

Vérifions maintenant que $\vec{F}$ dérive du potentiel $E_p(x,y,z)$ soit $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow +1 = +1; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \Rightarrow -1 = -1$$

Donc la force dérive bien d'un potentiel.

Si le mouvement est plan, et en utilisant les coordonnées polaires et $\theta$, le déplacement suivant le vecteur du rayon polaire $\vec{\ }$ est égal à $d$ et le déplacement normale est égal à $rd\theta$. (Figure 6.8)

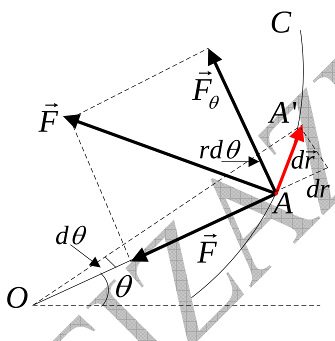



Fig 6.8

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta$$

Les composantes radiale et transversale de la force sont:

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\ ;\ F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}} \qquad (33.6)$$

Pour clore ce paragraphe il est intéressant de donner, sans démonstration, les composantes de la forces dans différents systèmes de coordonnées :

- **En coordonnées cylindriques** $(r,\theta,z)$, tel que le déplacement élémentaire est :

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{k}$$

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}} \qquad \textbf{(6.34)}$$

- **En coordonnées sphériques** $(r,\theta,\varphi)$, tel que le déplacement élémentaire est :

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + r\sin\varphi d\theta.\vec{u}_\theta + rd\varphi.\vec{u}_\varphi$$

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}; F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi};} \quad \textbf{(6.35)}$$

## 6/ L'énergie mécanique (الطاقة الميكانيكية)

❖ **Définition :** L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant donné est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_M = E_c + E_p \Leftrightarrow E_M = E_c + E_p(x,y,z)} \quad \textbf{(6.36)}$$

❖ **Deux exemples :**

- L'énergie potentielle d'un système composé d'un ressort de constante de raideur $k$, dont l'allongement est $l - l_0 = x$ au temps $t$, sous l'action d'une particule de masse $m$ et de vitesse instantanée $v$, est :

$$E_M = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

- Dans le cas de la chute libre : $E_M = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgz$

❖ **Principe de la conservation de l'énergie mécanique (مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية) :**

Dans le champ de force conservatrice (ou dérivant d'un potentiel) l'énergie mécanique se conserve au cours du temps.

$$\boxed{E_M = E_c + E_p = \mathrm{C^{te}}} \quad \textbf{(6.37)}$$

Cela veut dire que la variation de l'énergie mécanique est nulle $\Delta E_M = 0$, cela veut dire aussi que la variation de l'énergie cinétique est égale à la variation de l'énergie potentielle : $\Delta E_c = \Delta E_p$. En d'autres termes, Si le système est isolé mécaniquement l'énergie mécanique est conservée.

Dans le cas de la présence de frottements, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces de frottement $\sum W_{frott}$ :

$$\boxed{\Delta E_M = \sum W_{frott}} \quad \textbf{(6.38)}$$

- **Cas d'une particule dans un champ de force élastique (حالة جسيمة في حقل قوة مرنة) :**

La figure 6.9 représente un système mécanique isolée composé d'un corps de masse $m$ associé à un ressort de masse négligeable, de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $l_0$.

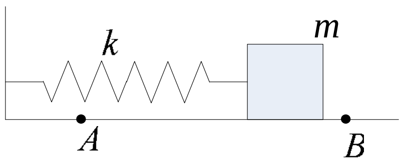



Fig 6.9

A chaque instant le corps est soumis à une force de rappel $\vec{F} = -kx.\vec{u}$ et $x = l - l_0$, où $l$ est la longueur du ressort à un instant donné au cours du déplacement du corps.

Quand le corps se déplace du point $A$ au point $B$, on peut écrire :

$$\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B F_x.dx = -k\int_A^B x.dx$$

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}k.x_A^2 - \frac{1}{2}k.x_B^2 = -\Delta E_p}$$

**(6.39)**

D'après le principe de la conservation de l'énergie mécanique on écrit :

$$E_{M,A} = E_{M,B} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k.x_A{}^2 + \frac{1}{2}m.v_A{}^2 = \frac{1}{2}k.x_B{}^2 + \frac{1}{2}m.v_B{}^2 = C^{te}$$

On comprime le ressort d'une longueur $(x = -a)$ à partir de sa position d'équilibre $(x = 0)$ par l'intermédiaire du corps, puis on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Le corps est animé alors d'un mouvement rectiligne sinusoïdal entre deux positions extrêmes $x = -a$ et $x = +a$.

La figure 6.10 représente les variations de l'énergie potentielle en fonction de l'**allongement** $(x = l - l_0)$ du ressort .Nous avons représenté sur la même figure en trait discontinu les variations de l'énergie cinétique.

Nous avons à chaque instant :

$$E_c + E_p = \frac{1}{2}ka^2 = C^{te} \qquad \textbf{(6.40)}$$

Ce que perd le système sous forme d'énergie potentielle il le gagne sous forme d'énergie cinétique et vice versa.

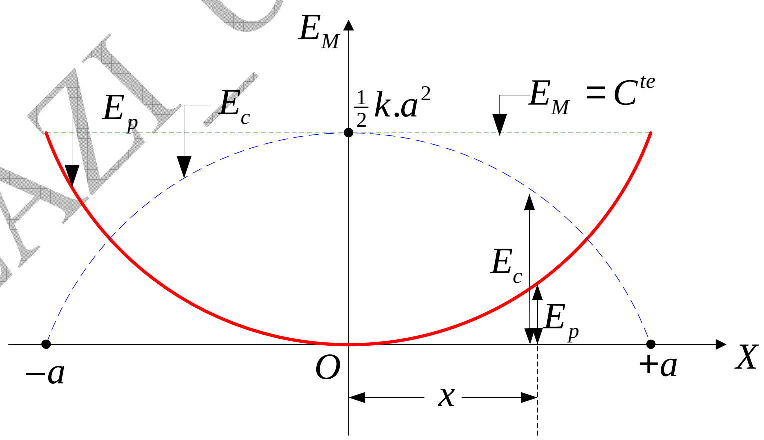



**Fig 6.10**

**Exemple 6.7 :** Une petite boule de masse $m = 1g$ est abandonnée avec une vitesse initiale $v_A = 0$ d'un point $A$ situé à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon $R = 1,25m$. Elle arrive au point $B$ avec une vitesse $v_B' = 4ms^{-1}$ . Figure 6.11

Prouver que cette boule est soumise à une force de frottement et estimer le travail de cette force. On prend $g = 10ms^{-2}$.

**Réponse :** On applique le principe de l'énergie mécanique :

- **En absence de frottement :** $\Delta E_M = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - mgR = 0 \Rightarrow v_B = 5ms^{-1}$

Remarquons que le module théorique de la vitesse est plus grand que son module expérimental. Cela prouve l'existence de frottements.

- **En présence de frottement :** $\Delta E_M = \sum W_{frott}$ donc :

$$\Delta E_M = \sum W_{frott} = \frac{1}{2}mv_B'^2 - mgR \Rightarrow \boxed{\sum W_{frott} = -4.5 \times 10^{-3} J < 0}$$

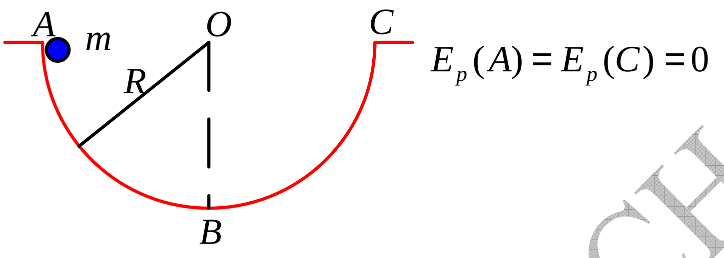



Fig 6.11

❖ **Oscillateur harmonique simple**(الهزاز التوافقي البسيط) :

- **Définition :** L'oscillateur harmonique simple est tout système qui effectue un mouvement périodique autour d'une position d'équilibre stable et n'étant soumis à aucun amortissement (comme par exemple les frottements) ni aucune excitation.

Le mouvement est régi par l'équation différentielle linéaire : $\ddot{x} + \omega_0^2 . x = 0$

Nous connaissons la solution générale d'une telle équation qui est de la forme :

$$x = a\cos(\omega t + \varphi)$$

- **Energie de l'oscillateur** (طاقة الهزاز) :

La figure 6.12(a) représente un pendule simple ( le fil est inextensible de longueur $l$ et de masse $m$ négligeable). La masse est soumise aux deux forces, son poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

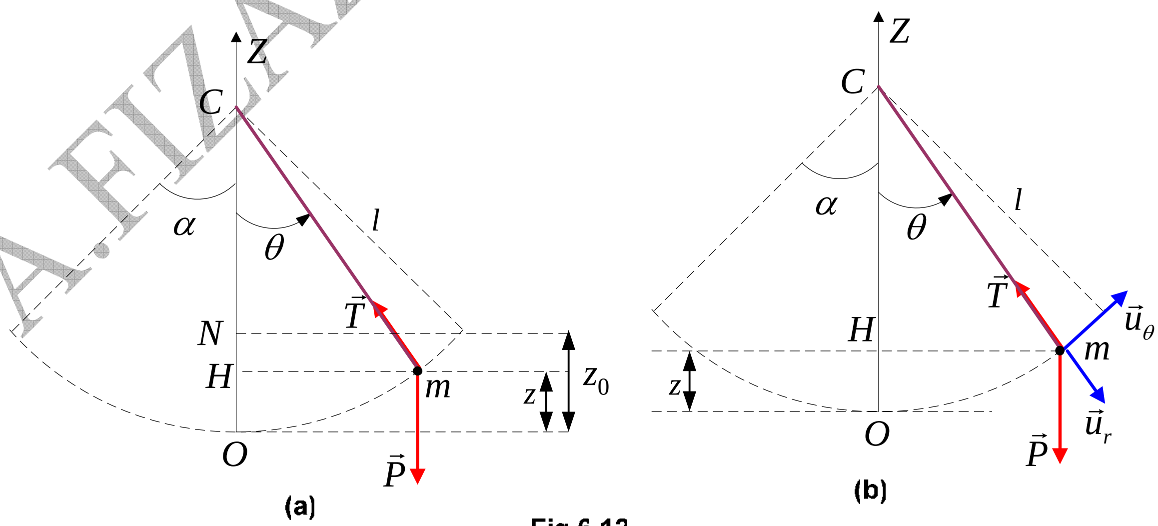



Fig 6.12

Le poids dérive d'un potentiel, et le travail de la tension $\vec{T}$ est nul puisque sa direction est perpendiculaire à la trajectoire à tout instant. On prend comme origine pour l'énergie potentielle le plan horizontal contenant le point $O$. D'après la figure 6.12 (b), pour une position correspondant à l'angle $\theta$ on a :

$$E_p = mgz = mg(OH) = mg(CO - CH) = mgl(1-\cos\theta)$$

L'expression de la vitesse circulaire tangente à la trajectoire est : $\vec{v} = l\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$

On peut calculer maintenant l'énergie mécanique du pendule (appelée aussi la première intégration de l'énergie) :

$$\boxed{E_M = E_p + E_c = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = C^{te}} \qquad \textbf{(6.41)}$$

Divisons l'équation (6.41) par $ml^2$ et posant $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$, l'expression de l'énergie mécanique s'écrit alors sous la forme :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + 2\omega_0{}^2(1-\cos\theta) = K} \qquad \textbf{(6.42)}$$

Où $K = \dfrac{2.C^{te}}{ml^2}$ est une constante déterminée par les conditions initiales. Si on prend par exemple $\dot{\theta}_0 = 0$ pour $\theta_0 = \alpha$ , dans ce cas et d'après la figure 6.12 (a), on a :

$$\Delta E_M = 0 \Rightarrow -\Delta E_p = \Delta E_c \Rightarrow -mg(z - z_0) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$-mgl(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Pour de pareilles conditions l'équation 6.42 devient :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + 2\omega_0{}^2(\cos\alpha - \cos\theta) = 0} \qquad \textbf{(6.43)}$$

- **Equation du mouvement** (معادلة الحركة) :

L'équation du mouvement est une équation différentielle de deuxième ordre. On l'obtient en dérivant, par rapport au temps, l'équation précédente 6.43 :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0{}^2 \sin\theta = 0} \qquad \textbf{(6.44)}$$

Pour des oscillations de faible amplitude $(\sin\theta \simeq \theta_{(rad)} \Leftarrow 10° \geq \theta)$, l'équation s'écrit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0} \qquad \textbf{(6.45)}$$

La solution générale de cette équation est :

$$\boxed{\theta = \alpha\cos(\omega t + \varphi)} \qquad \textbf{(6.46)}$$

Cela nous indique que le mouvement est un mouvement de rotation sinusoïdal de pulsation $\omega_0$, et de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad \textbf{(6.47)}$$

On peut arriver à l'équation 6.44 en partant de la loi de mouvement $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$, et en projetant cette dernière expression sur la direction radiale :

$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta = 0$$

De cet exemple nous tirons la remarque générale suivante :
Lorsque l'on déduit une équation différentielle de premier ordre $(D)$ , et que cette dernière n'est pas indépendante de l'équation différentielle de second ordre laquelle exprime la loi de mouvement : nous dirons dans ce cas que $(E)$ est la première intégrale des équations $(D)$ (ça veut dire que $(D)$ est la première dérivée de l'équation $(E)$ ).

Dans le cas que nous avons étudié, l'équation 6.43 est la première intégrale de l'équation 6.44.

## 7/ COLLISION DE PARTICULES (تصادم الجسيمات)

### ❖ Conservation de la quantité de mouvement :

Nous dirons qu'un système a subit un choc si les vitesses de ses éléments ont eu des variations considérables entre deux instants, avant et après le choc, de telle façon qu'il ait un échange de quantité de mouvement et d'énergie entre les différents éléments.

Soient $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ les quantités de mouvement de deux corps avant la collision, et $\vec{p}_1^{\,'}$ et $\vec{p}_2^{\,'}$ les quantités de mouvement après le choc. Le système est supposé isolé. Les effets mutuels échangés entre les deux particules de masses $m_1$ et $m_2$ se produisent dans une région très limitée de l'espace et très petite, C'est pour cela que nous disons qu'il s'agit d'un choc ponctuel.

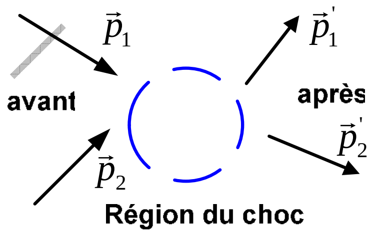



**Fig 6.13**

Puisque le système est isolé, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées. Donc, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1^{\,'}+\vec{p}_2^{\,'}=Cte \Rightarrow \Delta\vec{p}=\vec{0}} \qquad \textbf{(6.48)}$$

$$\boxed{m_1.\vec{v}_1+m_2.\vec{v}_2=m_1.\vec{v}_1^{\,'}+m_2.\vec{v}_2^{\,'}} \qquad \textbf{(6.49)}$$

**Notez bien le caractère vectoriel des deux équations.**

- **Le choc élastique :**

Le choc entre deux particules est élastique si l'énergie cinétique totale $E_c$ du système est conservée au cours du choc. Les particules ne s'unissent pas après le choc.

Si on note l'énergie cinétique avant le choc par $E_c$ et par $E_c^{'}$ après le choc , et en se rappelant de l'expression $E_c = \dfrac{p^2}{2m}$ on peut écrire :

$$\boxed{E_c = E_c^{'} \Leftrightarrow \Delta E_c = 0} \qquad \textbf{(6.50)}$$

$$\boxed{\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1^{'2}}{2m_1} + \frac{p_2^{'2}}{2m_2}} \qquad \textbf{(6.51)}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2.v_2^{'2}} \qquad \textbf{(6.52)}$$

**Notez bien le caractère scalaire des trois dernières équations. Les équations 6.51 et 6.52 suffisent pour résoudre n'importe quel problème relatif aux chocs entre particules**.

**Exemple 6.8 :**

Un projectile de masse $800g$ se déplace sur une droite horizontal à la vitesse de $1ms^{-1}$ pour atteindre une cible au repos de masse $800g$. La cible touchée se met en mouvement suivant une direction faisant un angle de $-30°$ avec l'horizontale.

a/ Déterminer la direction et le module de la vitesse du projectile après le choc.

b/ Déterminer l'intensité de la vitesse de la cible après le choc.

**Réponse :**

a/ Détermination de la direction du projectile et calcul de son module : Voir figure 6.14.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1^2}{2m_1} = \dfrac{p_1^{'2}}{2m_1} + \dfrac{p^2}{2m_2} \\ m_1 = m_2 = m \end{array}\right| \Rightarrow p_1^2 = p_2^{'2} + p^2$$

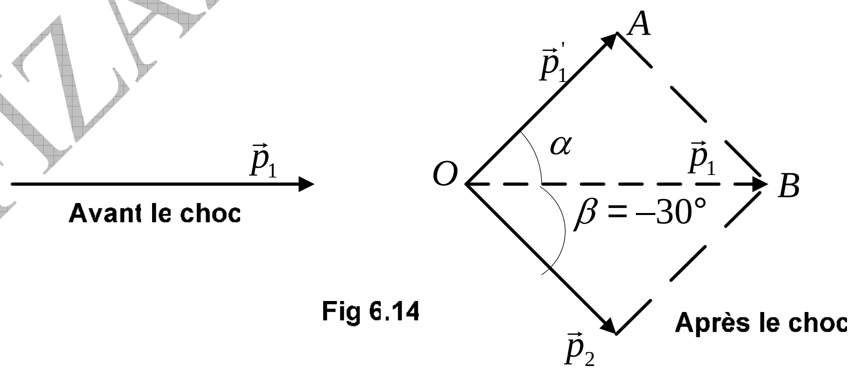



Fig 6.14

Le triangle $OAB$ est rectangle, ce qui implique que le quadrilatère est un rectangle, donc : $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \boxed{\alpha = 60°}$

$$\cos\alpha = \frac{p_1^{'}}{p_1} = \frac{v_1^{'}}{v_1} \Rightarrow \boxed{v_1^{'} = 0.50ms^{-1}}$$

b/ Calcul du module de la vitesse:

$$\cos(-30°) = \frac{mv}{mv_1} = \frac{v}{v_1} \Rightarrow \boxed{v = 0.87ms^{-1}}$$

▪**Le choc mou** (الصدم اللين)

Le choc entre deux particules séparées et dit mou , si elles s'unissent après le choc pour former un seul corps. Les deux particules auront la même vitesse après le choc.

Dans ce cas : Si $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont les quantités de mouvement des deux particules séparées avant le choc, et $\vec{p}^{\,'}$ la quantité de mouvement des deux particules unies après le choc, nous pouvons écrire alors :

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}^{\,'} = Cte \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{0}} \quad \textbf{(6.53)}$$

$$\boxed{\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2}{2(m_1 + m_2)}} \quad \textbf{(6.54)}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2} \quad \textbf{(6.55)}$$

**Exemple 6.8 :**

Une particule de masse $5kg$ se déplaçant à la vitesse de $20ms^{-1}$ entre en collision perpendiculairement avec une autre particule de masse $6kg$ qui se déplaçait à la vitesse de $15ms^{-1}$. En considérant le choc mou:

a/ Quelle est la quantité de mouvement du système ?

b/ Calculer la vitesse des particules après le choc.

**Réponse :**

a/ $134.5kg.m.s^{-1}$ b/ $12.23m.s^{-1}$

## 8/ DISCUSSION DES COURBES D'ENERGIE POTENTIELLE

(مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة)

Nous avons représenté sur la figure 6.15 une courbe qualitative dans le cas d'un mouvement unidimensionnel (elle s'effectue suivant une droite).

Ecrivons l'expression de la force sous la forme :

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

Or $\frac{dE_p}{dx}$ représente la pente de la courbe $E_p(x)$ . La pente est positive lorsque la courbe est croissante, dirigée vers le haut ; elle est négative si la courbe est décroissante et dirigée vers le bas. Donc, la force $\vec{F}$ (dont le signe est opposé à celui de la pente) est négative, ou orientée vers la gauche, lorsque l'énergie potentielle est croissante ; elle est positive et dirigée vers la droite lorsque l'énergie potentielle est décroissante.

Nous avons schématisé et précisé tout ceci sur la figure 6.15 par des flèches horizontales et par des espaces en dessous du graphe.

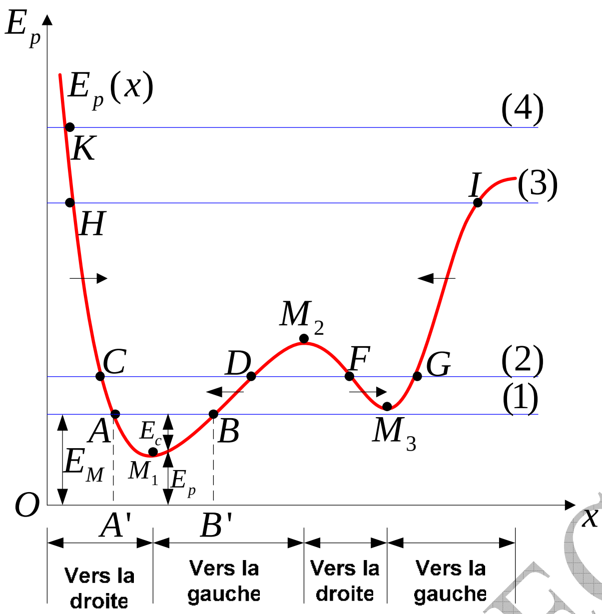



**Fig 6.15: Relation entre le mouvement suivant une ligne droite et l'énergie potentielle**

Le mouvement est possible si la condition $E_c = E_M - E_p > 0$ est satisfaite. Sur le graphe les droites horizontales représentent l'énergie potentielle pour différents cas.

**Premier cas :** L'énergie mécanique correspondant à la droite (1) qui coupe la courbe $E_p(x)$ en deux points $A$ et $B$. La particule vibre entre les deux abscisses $x_A$ et $x_B$ ; mais son mouvement n'est pas permis à droite de $B$ et à gauche de $A$, sinon $E_c = E_M - E_p < 0$, ce qui est impossible.

**Deuxième cas :** L'énergie mécanique correspondant à la droite (2) qui coupe la courbe $E_p(x)$ en quatre points $C, D, F, G$. Le mouvement de la particule est permis dans deux régions : entre les abscisses $x_C$ et $x_D$, et entre les abscisses $x_F$ et $x_G$ ; or la particule ne peut vibrer que dans l'une des deux régions, mais ne peut pas sauter d'une région à une autre, sinon elle doit transiter par la région $DF$, ce qui est impossible (parce que dans cette région l'énergie cinétique est négative $E_c = E_M - E_p < 0$). Les deux régions où le mouvement est permis sont séparées par ce que l'on appelle « **barrière de potentiel** ».

**Troisième cas :** L'énergie mécanique correspondant à la droite (3). Le mouvement est permis entre les points $H, I$ .

**Quatrième cas :** L'énergie mécanique correspondant à la droite (4). Le mouvement n'est plus vibratoire et la particule se déplace de $K$ vers l'infini.

❖ **Positions d'équilibre** (مواضع التوازن) :

Pour que $\frac{dE_p}{dx}=0$ et obligatoirement $F=0$, il faut que l'énergie potentielle soit maximale ou minimale, comme aux points $M_1$ , $M_2$ , $M_3$. Ces positions sont les **positions d'équilibre**.

- **Lieu où $E_p(x)$ est minimale :**

L'équilibre est stable si la particule bouge à peine, comme en $M_1$ , $M_3$, à gauche ou à droite, une force agit sur elle pour la rappeler à revenir à la position d'équilibre.

- **Lieu où $E_p(x)$ est maximale :**

**L'équilibre est instable** : si la particule bouge à peine, comme en $M_2$ une force agit sur elle pour l'éloigner de la position d'équilibre.

- Les points $A,B,C,D,F,G,H,I$ s'appellent points d'arrêt. En ces points la particule s'arrête ou change le sens de son mouvement.
-

**9/ FORCES NON CONSERVATIVES** ( ou forces ne dérivant pas d'un potentiel) (القوى الغير محافظة (أو الغير مشتقة من كمون)) :

Dans la nature il existe des forces non conservatrices. Les forces de frottement sont un exemple de celles la. Le frottement de glissement s'oppose toujours au déplacement, et son travail dépend du chemin suivi. Même si la trajectoire est fermée, le travail n'est pas nul, et l'équation 6.30 n'est plus valable.

Il en de même pour le frottement dans les fluides qui s'oppose à la vitesse dont il dépend, mais indépendant de la position.

Une particule peut être soumise en même temps à des forces conservatrices et à des forces non conservatrices.

**Exemples :**

- **Une particule en chute dans un fluide :** Elle est soumise à son poids $\vec{P}$, qui dérive d'un potentiel, et à la force de frottement non conservatrice.
- **Pour un pendule élastique :** La particule est soumise à la force de rappel $\vec{F}=-kx.\vec{i}$ qui est conservatrice. Elle est soumise aussi à une force de frottement de glissement $\vec{F}'=-C\vec{v}$ non conservatrice, sachant que le travail de celle- ci est :

$$W'=\vec{F}'d\vec{r}=-C.\dot{x}.dx \Rightarrow W'=-C.\dot{x}^2.dt<0$$

Le signe négatif s'explique par le fait que les frottements absorbent l'énergie du système, c'est ce qui explique l'amortissement du mouvement.

# EXERCICES ** تـــمــــاريـــن

**Exercice 6.1**

Une particule est soumise à une force définie par ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$$

Où $\alpha, \beta, \gamma$ sont des constantes. $x, y, z$ sont en mètre et $\vec{F}$ en newton.

1/ Trouver les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma$ pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

2/ Trouver l'expression du potentiel $E_p(x, y, z)$ dont dérive la force sachant qe $E_p(0,0,0) = 2$.

**تمرين 1.6**

تخضع جسيمة لحقل قوة معرفة بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$$

حيث $\alpha, \beta, \gamma$ ثوابت، $x, y, z$ بالمتر، $F$بالنيوتن.

1/ أوجد قيم $\alpha, \beta, \gamma$ حتى تكون $\vec{F}$ مشتقة من كمون.

2/ أوجد عبارة الكمون $E_p(x, y, z)$ الذي تشتق منه القوة $\vec{F}$ علما أن $E_p(0,0,0) = 2$.

**Exercice 6.2**

On considère dans un repère cartésien un champ de forces $\vec{F}$ d'expression :

$$\vec{F} = X(x,z)\vec{i} + yz\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\vec{k}$$

1. Déterminer $X(x,z)$ pour que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $E_p$ que l'on calculera, sachant que la force est nulle en $O$. On prendra le plan $Oxy$ comme origine des énergies potentielles.
2. Calculer alors, par deux méthodes différentes le long de l'hélice d'équations paramétriques $x = R\cos\theta$ , $y = R\sin\theta$ , $z = h\theta$, le travail de $\vec{F}$ du point $M_1(\theta = 0)$ au point $M_2(\theta = \pi)$.
3. Obtiendrait-on un résultat différent en calculant le travail le long d'une autre courbe ?

**تمرين 2.6**

نعتبر في معلم ديكارتي حقلا للقوى $\vec{F}$ عبارتها:

$$\vec{F} = X(x,z)\vec{i} + yz\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\vec{k}$$

1/ عيّن $X(x,z)$ لكي تشتق $\vec{F}$ من طاقة كامنة $E_p$ و التي نحسبها، علما أن القوة معدومة في $O$. نتّخذ المستوى $Oxy$ كمبدإ للطاقات الكامنة.

2/ أحسب بطريقتين مختلفتين، على طول الحلزون ذي المعادلات الوسيطية:

$$x = R\cos\theta \ , \ y = R\sin\theta \ , \ z = h\theta$$

عمل القوة $\vec{F}$ من النقطة $M_1(\theta = 0)$ إلى النقطة $M_2(\theta = \pi)$.

3/ هل نحصل على نتيجة مختلفة بحسابنا العمل على طول منحنى آخر؟

**Exercice 6.3**

Une particule matérielle de masse $m$ se déplace sous l'action de la force :

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{u}_x + xz\vec{u}_y + xy\vec{u}_z$$

Du point $A(1,2,-1)$ au point $D(2,4,-2)$.

Calculer le travail de la force $\vec{F}$ suivant chacun des trajets suivants :

a/ la droite $AD$,

b/ la ligne brisée $ABCD$ où $B(2,2,-1)$ et $C(2,4,-1)$,

d/ la courbe définie par les équations paramétriques : $x = t$ , $y = t^2$ , $z = t$, sachant

**تمرين 3.6**

تنتقل جسيمة مادية كتلتها $m$ تحت تأثير القوة:

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{u}_x + xz\vec{u}_y + xy\vec{u}_z$$

من النقطة $A(1,2,-1)$ إلى النقطة $D(2,4,-2)$.

أحسب عمل القوة $\vec{F}$ وفق كل مسلك من المسالك التالية:

ا/ المستقيم $AD$،

ب/ الخط المنكسر $ABCD$ حيث $B(2,2,-1)$ و $C(2,4,-1)$

ج/ المنحنى المعرف بالمعادلات الوسيطية:

$$x = t \ , \ y = t^2 \ , \ z = t$$

que la particule quitte le point $A$ à l'instant $t_A = 0$ et atteint le point $D$ à l'instant $t_D = 2s$ .

علما أن النقطة المادية انطلقت من $A$ في اللحظة $t_A = 0$ و تصل إلى النطة $D$ في اللحظة $t_D = 2s$ .

**Exercice 6.4**

Une particule de masse $m$ se déplace sous l'action d'une force attractive $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$ . La trajectoire est un cercle de rayon  . Montrer que :

a/ l'énergie totale est $E = -\frac{k}{2}$ ,

b/ la vitesse est $v = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,

c/ le moment cinétique est $L = \sqrt{mkr}$ .

**تمرين 4.6**

تنتقل جسيمة كتلتها $m$ تحت تأثير قوة جذب $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$ . المسار هو دارة نصف قطرها .

برهن أن:

ا/ الطاقة الكلية هي $E = -\frac{k}{2}$ ،

ب/ السرعة هي $v = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ،

ج/ العزم الحركي هو $L = \sqrt{mkr}$ .

**Exercice 6.5**

Une particule se déplace depuis l'origine $O$ jusqu'au point $A$ défini par $\vec{r} = -3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 16\vec{u}_z$ sous l'action de la force $\vec{F} = -7\vec{u}_x + 6\vec{u}_y$ . Calculer :

a/ le travail effectué. Est-il nécessaire de spécifier le chemin suivi par la particule ? justifier.

b/ la puissance moyenne s'il faut $0,6s$ pour aller d'un endroit à un autre.

c/ la variation de l'énergie cinétique sachant que la masse de la particule est $1kg$ .

e/ la vitesse finale si on considère la vitesse initiale nulle.

f/ la différence d'énergie potentielle entre les deux points. Que remarquez-vous ? Déterminer l'énergie potentielle au point $B$ défini par $\vec{r}\,' = 7\vec{u}_x + 16\vec{u}_y - 42\vec{u}_z$ .

**تمرين 5.6**

تتحرك جسيمة انطلاقا من المبدإ $O$ حتى النقطة $A$ المعرفة بـ $\vec{r} = -3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 16\vec{u}_z$ تحت تأثير القوة $\vec{F} = -7\vec{u}_x + 6\vec{u}_y$ . أحسب:

ا/ العمل المنجز. هل من اللازم توضيح المسلك المتبع؟ علل.

ب/ الإستطاعة المتوسطة إذا كان الانتقال من مكان إلى آخر يتطلب $0,6s$ .

ج/ التغير في الطاقة الحركية علما أن كتلة الجسيمة هي $1kg$.

د/ السرعة النهائية إذا اعتبرنا السرعة الابتدائية معدومة.

ه/ التغير في الطاقة الكامنة بين النقطتين. ماذا تلاحظ؟ حدد الطاقة الكامنة في النقطة $B$ المعرفة بـ $\vec{r}\,' = 7\vec{u}_x + 16\vec{u}_y - 42\vec{u}_z$ .

**Exercice 6.6**

Une grenade lancée horizontalement avec la vitesse $v = 8ms^{-1}$ , explose en trois fragments à masse égale.

Le premier fragment continue à se déplacer horizontalement à $v = 16ms^{-1}$ , un autre est lancé vers le haut suivant un angle de $45°$ et le troisième est projeté suivant le même angle vers le bas.

Trouver la grandeur des vitesses des fragments deux et trois.

**تمرين 6.6**

ترمى قنبلة يدوية أفقيا بسرعة $v = 8ms^{-1}$ ، فتنفجر منشطرة إلى ثلاث شظايا متساوية الكتلة.

القطعة الأولى تواصل الانتقال أفقيا بسرعة $v = 16ms^{-1}$ ، القطعة الثانية تصعد إلى الأعلى تحت زاوية تصنع $45°$ مع الأفق، و القطعة الثالثة تتطاير تحت نفس الزاوية و لكن نحو الأسفل.

أحسب شدة كل من سرعتي الشظيتين الثانية و الثالثة.

**Exercice 6.7**

Une masse $M = 100g$ est attachée à l'extrémité d'un ressort disposé horizontalement, comme indiqué sur la figure ci-dessous, et dont la constante de raideur est $k = 20Nm^{-1}$. Une masse $m = 50g$ se déplaçant à la vitesse $v_0 = 0.5ms^{1}$ vient heurter la masse $M$ initialement au repos. On suppose le système isolé.

1/ Calculer la vitesse $v$ et le déplacement maximal $x_0$ de la masse $M$ après le choc, en considérant le choc comme étant élastique, et en supposant que les vitesses de $M$ et $m$ sont parallèles après le choc.

2/ Calculer la vitesse $v'$ du système $(M+m)$ et la compression maximale subie par le ressort dans le cas du choc mou.

3/ Calculer le travail dépensé pour la compression maximale du ressort toujours dans le cas du choc mou.

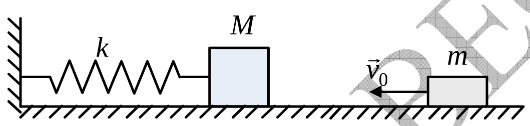
**تمرين 7.6**

تثبت كتلة $M = 100g$ في نهاية نابض ، ثابت مرونته $k = 20Nm^{-1}$ ، موضوع أفقيا (الشكل المرافق). تأتي كتلة $m = 50g$ بسرعة ثابتة $v_0 = 0.5ms^{1}$ لتصطدم بالكتلة $M$ المتوقفة. نفترض الجملة معزولة.

1/ أحسب السرعة $v$ و الانتقال الأعظمي $x_0$ للكتلة $M$ بعد الصدم في حالة التصادم المرن بافتراض سرعتي $M$ و $m$ متوازيتين بعد الصدم.

2/ أحسب السرعة $v'$ للجملة $(M+m)$ و الانضغاط الأعظمي $x_0'$ للنابض في حالة التصادم اللين.

3/ أحسب العمل المصروف للانضغاط الأعظمي للنابض في حالة التصادم اللين.




**Exercice 6.8**

Un corps $M$ de masse $m$ est soumis à un champ de forces à symétrie sphérique, et d' énergie potentielle de la forme : $E_p(M) = Kr^2e^{-r^2/a^2}$, où $K$ et $a$ sont des constantes positives et $r = OM$ la distance entre le corps $M$ et l'origine $O$ d'un repère inertiel.

1/ Représenter graphiquement $E_p(r)$ en fonction de , sachant que la dérivée seconde de l'énergie est positive pour $r = 0$, négative pour $r = a$ et tend vers zéro en valeurs positives quand $r \to \infty$.

2/Trouver l'expression de la valeur maximale de l'énergie $E_p$.

3/ Trouver les positions d'équilibre sur l'axe $X'OX$ où $X$ est l'abscisse du corps: $-\infty \prec X \prec +\infty$.

4/ Quelles sont les positions d'équilibre stable ? justifier votre réponse.

5/ Trouver l'expression de la force $\vec{F}(M)$.

**تمرين 8.6**

يخضع جسم $M$ كتلته $m$ لحقل قوى له تناظر كروي و طاقته الكامنة من الشكل: $E_p(M) = Kr^2e^{-r^2/a^2}$ حيث $K$ و $a$ ثابتان موجبان و $r = OM$ بعد الجسم $M$ عن المبدإ $O$ لمعلم عطالي.

1/ أرسم المنحنى $E_p(r)$ بدلالة ، علما أن المشتقة الثانية للطاقة موجبة عند $r = 0$ ، سالبة عند $r = a$ و تؤول نحو الصفر بقيم موجبة من أجل $r \to \infty$ .

2/ جد عبارة القيمة العظمى للطاقة $E_p$ .

3/ جد مواضع التوازن على المحور $X'OX$ حيث $X$ فاصلة الجسم: $-\infty \prec X \prec +\infty$ .

4/ ما هي مواضع التوازن المستقر؟ علل إجابتك.

5/ جد عبارة القوة $\vec{F}(M)$ .

**Exercice 6.9**

Une particule de masse $m$ est lâchée en $A$ sans vitesse initiale. (Figure ci-dessous). On cherche à savoir quelle doit être la hauteur $H$ pour que la particule atteigne le point $S$ sommet de la gouttière.

1/ Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse $v_B$ au point $B$.

**تمرين 9.6**

تترك جسيمة كتلتها $m$ من $A$ بدون سرعة ابتدائية. (الشكل في الأسفل). نبحث لنعرف ما هو الارتفاع $H$ اللازم لكي تبلغ الجسيمة النقطة $S$ قمة المجرى.

1/ طبق نظرية الطاقة الميكانيكية لحساب السرعة $v_B$ في النقطة $B$ .

2/ Exprimer $h$ en fonction de    et $\theta$.

3/ Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse $v_C$ au point $C$ en fonction de $h$ et $v_B$.

4/ En appliquant le théorème fondamental de la dynamique, déduire la valeur de la réaction $R$ en fonction de $m, r, \theta, v_B$ et $g$.

5/ Démontrer que la vitesse minimale que doit acquérir la particule au point $B$ pour atteindre le point $S$ est $v_{B,\min} = 2\sqrt{gr}$.

6/ En prenant $v_{B,\min}$ la vitesse au point $B$, calculer la réaction aux points $B$ et $S$. Que conclure ? En quel point la réaction s'annule-t-elle ?

7/ Quelle est la vitesse $v_{0,B}$ que doit avoir la particule au point $B$ pour atteindre le point $S$ sans que la réaction ne change de signe ? Quelle est la valeur de $H$ correspondante ?

2/ عبر عن $h$ بدلالة    و $\theta$ .

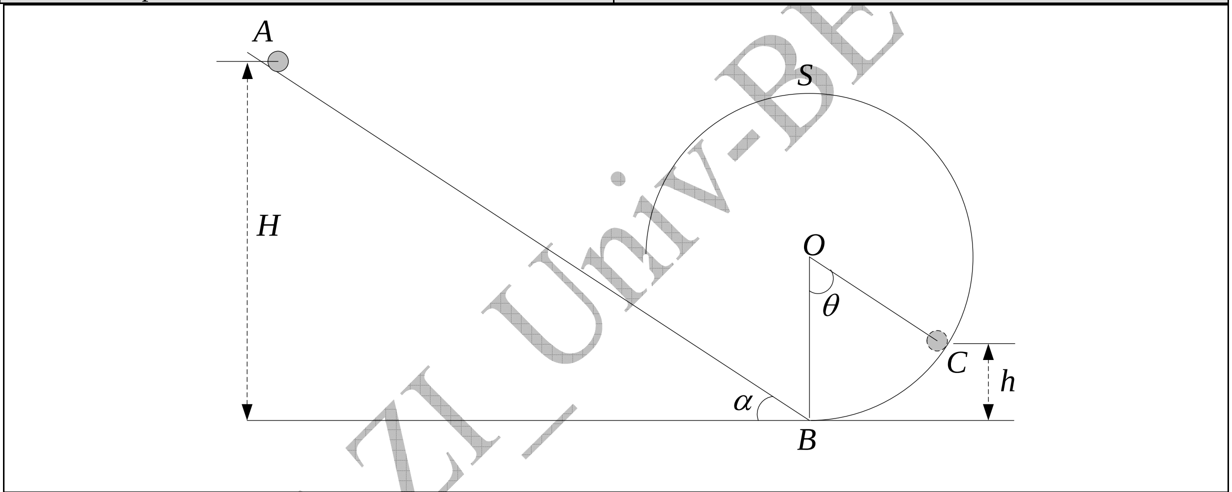
3/ طبق نظرية الطاقة الميكانيكية لحساب السرعة $v_C$ في النقطة $C$ بدلالة $h$ و $v_B$ .

4/ بتطبيق النظرية الأساسية للتحريك، إستنتج قيمة رد الفعل $R$ بدلالة $m, r, \theta, v_B$ و $g$ .

5/ برهن أن السرعة الأصغرية التي يجب على الجسيمة اكتسابها في النقطة $B$ لتبلغ النقطة $S$ هي $v_{B,\min} = 2\sqrt{gr}$ .

6/ باتخاذ $v_{B,\min}$ السرعة في النقطة $B$، أحسب رد الفعل في النقطتين $B$ و $S$ . ماذا تستخلص؟ في أي نقطة ينعدم رد الفعل؟

7/ ما هي السرعة $v_{0,B}$ التي يجب أن تتوفر عليها الجسيمة في النقطة $B$ لكي تصل إلى النقطة $S$ دون أن يغير رد الفعل اتجاه ؟ ما هي قيمة $H$ المناسبة؟




**Exercice 6.10**

Trois billes de masses $m_1, m_2, m_3$ reposent dans une gouttière horizontale parfaitement lisse. La bille $m_1$ est poussée avec une vitesse initiale dans la direction de la bille $m_2$ qui à son tour, et après le choc avec $m_1$, roule dans la direction de $m_3$ et l'heurte. En considérant les premier et deuxième chocs parfaitement élastiques, quelle doit être la vitesse que doit prendre la bille $m_2$ pour que la vitesse de la bille $m_3$ soit maximale ?

**تمرين 10.6**

توضع ثلاث كرات كتلها $m_1, m_2, m_3$ في مجرى أفقي كامل الملوسة. تدفع الكرة $m_1$ بسرعة ابتدائية في اتجاه الكرة $m_2$ و التي بدورها، و بعد الصدم مع $m_1$، تتدحرج في اتجاه $m_3$ و تصدمها. باعتبار الصدمتين الأولى و الثانية مطلقتي المرونة، فما هي القيمة التي يجب أن تأخذها الكرة $m_2$ حتى تكون سرعة الكرة $m_3$ بعد الصدم أعظمية.

**Exercice 6.11**

Le corps de la figure ci-dessous a une masse $m = 5kg$. Partant du repos, il glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale, jusqu'à ce qu'il atteigne le ressort $R$ de

**تمرين 11.6**

الجسم المبين على الشكل أسفله كتلة هي $m = 5kg$ و ينطلق من السكون لينزلق على مستوى مائل بزاوية $\alpha = 60°$ بالنسبة للأفق، حتى يبلغ النابض الذي طوله $l_0 = 40cm$، ثابت مرونته $k = 5000 N.m^{-1}$

longueur à vide $l_0 = 40cm$, de constante de raideur $k = 5000 N.m^{-1}$, et dont l'autre extrémité $C$ est fixée au bout du plan. On suppose qu'une force de frottement s'oppose au mouvement du corps sur le segment $AB = a$, le coefficient de frottement cinétique étant $\mu = 0,2$, puis elle s'annule sur le reste du trajet $BC = 2a$.

1/ Calculer la force de frottement sur le segment $AB$.

2/ Calculer la vitesse acquise par le corps au point $B$, puis la vitesse $v$ avec laquelle le corps heurte le ressort.

3/ De combien le ressort se déforme-t-il ?

4/ De combien le corps remonte-t-il sur le plan incliné lorsqu'il est repoussé par le ressort vers le haut à partir du point où a eu lieu le premier choc, en supposant que la remontée se fait sans frottement ?

On prend $g = 9,8 ms^{-2}$.

وحيث طرفه الآخر مثبت في نهاية المستوى. نفترض قوة احتكاك تعاكس حركة الجسم على القطعة المستقيمة $AB = a$، معامل الاحتكاك الحركي يساوي $\mu = 0,2$، ثم تنعدم على باقي المسلك $BC = 2a$.

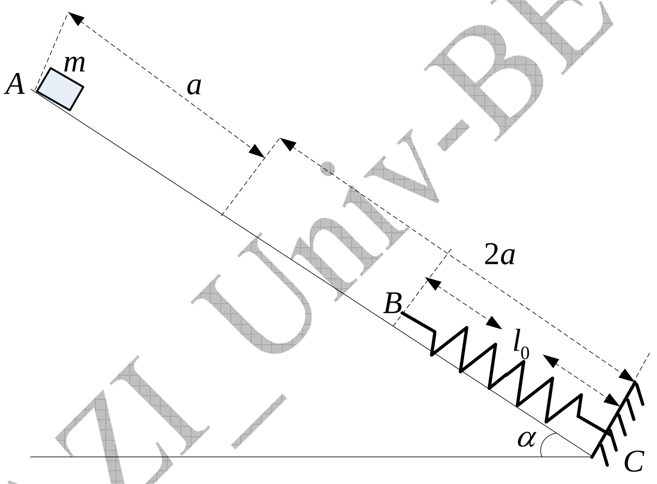
1/ أحسب قوة الاحتكاك على القطعة المستقيمة $AB$.

2/ أحسب السرعة المكتسبة من طرف الجسم في النقطة $B$، ثم السرعة $v$ التي يصدم بها الجسم النابض.

3/ ما هو مقدار انضغاط النابض؟

4/ بكم يصعد الجسم على المستوى المائل حينما يدفعه النابض من جديد إلى الأعلى ابتداء من نقطة الاصطدام الأول ، بافتراض أن الصعود يتم بدون احتكاكات؟

نأخذ $g = 9,8 ms^{-2}$.




**Exercice 6.12**

On abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ un point matériel de masse $m$ en un point $M_0$ de la face convexe d'une sphère de centre $O$ et de rayon $R$, sur laquelle il est susceptible de glisser sans frottement. (Figure ci-dessous).

1/ En n'appliquant que le théorème de la conservation de l'énergie trouver la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de $R, g, \alpha$ et $\theta$.

2/ En appliquant le principe fondamentale de la dynamique trouver la réaction du support en fonction de $\theta, \alpha, m$ et $g$.

3/ Pour quel angle $\theta_0$ le point matériel quitte-t-il la sphère ? Discuter le résultat.

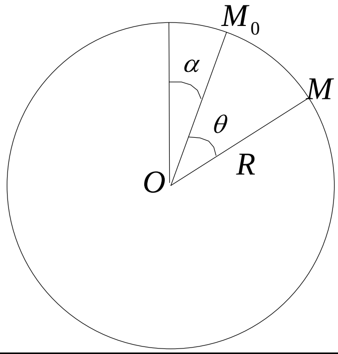
**تمرين 12.6**

نترك نقطة مادية كتلتها $m$ بدون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ من النقطة $M_0$ لتنزلق بدون احتكاكات على الوجه المحدودب لكرة مركزها $O$ و نصف قطرها $R$. (الشكل في الأسفل).

1/ بتطبيق نظرية انحفاظ الطاقة فقط أوجد سرعة الزاوية $\dot{\theta}$ بدلالة $R, g, \alpha$ و $\theta$.

2/ بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك أوجد رد فعل الحامل بدلالة $\theta, \alpha, m$ و $g$.

3/ من أجل أي زاوية $\theta_0$ تغادر النقطة المادية الكرة؟ ناقش النتيجة.




**Exercice 6.13**

Un corps de masse $m$ se déplace sur l'axe $x'Ox$. Son énergie potentielle est donnée par l'expression $E_p = K\dfrac{x}{x^2+a^2}$, où $K$ et $a$ sont des constantes positives.

1/ Représenter l'allure générale de la courbe $E_p = f(x)$.

2/ Trouver les positions d'équilibre en précisant celles qui sont stables et celle qui sont instables.

**تمرين 13.6**

يتحرك جسم كتلته $m$ على المحور $x'Ox$. طاقته الكامنة معطاة بالعبارة: $E_p = K\dfrac{x}{x^2+a^2}$ ، حيث $K$ و $a$ ثابتان موجبان.

1/ أرسم الشكل العام للمنحنى $E_p = f(x)$.

2/ أوجد مواضع التوازن موضحا المستقرة منها و الغير مستقرة.

**Exercice 6.14**

Soit un référentiel $\mathbb{R}$ de repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Une bille assimilée à un point $P$, de masse $m$, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon $a$ .(Figure ci-dessous).

Le point $P$ est attaché à un fil élastique dont l'autre extrémité est fixée en $O'(OO'=a)$. Le fil possède une raideur $k$ et une longueur à vide $l_0$. Le point $P$ est repéré par l'angle $(Ox,OP)=\theta$.

1. a/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de $a,\theta$ dans la base polaire $\left(\vec{u}_r=\dfrac{OP}{a},\vec{u}_\theta\right)$. En déduire l'expression du module $O'P$.

b/ Exprimer la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de $a,k,l_0$ et $\theta$ dans cette même base.

2. a/ Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base polaire.

b/ On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la bille $P$. Donner l'expression de la puissance $\vec{F}.\vec{v}$ en fonction de $a$ et $\theta$.

(c) En déduire l'énergie potentielle $E_p$ dont dérive la force $\vec{F}$.

3. (a) On suppose vérifiées les relations suivantes entre les paramètres :

$$a=\frac{2mg}{k}\quad,\quad l_0=\sqrt{3}\left(a-\frac{mg}{k}\right)$$

**تمرين 14.6**

ليكن مرجع $\mathbb{R}$ ذي المعلم $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.

كرية مستمثل لنقطية $P$ ، كتلتها $m$ ، مضطرة للانتقال بدون احتكاك على طول نصف دائرة نصف قطرها $a$ .( الشكل في الأسفل).

النقطة $P$ مربوطة إلى خيط مطاطي حيث يثبت الطرف الآخر في $O'(OO'=a)$. للخيط ثابت مرونة $k$ و طول و هو فارغ $l_0$. تحدد النقطة $P$ بالزاوية $(Ox,OP)=\theta$.

1. ا/ عبر عن الشعاع $\overrightarrow{O'P}$ بدلالة $a,\theta$ في القاعدة القطبية $\left(\vec{u}_r=\dfrac{OP}{a},\vec{u}_\theta\right)$. إستنتج عبارة الشدة $O'P$.

ب/ عبر عن التوتر $\vec{T}$ للخيط بدلالة $a,k,l_0$ و $\theta$ في نفس القاعدة.

2. ا/ حدد عبارة شعاع السرعة $\vec{v}$ في القاعدة القطبية.

ب/ نرمز بـــ $\vec{F}$ لمحصلة القوى المطبقة على الكرية $P$ . إعط عبارة الاستطاعة $\vec{F}.\vec{v}$ بدلالة $a$ و $\theta$.

ج/ إستنتج الطاقة الكامنة $E_p$ التي تشتق منها $\vec{F}$.

3. ا/ نفترض العلاقات التالية بين الثوابت محققة:

$$a=\frac{2mg}{k}\quad,\quad l_0=\sqrt{3}\left(a-\frac{mg}{k}\right)$$

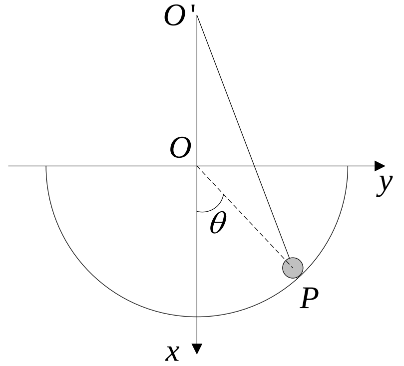
ما هما موضعي التوازن $\theta_1$ و $\theta_2$ من أجل

Quelles sont les positions d'équilibre $\theta_1$ et $\theta_2$ pour $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ?

(b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.

؟ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ب/ أدرس استقرار التوازنين المحصل عليهما.




**Exercice 6.15**

Deux pendules simples de même longueur $l$, sont suspendus au même point $O$. Les billes $B_1$ et $B_2$ qui les constituent possèdent les masses $m_1$ et $m_2$, et seront supposées ponctuelles. Au départ, $B_1$ et $B_2$ sont en équilibre. On écarte $B_1$ d'un angle $\alpha_0$ , puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

1/ Déterminer les vitesses $v_1$ et $v_2$ de $B_1$ et $B_2$ après le choc, en fonction de $\alpha, l, g$ et du rapport des masses $x = m_1/m_2$ ; ainsi que les angles d'écart maximum $\alpha_1$ et $\alpha_2$ de $B_1$ et $B_2$ après le choc, en fonction de $\alpha$ et $x$ dans les deux cas :

a/ en supposant la collision parfaitement élastique (que se passe-t-il pour $x \succ 1$ ; $x = 1$ ; $x \prec 1$ ?) ;

b/ si on enduit $B_1$ et $B_2$ de glu, de manière à rester collées après la collision (choc mou).

2/ Application numérique : $\alpha_0 = 60°$.

a/ On se place dans le cas1/a/ :

pour quelle valeur de $x$ les pendules remontent-ils en sens contraires, du même angle que l'on déterminera ?

b/ Pour $x = 2$ , déterminer les angles d'écart dans les cas $1/a/$ et $1/b/$.

**تمرين 15.6**

يعلق في نفس النقطة $O$ نواسان بسيطان لهما نفس الطول $l$. الكريتان $B_1$ و $B_2$ اللتان تشكلهما لهما كتلتين $m_1$ و $m_2$ ، و نفترضهما نقطيتين. في البداية $m_1$ و $m_2$ في توازن. نزيح $B_1$ بزاوية $\alpha_0$، ثم نتركها بدون سرعة ابتدائية.

1/ حدد السرعتين $v_1$ و $v_2$ لـــ $m_1$ و $m_2$ بعد الصدم، بدلالة $g, l, \alpha$ و نسبة الكتلتين $x = m_1/m_2$ ؛ و كذا زاويتي الانحراف الأعظمي $\alpha_1$ و $\alpha_2$ لـــ $m_1$ و $m_2$ بعد الصدم، بدلالة $\alpha$ و $x$ في الحالتين:

ا/ بافتراض الاصطدام كامل المرونة، ( ما الذي يحدث من أجل $x \succ 1$ ؛ $x = 1$ ؛ $x \prec 1$ ؟)؛

ب/ لو طلينا $m_1$ و $m_2$ و بغراء بحيث تبقيان ملتصقتين بعد الصدم ( الصدم اللين).

2/ تطبيق عددي: $\alpha_0 = 60°$ .

ا/ نتخذ الحالة1/ا/:

من أجل أي قيمة لـــ $x$ يصعد النواسان في اتجاهين متعاكسين، بنفس الزاوية الواجب تعيينها؟

ب/ من أجل $x = 2$ ، حدد زاويتي الانحراف في الحالتين1/ا/ و 1/ب/.

## Corrigés des exercices de 6.1 à 6.15 — حلول التمارين من 1.6 إلى 15.6

**Exercice 6.1 :**

1/ Pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, il faut que la relation $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ soit vérifiée. Les équations suivantes nous permettent d'en déduire les trois constantes inconnues :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\gamma = -1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

L'expression de la force $\vec{F}$ est donc :

$$\vec{F} = (x + 2y + 4z)\vec{i} + (2x - 3y - z)\vec{j} + (4x - y + 2z)\vec{k}$$

2/ Nous savons que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x, y, z)$ ; partant de cela et par une suite de raisonnements, nous arrivons à l'expression du potentiel dont dérive la force ci dessus :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x \Rightarrow -E_p = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz + f(y, z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial y} = F_y \Rightarrow 2x + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 2x - 3y - z \Rightarrow f(x, y) = -\frac{3}{2}y^2 - yz + g(z)$$

$$-E_p = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + g(z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial z} = F_z \Rightarrow 4x - y + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 4x - y + 2z \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 2z$$

$$g(z) = z^2 + C^{te}$$

L'expression du potentiel est donc :

$$E_p = -\frac{1}{2}x^2 - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + yz - z^2 + C^{te}$$

Pour déterminer la constante $C^{te}$, on doit revenir aux conditions initiales :

$$E_p(0,0,0) = 2 \Rightarrow C^{te} = 2$$

Finalement l'expression de l'énergie potentielle (ou potentiel) demandée est :

$$\boxed{E_p = -\frac{1}{2}x^2 - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + yz - z^2 + 2}$$

**Exercice 6.2 :**

1/ Pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, il est impérative que l'équation $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ soit vérifiée, c'est-à-dire que les trois équations suivantes soient vérifiées à leur tour. De ces équations on en déduit la valeur $X(x, z)$. De l'énoncé on en déduit que :

$$F_x = X(x, z) \;\; , \;\; F_y = yz \;\; , \;\; F_z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow F_x = C^{te} \to (1)$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z} = 2x \Rightarrow F_x = 2xy + C^{te} \to (2)$$

La première solution $(1)$ ne convient pas car $F_x = X(x,z)$ doit être fonction de $x$ et $z$. Seule la deuxième solution $(2)$ convient. D'après les conditions initiales la constante $C^{te}$ est nulle. D'où : $\boxed{F_x = X(x,z) = 2xz}$

Pour calculer l'énergie potentielle on utilise la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x \Rightarrow -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2xz \Rightarrow -E_p = x^2 z + f(y,z)$$
$$-\frac{\partial E_p}{\partial y} = F_y \Rightarrow 0 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = yz \Rightarrow f(y,z) = \frac{1}{2}y^2 z + g(z)$$
$$-E_p = x^2 z + \frac{1}{2}y^2 z + g(z)$$
$$-\frac{\partial E_p}{\partial z} = F_z \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}y^2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0$$
$$\Rightarrow g(z) = C^{te}$$

Le résultat est $E_p = -x^2 z - \frac{1}{2}y^2 z + C^{te}$ . D'après les conditions initiales sur l'énergie potentielle, la constante $g(z) = C^{te}$ est nulle$(z = 0 \Leftrightarrow E_p = 0)$. Le résultat final est :

$$\boxed{E_p = -x^2 z - \frac{1}{2}y^2 z}$$

2/ Calcul du travail par deux méthodes.

**<u>Première méthode</u> :**

Nous connaissons la formule :

$$dW = -dE_p \quad , \quad dW = \vec{F}.\vec{dl} \quad , \quad W = \int_L \vec{F}.\vec{dl} = E_p(B) - E_p(A)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \\ E_p = z\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = h\theta R^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = h\theta R^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_p(A) = 0 \\ E_p(B) = h\pi R^2\left(\cos^2\pi + \frac{1}{2}\sin^2\pi\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = E_p(B) - E_p(A) = h\pi R^2} \to (3)$$

**<u>Deuxième méthode</u> :**

Nous calculons directement le travail en utilisant la formule :

$$W=\int_A^B\left[F_x dx+F_y dy+F_z dz\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}x=R\cos\theta\\dx=-R\sin\theta.d\theta\\F_x=2xz=2Rh\theta\cos\theta\end{array}\right|\Rightarrow F_x dx=-2R^2h\theta\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}y=R\sin\theta\\dy=R\cos\theta.d\theta\\F_y=yz=2Rh\theta\sin\theta\end{array}\right|\Rightarrow F_y dy=R^2h\theta\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}z=h\theta\\dz=R.d\theta\\F_z=x^2+\frac{1}{2}y^2=R^2h\left(\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\end{array}\right|\Rightarrow F_z dz=R^2h\left(\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$W=\int_0^\pi R^2h\left(-\theta\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$W=R^2h\left[\theta\left(\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right]_0^\pi\Rightarrow\boxed{W=R^2h\pi}\rightarrow(4)$$

Les deux résultats $(3)$ et $(4)$ sont identiques.

3/ La force étant conservatrice, le travail est le même quelque soit le chemin suivi.

**Exercice 6.3 :**

Quelque soit le chemin le travail de la force est $W=\int\vec{F}d\vec{r}$

a/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant le chemin rectiligne.

**Rappel mathématique :** Pour trouver l'équation d'une droite passant par les deux points $P(x_P, y_P, z_P)$ et $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, on doit poser les équations suivantes :

$$\frac{x-x_P}{x_Q-x_P}=\frac{y-y_P}{y_Q-y_P}=\frac{z-z_P}{z_Q-z_P}$$

Puis en déduire l'équation de la trajectoire :

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z+1}{-1}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}y=2x\\z=-x\\z=-\frac{1}{2}y+1\end{array}\right.$$

Pour écrire l'expression de la force $\vec{F}$ et du déplacement élémentaire $d\vec{r}$, en fonction de la seule variable $x$ dans le repère cartésien, on remplace $y$ et $z$ :

$$\vec{F}=5x^2\vec{u}_x-x^2\vec{u}_y+2x^2\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}d\vec{r}=dx\vec{u}_x+dy\vec{u}_y+dz\vec{u}_z\\y=2x\Rightarrow dy=2dx\\z=-x\Rightarrow dz=-dx\end{array}\right|\Rightarrow d\vec{r}=dx\vec{u}_x+2dx\vec{u}_y-dx\vec{u}_z$$

Calculons le travail de la force dans le premier cas :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\,\overrightarrow{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = x^2 dx \\ W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 x^2 dx\end{array}\right| \Rightarrow W = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 \Rightarrow \boxed{W = \frac{7}{3}J}$$

b/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant la courbe brisée $ABCD$.

Dans ce cas, on divise le travail total $W_{AD}$ en trois travaux $W_{BC}, W_{AB}$ et $W_{CD}$ effectués suivant les segments $BC, AB$ et $CD$.

**Suivant le segment rectiligne** $AB$ : seule $x$ varie, $y = 2$ et $z = -1$ . Les expressions respectives de la force et du déplacement élémentaire sont :

$$\vec{F} = \left(x^2 + 4\right)\vec{u}_x - x\vec{u}_y + 2x\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{u}_x$$

Calculons le travail pour cette partie du chemin :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\,\overrightarrow{dl} = \left(x^2 + 2\right)dx \\ W_{AB} = \int_1^2 \left(x^2 + 4\right)dx\end{array}\right| \Rightarrow W_{AB} = \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_1^2 \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \frac{19}{3} = 6,33J}$$

**Suivant le segment rectiligne** $BC$ : on a $y$ variable, $x = 2$ et $z = -1$. Les expressions respectives de la force et du déplacement élémentaire sont :

$$\vec{F} = \left(4 + y^2\right)\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + 2y\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dl} = dy\vec{u}_y$$

Calculons le travail pour cette partie du chemin :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\,\overrightarrow{dl} = -2dy \\ W_{BC} = \int_2^4 -2dy\end{array}\right| \Rightarrow W_{BC} = \left[-2y\right]_2^4 \Rightarrow \boxed{W_{BC} = -4J}$$

**Suivant le segment rectiligne** $CD$ : on a $z$ variable, $x = 2$ et $y = 4$. Les expressions respectives de la force et du déplacement élémentaire sont :

$$\vec{F} = \left(4 + 16\right)\vec{u}_x + 2z\vec{u}_y + 8\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dl} = dz\vec{u}_z$$

Calculons le travail pour cette partie du chemin :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}\,\overrightarrow{dl} = 8dz \\ W_{CD} = \int_{-1}^{-2} 8dz\end{array}\right| \Rightarrow W_{CD} = \left[8z\right]_{-1}^{-2} \Rightarrow \boxed{W_{CD} = -8J}$$

Le travail total de $A$ à $D$ est donc :

$$W_{AD} = W_{AB} + W_{BC} W_{CD} \Rightarrow \boxed{W_{AD} = -5,67J}$$

c/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant la courbe définie par les équations paramétriques $x = t$ , $y = t^2$ , $z = t$

Remplaçons dans l'expression de la force $x = t$ , $y = t^2$ , $z = t$ :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=\left(t^2+t^4\right)\vec{u}_x+t^2\vec{u}_y+t^3\vec{u}_z\\ dx=dt\ \ ,\ dy=2tdt\ \ ,\ dz=dt\\ \vec{F}\overrightarrow{dr}=\left(t^2+t^4\right)dt+2t^3dt+t^3dt\end{array}\right|\Rightarrow dW=\left(t^4+3t^3+t^2\right)dt$$

Le travail de la force dans ce cas est donc :

$$W=\int_0^2\left(t^4+3t^3+t^2\right)dt\Rightarrow\boxed{W=28J}$$

**Exercice 6.4 :**

a/ Puisque la force est centrale et ne dépend que de seulement, son énergie potentielle admet une symétrie sphérique qui ne varie aussi qu'en fonction de . La relation entre la force et l'énergie potentielle est donc $\vec{F}=-\vec{\nabla}E_p$ . Et puisque la variable est unique alors la relation est totalement vérifiée dans la composante radiale $\dfrac{dE_p}{dr}=\dfrac{k}{r^2}$. De là on peut en déduire la valeur de l'énergie potentielle :

$$E_p=\int\frac{k}{r^2}dr\Rightarrow E_p=-\frac{k}{r}+C^{te}$$

Pour déterminer la constante de l'intégration on considère pour $E_p=0$ on a $r\to\infty$, et par conséquent $C^{te}=0$. D'où :

$$\boxed{E_p=-\frac{k}{r}}\to(1)$$

L'énergie totale $E$ est l'énergie mécanique, c'est-à-dire la somme des deux énergies : potentielle $E_p$ et cinétique $E_c$ .

Puisque le mouvement est circulaire et la trajectoire un cercle on a $v=\dot{\theta}$ , $\dot{\theta}$ représente la vitesse angulaire. Donc :

$$\left.\begin{array}{l}E_c=\dfrac{1}{2}mv^2\\ v=\dot{\theta}r\end{array}\right|\Rightarrow E_c=\frac{1}{2}\underbrace{m\dot{\theta}^2r}_{F=F_c}.r$$

$$E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r^2}.r\Rightarrow\boxed{E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r}}\to(2)$$

En additionnant les équations $(1)$ et $(2)$, membre à membre, on obtient l'énergie totale :

$$E=\frac{1}{2}\frac{k}{r}-\frac{k}{r}\Rightarrow\boxed{E=-\frac{1}{2}\frac{k}{r}}$$

b/ On en déduit l'expression de la vitesse de l'équation $(2)$ :

$$E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\boxed{v=\sqrt{\frac{k}{mr}}}$$

c/ Calcul du moment cinétique en coordonnées cylindriques par rapport au centre du cercle :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\vec{r}\wedge m\vec{v}\\ \vec{v}=\underbrace{\vec{v}_r}_{\vec{0}}+\vec{v}_\theta=r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow m\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ r & 0 & 0\\ 0 & r\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{L}_O=mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

Le module du moment cinétique est donc égal à :

$$\left.\begin{array}{l} L_O = mr^2\dot{\theta} \\ \dot{\theta} = \dfrac{v}{r} = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{k}{mr}} \end{array}\right| \Rightarrow L_O = mr^2 \frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{mr}} \Rightarrow \boxed{L_O = \sqrt{mkr}}$$

**<u>Exercice 6.5</u> :**

a/ Remarquons que la force est constante. Le travail effectué est donc :

$$dW = \vec{F}\,\overrightarrow{dr}$$

$$W = \int\left(F_x dx + F_y dy + \underbrace{F_z dz}_{0}\right) \Rightarrow \boxed{W = \int_0^{-3} F_x dx + \int_0^{4} F_y dy}$$

$$W = \int_0^{-3} -7dx + \int_0^{4} 6dy = 21 + 24 \Rightarrow \boxed{W = 45J}$$

b/La puissance moyenne est :

$$\boxed{P_{moy} = \frac{W}{t}} \ , \ P_{moy} = \frac{45}{0,6} \Rightarrow \boxed{P_{moy} = 75W}$$

c/ Pour calculer la variation de l'énergie cinétique, appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_i \Rightarrow \boxed{\Delta E_c = 45J}$$

d/ En considérant la vitesse initiale nulle, la vitesse finale est :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \Delta E_c \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}}} \ , \ \boxed{v = 9,48ms^{-1}}$$

e/ La variation de l'énergie potentielle n'est autre que le travail fourni avec un signe négatif :

$$\boxed{\Delta E_p = -W} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = -45J}$$

D'après les résultats obtenus on remarque que $\boxed{\Delta E_p = -\Delta Ec}$ , on explique cela comme suit :

La particule quitte l'origine sans vitesse initiale, c'est-à-dire qu'elle n'avait initialement aucune énergie cinétique, mais par contre elle possédait une énergie potentielle. En arrivant au point $A$ avec la vitesse calculée précédemment elle a acquit donc une énergie cinétique exactement égale à l'énergie potentielle qui a été totalement dépensée. Au point $A$ l'énergie potentielle est nulle $\left(E_{p,A} = 0\right)$ .

Calculons le travail fourni par la force lors de son déplacement de $A$ à $B$ :

$$dW_{AB} = \vec{F}\,\overrightarrow{dr}$$

$$W_{AB} = \int\left(F_x dx + F_y dy\right) \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_{-3}^{7} F_x dx + \int_{4}^{16} F_y dy}$$

$$W_{AB} = \int_{-3}^{7} -7dx + \int_{4}^{16} 6dy = -28 + 72 \Rightarrow \boxed{W_{AB} = 44J}$$

On peut calculer à présent l'énergie potentielle $E_{p,B}$ au point $B$ :

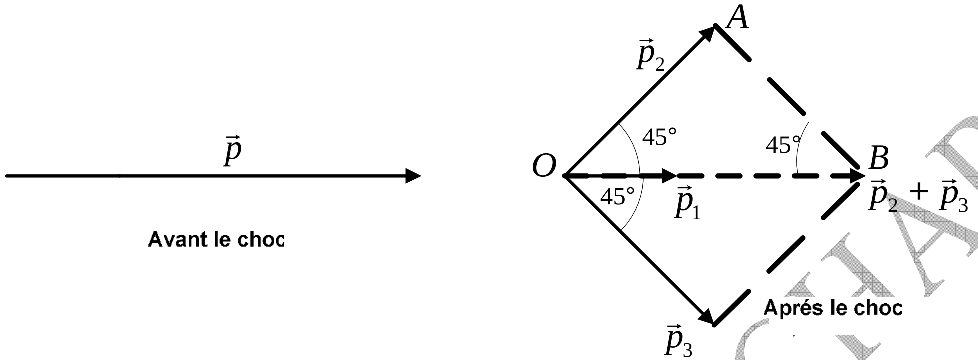
$$E_{P,A} - E_{p,B} = -W_{AB} \Rightarrow E_{p,B} = 44 \ , \ \boxed{E_{p,B} = 44J}$$

**Exercice 6.6 :**

D'après le principe de la conservation de la quantité de mouvement : la quantité de mouvement avant l'explosion est égale aux quantités de mouvement après l'explosion :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow M\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3$$

Puisque $\vec{p}$ et $\vec{p}_1$ sont horizontales, la résultante de $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$ est aussi horizontale et le quadrilatère formé est un losange. (Voir figure)




En utilisant la loi des sinus on peut écrire :

$$\frac{p_2}{\sin 45°} = \frac{p_3}{\sin 45°} \Rightarrow \boxed{v_2 = v_3}$$

A partir de la figure ci-dessus on peut calculer l'intensité de la résultante de $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$ :

$$\vec{R} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow R = \sqrt{p_2^2 + p_3^2} \Rightarrow \boxed{R = mv_2\sqrt{2}}$$

Il ne reste plus qu'à calculer le module des vitesses demandées :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \underbrace{\vec{p}_2 + \vec{p}_3}_{\vec{R}} \Rightarrow p = p_1 + R \Rightarrow Mv = mv_1 + mv_2\sqrt{2}$$

$$M = 3m \Rightarrow v = v_1 + v_2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{3v - v_1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{v_2 = v_3 = 11,3ms^{-1}}$$

**Exercice 6.7 :**

1/ Pour calculer la vitesse, on applique au système $(M + m)$ isolé les principes de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Puisque le choc est élastique, la vitesse de la masse $m$ diffère de la vitesse de la masse $M$ .

$$p_1 = p_2 \ , \ mv_0 = mv_1 + Mv \Rightarrow mv_1 = mv_0 - Mv \rightarrow (1)$$

$$E_{C1} = E_{C2} \ , \ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow mv_1^2 = mv_2^2 - Mv^2 \rightarrow (2)$$

On élève au carré l'équation $(1)$ et on multiplie l'équation $(2)$ par la masse $m$, puis on procède à une soustraction des équations obtenues et enfin déduire la vitesse $v$ :

$$(1)^2 - (2).m \Rightarrow \boxed{v = \frac{2mv_0}{M + m}} \ , \ \boxed{v = 0,33ms^{-1}}$$

Pour calculer la compression maximale on applique le principe de la transformation mutuelle de l'énergie. La masse $M$ s'arrête après avoir parcouru la distance maximale $x_0$

et le ressort se comprime de la même valeur. Toute l'énergie cinétique acquise par la collision avec $m$ s'est transformée totalement en énergie potentielle élastique que le ressort emmagasine.

$$E_c = E_p \quad , \quad \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \boxed{x_0 = v\sqrt{\frac{M}{k}}} \quad , \quad \boxed{x_0 = 2,33cm}$$

2/ Puisque le choc est mou la vitesse de la masse $m$ est égale à la vitesse de la masse $M$ . Pour calculer la vitesse on applique le principe de la conservation de la quantité de mouvement au système $(M+m)$ :

$$p_1' = p_2' \quad , \quad mv_0 = (M+m)v' \Rightarrow \boxed{v' = \frac{mv_0}{M+m}} \quad \boxed{v' = 0,17ms^{-1}}$$

3/ Le choc est mou. L'énergie cinétique dépensée est égale à l'énergie potentielle emmagasinée :

$$E_c = E_p \quad , \quad \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}kx_0'^2 \Rightarrow \boxed{x_0' = v'\sqrt{\frac{M+m}{k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{k(m+M)}}} \quad ,$$

$$\boxed{x_0' = 2,33cm}$$

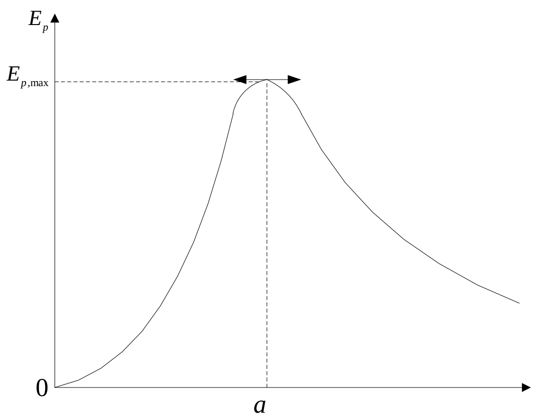
Pour obtenir le travail demandé on applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_c = \sum W \\ \Delta E_c = \Delta E_p \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}kx_0'^2} \quad , \quad \boxed{W = 2,17J}$$

**Exercice 6.8 :**

1/ Le graphe ci-dessous représente les variations de l'énergie potentielle en fonction de la distance .

| | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dE_p}{dr} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}$ | | + | 0 | − | |
| $\frac{d^2E_p}{dr^2}$ | | + | − | + | |
| $\left(\frac{d^2E_p}{dr^2}\right)\left(\frac{dE_p}{dr}\right)$ | | + | | − | |
| $E_p(r)$ | | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | |




2/ L'énergie potentielle atteint sa valeur maximale quand sa première dérivée par rapport à s'annule :

$$\frac{dE_p}{dt} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2} = 0 \Rightarrow r = a$$

$$r = a \Rightarrow \boxed{E_{p,\max} = Ka^2e^{-1}}$$

3/ Les positions d'équilibre correspondent à l'annulation de la dérivée première $\frac{dE_p}{dt} = 0$, où $r \in \left]-\infty, +\infty\right[$ .

$$\frac{dE_p}{dt} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \{0, \pm a, \pm\infty\}}$$

4/ Les positions d'équilibre stable correspondent aux positions pour lesquelles $\frac{d^2E_p}{dt^2} \succ 0$, et $\frac{dE_p}{dt} = 0$ de là et d'après l'énoncé on obtient :

$$\frac{d^2E_p}{dt^2} = 2K\left(1-5\frac{r^2}{a^2}+2\frac{r^4}{a^2}\right)e^{-\frac{r^2}{a^2}} \succ 0 \Rightarrow \boxed{r = \{0, \pm\infty\}}$$

5/ L'expression de la force $\vec{F}(M)$ nous la déduisons de la formule $\vec{F}(M) = -\vec{\nabla}E_p$ :

$$\vec{F}(M) = -\vec{\nabla}E_p \Rightarrow \vec{F}(M) = -\frac{dE_p}{dt}\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{F}(M) = -2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}.\vec{u}_r}$$

**Exercice 6.9 :**

1/ Calcul de la vitesse $v_B$ : $\frac{1}{2}mv_B^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{0} = mgH \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gH}}$

2/ Expression de $h$ en fonction de  et $\theta$ : $h = r - r\cos\theta \Rightarrow \boxed{h = r(1-\cos\theta)}$

3/ Calcul de la vitesse $v_C$ au point $C$ en fonction de $h$ et $v_B$ :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mgh \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{-2gh + v_B^2}}$$

4/ La valeur de la réaction $R$ en fonction de $m, r, \theta, v_B$ et $g$ :

La particule est soumise aux deux forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$. Le mouvement étant circulaire, la résultante est une force normale. Projetant les forces sur l'axe normal et déduisons la réaction :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \\ R - mg\cos\theta = ma_N \\ a = a_N = \frac{v_C^2}{r} = \frac{1}{r}\left(-2gh + v_B^2\right) \\ h = r(1-\cos\theta) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{R = 3mg\cos\theta - 2mg + \frac{m}{r}v_B^2} \rightarrow (1)$$

5/ Pour que la particule atteigne au moins le point $S$ avec une vitesse nulle il faut qu'elle ait acquis au point $B$ une vitesse minimale qui doit vérifier l'équation :

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_S^2}_{0} - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mg(2r) \Rightarrow \boxed{v_{B,\min} = \sqrt{4gr}}$$

6/ Pour calculer la réaction aux points $B$ et $S$ exploitant l'équation $(1)$ et remplaçant $h$ et $\theta$ :

Au point $B$ on a : $\theta = 0, h = 0$, d'où :

$$R_B = 3mg\cos 0 - 2mg + \frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$R_B = 3mg - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_B = 5mg}$$

Au point $S$ on a $\theta = \pi, h =$ , d'où :

$$R_S = 3mg\cos\pi - 2mg + \frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$R_S = -3mg - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_S = -mg}$$

Quand la particule se déplace entre les points cités plus haut le signe de la réaction change du positif au négatif. Cela prouve l'inversion du sens de la réaction au point $I$ (On comprend de cela que la réaction s'annule au point $I$ ). Le point où s'annule la réaction est défini par l'angle $\theta_I$ que nous voulons déterminer (toujours à partir de l'équation $(1)$ )

$$R_I = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$0 = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \cos\theta_I = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_I \approx 132°}$$

7/ Pour que la réaction ne s'annule pas entre les points $B$ et $S$, c'est-à-dire qu'elle doit rester positive tout au long de l'arc $BS$, il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$R \geq 0 \Rightarrow 3mg\cos\pi - 2mg + m\frac{v_{B,0}^2}{r} \geq 0$$

$$\boxed{v_{B,0} \geq \sqrt{5rg}}$$

La valeur de $H$ correspondante est :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_{B,0}^2 = mgH \\ v_{B,0}^2 \geq 5rg \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{H \geq \frac{5}{2}r}$$

**<u>Exercice 6.10</u> :**

**<u>Première collision</u> :**

Soit $\vec{v}_1$ la vitesse initiale de la bille $m_1$ avant le choc, pendant que la bille $m_2$ est à l'état de repos. Après la première collision, la vitesse de la bille $m_1$ devient $\vec{v}_1^{'}$ , au moment où la bille $m_2$ acquiert la vitesse $\vec{v}_2$. Appliquons les principes de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pour pouvoir écrire :

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1^{'} + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow m_1v_1^{'} = m_1v_1 - m_2v_2 \rightarrow (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow m_1v_1^{'2} = m_1v_1^2 - m_2v_2^2 \rightarrow (2)$$

Eliminons l'inconnue $v_1^{'}$ entre les deux équations $(1)$ et $(2)$, en élevant au carré la première et en multiplions la deuxième par $m_1$ , puis on en déduit la vitesse $v_2$ :

$$(1)^2 \Rightarrow m_1^2v_1^{'2} = m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 - 2m_1m_2v_1v_2 \rightarrow (3)$$

$$(2)\,m_1 \Rightarrow\rightarrow m_1^2v_1^{'2} = m_1^2v_1^2 - m_1m_2v_2^2\;(4)$$

$$(3) = (4) \Rightarrow m_2^2v_2^2 - 2m_1m_2v_1v_2 = m_1m_2v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}}$$

**Deuxième collision:**

Soit $\vec{v}_2$ la vitesse de $m_2$ acquise après le premier choc, pendant que la bille $m_3$ est au repos. Après le deuxième choc la vitesse de la bille $m_2$ devient $\vec{v}_2^{'}$ , et $\vec{v}_3$ la vitesse acquise par la bille $m_3$ . Appliquons les principes de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pour pouvoir écrire :

$$m_2\vec{v}_2 = m_2\vec{v}_2^{'} + m_3\vec{v}_3 \Rightarrow m_2 v_2^{'} = m_2 v_2 - m_3 v_3 \rightarrow (5)$$

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^{'2} + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 \Rightarrow m_2 v_2^{'2} = m_2 v_2^2 - m_3 v_3^2 \rightarrow (6)$$

Eliminons l'inconnue $v_2^{'}$ entre les équations $(5)$ et $(6)$, en élevant au carré la première et en multipliant la deuxième par $m_2$ , et puis en déduire la vitesse $v_3$ :

$$(5)^2 \Rightarrow m_2^2 v_2^{'2} = m_2^2 v_2^2 + m_3^2 v_3^2 - 2m_2 m_3 v_2 v_3 \rightarrow (7)$$

$$(6)m_2 \Rightarrow\rightarrow m_2^2 v_2^{'2} = m_2^2 v_2^2 - m_2 m_3 v_3^2 \rightarrow (8)$$

$$(7) = (8) \Rightarrow m_3^2 v_3^2 - 2m_2 m_3 v_2 v_3 = m_2 m_3 v_3^2 \Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{2m_2 v_2}{m_2 + m_3}}$$

Remplaçant $v_2$ par sa valeur calculée précédemment pour obtenir :

$$\boxed{v_3 = \frac{4m_1 m_2 v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}} \rightarrow (9)$$

D'après l'énoncé les grandeurs $v_1, m_1, m_3$ sont des constantes, mais $v_3$ est variable puisqu'elle est fonction de $m_2$ dont nous devons déterminer la valeur pour que $v_3$ soit maximale. Le problème se transforme donc en fonction mathématique $v_3 = f(m_2)$ que nous devons dériver, et de là chercher une valeur de $m_2$ pour laquelle la dérivée de $v_3$ par rapport à la variable $m_2$ s'annule.

Pour simplifier posons $m_2 = x$ , $v_3 = y$ et écrivons l'équation $(9)$ sous la forme :

$$\boxed{y = \frac{4m_1 v_1 x}{(m_1 + x)(x + m_3)}}$$

Dérivons l'équation $y = f(x)$ pour obtenir :

$$\frac{dy}{dx} = 4m_1 v_1 \frac{(m_1 + x)(x + m_3) - x\left[(m_1 + x) + (x + m_3)\right]}{(m_1 + x)^2 (x + m_3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4m_1 v_1 \frac{m_1 m_3 - x^2}{(m_1 + x)^2 (x + m_3)^2}$$

$y$ atteint sa valeur maximale quand $\frac{dy}{dt} = 0$ , d'où :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow m_1 m_3 - x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = m_2 = \sqrt{m_1 m_3}}$$

La valeur obtenue est celle de la masse $m_2$ pour que la bile $m_3$ acquière une vitesse maximale $v_{,\max}$ après que la bille $m_2$ l'ait percutée. Quant à l'expression de la vitesse maximale on l'obtient en remplaçant $m_2$ dans l'équation $(9)$:

$$\boxed{v_{,\max} = \frac{4m_1\sqrt{m_1 m_3}\,v_1}{\left(m_1 + \sqrt{m_1 m_3}\right)\left(\sqrt{m_1 m_3} + m_3\right)}}$$

**Exercice 6.11 :**

1/ La force de frottement suivant le segment rectiligne $AB$ est :

$$\left.\begin{array}{l} f = \mu N \\ N = mg\cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f = \mu mg\cos\alpha} \;,\; \boxed{f = 4,9N}$$

2/ pour calculer la vitesse acquise par le corps au point $B$, appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_i$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = mga\sin\alpha - fa \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2a\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}} \;,\; \boxed{v_B = 3,88m.s^{-1}}$$

Par la même méthode calculons la vitesse $v$ en négligeant les frottements dans la partie $BC$ du chemin suivi :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = mg\left(2a - l_0\right)\sin\alpha \Rightarrow \boxed{v = \left[g\left(2a - l_0\right)\sin\alpha + \frac{1}{2}v_B^2\right]^{1/2}} \;,\; \boxed{v \approx 4,6m.s^{-1}}$$

3/ Toute l'énergie cinétique acquise par le corps jusqu'à son arrivée au contact du ressort se transforme en énergie potentielle élastique dans le ressort, d'où :

$$\Delta E_c = \Delta E_p \;,\; \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{x = v\sqrt{\frac{m}{k}}} \;,\; \boxed{x = 14,5cm}$$

4/ Dans ce cas c'est l'inverse qui se produit : toute l'énergie potentielle que le ressort a emmagasinée au cours de sa compression se transforme de nouveau en énergie cinétique, de telle façon que le corps va être relancé avec la même vitesse que celle avec laquelle il a percuté le ressort. Nous allons le vérifier :

$$\Delta E_p = \Delta E_c \;,\; \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = x\sqrt{\frac{k}{m}}} \;,\; \boxed{v = 4,58ms^{1}}$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on va calculer la distance $d$ que remonte le corps après qu'il ait quitté le ressort :

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -mgd\sin\alpha \Rightarrow \boxed{d = \frac{v^2}{2g\sin\alpha}} \;,\; \boxed{d \approx 1,23m}$$

**Exercice 6.12 :**

1/ On considère le plan horizontal passant par le centre de la sphère comme référentiel de l'énergie potentielle $\left(E_{p,O} = 0\right)$ .

L'énergie potentielle au point $M_0$ est :

$$\left.\begin{array}{l} E_{M_0} = mgh_0 \\ h_0 = mg\cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow E_{M_0} = mgR\cos\alpha$$

L'énergie potentielle au point $M$ est :

$$\left.\begin{array}{l} E_M = mgh + \dfrac{1}{2}mv^2 \\ h = R\cos\theta \\ v = \dot{\theta}R \end{array}\right| \Rightarrow E_M = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2R^2$$

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie mécanique on en déduit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ :

$$E_{M_0} = E_M \Rightarrow mgR\cos\alpha = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2R^2$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{2g}{R}\left(\cos\alpha - \cos\theta\right)}$$

2/ Pour calculer la réaction, on fait l'inventaire des forces, on les représente puis on les projette sur l'axe normal, et on remplace la vitesse angulaire par sa valeur que nous avons calculée dans la première question. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} R - P\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = ma_N \\ a_N = \dot{\theta}^2R \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\alpha\right)}$$

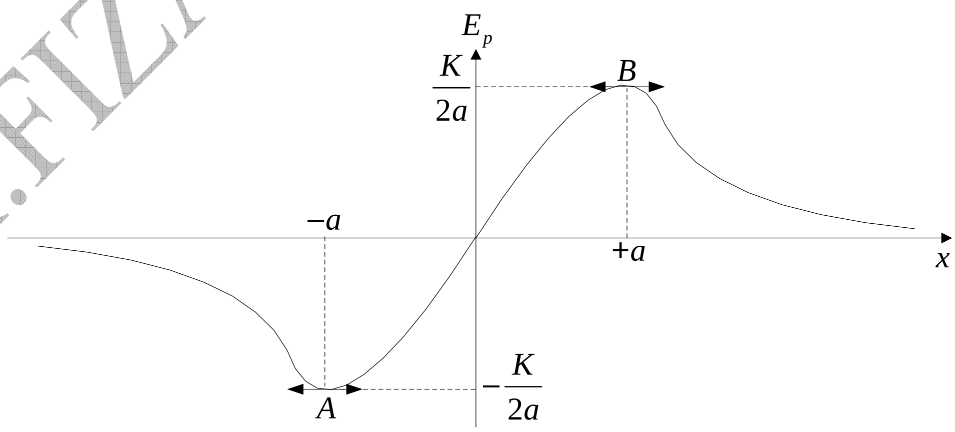
3/ Le point matériel quitte la surface de la sphère quand la réaction s'annule pour un angle bien déterminé que nous nous proposons de calculer :

$$N = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_0 \approx 48°}$$

**Discussion :** L'angle sous lequel le point matériel quitte la sphère est indépendant du rayon et de la masse de la sphère. Cependant ce résultat change en présence d'une vitesse initiale ou de frottement à la surface.

**Exercice 6.13 :**

1/ L'allure générale de la courbe est la suivante :




2/ Les positions d'équilibre stable sont caractérisées par les deux conditions :

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \ , \ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} \succ 0$$

Les positions d'équilibre instable sont caractérisées par les deux conditions :

$$\frac{dE_p}{dx}=0 \;\; , \;\; \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} \prec 0$$

En dérivant $E_p$ par rapport à $x$ deux fois de suite, on obtient :

$$\frac{dE_p}{dx}=K\frac{a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm a$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}=2Kx\frac{\left(x^2-3a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^3} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=+a} \prec 0 \\ \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=-a} \succ 0 \end{array} \right.$$

Nous remarquons que la position d'équilibre stable est $(A)$ d'abscisse $x=-a$, mais la position d'équilibre instable est $(B)$ d'abscisse $x=+a$ .

**<u>Exercice 6.14</u> :**

1.a/ On remarque sur a figure de l'énoncé que :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OO'}=a\vec{u}_x \\ \overrightarrow{OP}=a\vec{u}_r \end{array} \right| \Rightarrow \overrightarrow{O'P}==a\left(\vec{u}_x+\vec{u}_r\right)$$

Exprimons le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{u}_\theta$ pour obtenir l'expression demandée :

$$\vec{u}_x=\cos\theta.\vec{u}_r-\sin\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O'P}=a\left(1+\cos\theta\right).\vec{u}_r-a\sin\theta.\vec{u}_\theta}$$

Le module de ce vecteur est :

$$\left. \begin{array}{l} \left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{\left[a\left(1+\cos\theta\right)\right]^2+\left[a\sin\theta\right]^2} \\ \left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{2a^2\left(1+\cos\theta\right)} \\ 1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

b/ la bille est soumise à une force de rappel d'expression $\vec{T}=-k\left(l-l_0\right)\vec{u}$ , où $l=\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire suivant la direction $\overrightarrow{O'P}$. On peut décomposer le vecteur $\vec{u}$ en deux composantes : $\vec{u}=\cos\dfrac{\theta}{2}\vec{u}_r-\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{u}_\theta$ .

Donc la tension du fil élastique est :

$$\boxed{\vec{T}=-k\left[\left(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r-\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)\right]}$$

2.a/ Le vecteur vitesse est défini par l'expression :

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{a}}_{0}\vec{u}_r + a\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

b/ La force $\vec{F}$ est la résultante de trois forces : le poids $\vec{P}$ , la tension $\vec{T}$ et la réaction $\vec{R}$ :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$$

$$\wp = \vec{F}.\vec{v} = \left(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}\right)\vec{v}$$

$$\vec{P}\vec{v} = \left(mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta\right)a\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{P}\vec{v} = -a\dot{\theta}mg\sin\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = -k\left[\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r - \sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)\right]a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = \left[-k2a\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r + k2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta + kl_0\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right]a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = a\dot{\theta}2ka\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}_{\frac{1}{2}\sin\theta} - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \vec{T}\vec{v} = a^2\dot{\theta}k\frac{1}{2}\sin\theta - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\vec{R} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{R}\vec{v} = 0$$

$$\wp = \vec{F}.\vec{v} = \left(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}\right)\vec{v} \Rightarrow \wp = -a\dot{\theta}mg\sin\theta + a^2\dot{\theta}k\sin\theta - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\boxed{\wp = a\dot{\theta}\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]}$$

c/ A partir de la puissance on en déduit le travail élémentaire qu'on intègre pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle :

$$\left.\begin{array}{l} dW = \wp\, dt \\ dE_p = -dW \\ \wp = a\dot{\theta}\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right] \end{array}\right| \Rightarrow dE_p = -\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]a\underbrace{\dot{\theta}dt}_{d\theta}$$

$$E_p = -a\int\left[(ka - mg)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]d\theta$$

$$\boxed{E_p = a\left[(ka - mg)\cos\theta - 2kl_0\cos\frac{\theta}{2}\right] + C^{te}}$$

3.a/ Pour trouver les positions d'équilibre on cherche les valeurs de $\theta$ pour lesquelles la dérivée première de l'énergie potentielle s'annule. On remplace d'abord $a$ et $l_0$ qui se trouvent dans la parenthèse par leurs valeurs respectives qui sont données dans l'expression de $E_p$ :

$$\boxed{E_p = mga\left[\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

On dérive cette dernière expression par rapport à $\theta$ , puis on procède à une transformation trigonométrique adéquate pour obtenir à la fin le résultat suivant :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dE_p}{d\theta}=mga\left[-\sin\theta+\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right]\\&\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}\right|\Rightarrow\boxed{\frac{dE_p}{d\theta}=mga\sin\frac{\theta}{2}\left[\sqrt{3}-2\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

On en déduit les deux valeurs de $\theta$ pour lesquelles la dérivée première s'annule :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dE_p}{d\theta}=0\\&0\leq\theta\leq\pi/2\end{aligned}\right|\Rightarrow\left|\begin{aligned}&\boxed{\theta_1=0}\\&\boxed{\theta_2=\pi/3}\end{aligned}\right.$$

b/ D'après l'énoncé on doit déterminer les positions d'équilibre stable et d'équilibre instable. Pour cela on doit chercher le signe de la seconde dérivée de l'énergie potentielle pour les deux valeurs $\theta_1$ et $\theta_2$ :

$$\boxed{\frac{d^2E_p}{d\theta}=mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}-1\right)}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}(\theta_1=0)=mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\prec 0 \text{ Equilibre instable}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}(\theta_2=\pi/3)=\frac{mga}{2}\succ 0 \text{ Equilibre stable}$$

**Exercice 6.15 :**

1/ Calculons d'abord la vitesse de la bille $B_1$ tout juste avant le choc avec la bille $B_2$. Pour cela on doit appliquer le théorème de l'énergie cinétique( $h_0$ est la hauteur de laquelle la bille $B_1$ est abandonnée) : $\Delta E_c=\sum W_i$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}m_1v_0^2=m_1gh_0\\&h_0=l(1-\cos\alpha_0)\end{aligned}\right|\Rightarrow\boxed{v_0=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$$

a/ **Cas du choc élastique :**

On suppose que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées. Ceci nous permet de calculer les deux équations suivantes que nous divisons membre à membre. On obtient donc :

$$m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2\rightarrow(1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\Rightarrow m_1v_0^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2\rightarrow(2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}\Rightarrow v_2=v_0+v_1\rightarrow(3)$$

Remplaçons $v_2$ et $v_0$ dans l'équation $(1)$, sachant que $x=\frac{m_1}{m_2}$ puis déduisons la vitesse $v_1$, il vient alors :

$$\boxed{v_1=\frac{x-1}{x+1}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$$

Remplaçons $v_0$ et $v_1$ dans l'équation $(1)$ puis déduisons la vitesse $v_2$ , on obtient alors :

$$\boxed{v_2 = \frac{2x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)}}$$

Appliquons de nouveau le théorème de l'énergie cinétique aux deux billes pour obtenir leurs angles de déviation :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g h_1 \\ h_1 = l\left(1-\cos\alpha_1\right) \\ v_1 = \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)} \end{array}\right| \Rightarrow m_1 gl\left(1-\cos\alpha_1\right) = \frac{1}{2}m_1\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2 2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$\boxed{\cos\alpha_1 = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)} \rightarrow (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g h_2 \\ h_2 = l\left(1-\cos\alpha_2\right) \\ v_2 = \frac{2x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)} \end{array}\right| \Rightarrow m_2 gl\left(1-\cos\alpha_2\right) = \frac{1}{2}m_2\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2 2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$\boxed{\cos\alpha_2 = 1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)} \rightarrow (5)$$

**<u>Discussion</u> :**

$x \succ 1 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} v_1 \succ 0 \\ v_2 \succ 0 \end{array}\right.$ : Les deux billes remontent dans le même sens après le choc telle que la vitesse de $A_1$ soit plus petite que la vitesse de $A_2$ .

$x = 1 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} v_1 = 0 \\ v_2 = v_0 \end{array}\right.$ : La bille $A_1$ s'arrête après le choc en transférant toute son énergie à la bille $A_2$ qui s'élance avec a vitesse $v_0$ .

$x \prec 1 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} v_1 \prec 0 \\ v_2 \prec 0 \end{array}\right.$ : Les deux billes remontent en sens contraires de telle façon que la bille $A_1$ revient sur son chemin et la bille $A_2$ se déplace dans le sens contraire.

b/ **<u>Cas du choc mou</u> :**

La quantité de mouvement étant conservée, la vitesse des deux billes collées ensemble tout juste après le choc est :

$$m_1 v_0 = \left(m_1 + m_2\right)v \Rightarrow \boxed{v = \frac{x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)}} \rightarrow (6)$$

On applique au système le théorème de l'énergie cinétique pour trouver :

$$\Delta E_c = \sum W_i$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = (m_1+m_2)gh \\ h = l(1-\cos\alpha)\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}} \rightarrow (7)$$

L'égalisation des deux équations $(6)$ et $(7)$ nous donne l'angle de déviation $\alpha$ dans le cas du choc mou :

$$\boxed{\cos\alpha = 1-\left[\frac{x}{x-1}\right]^2(1-\cos\alpha_0)}$$

**2/ <u>Application numérique</u> :**

a/ Pour trouver la valeur de $x$ pour laquelle les deux billes s'écartent en sens contraires d'un même angle, il faut égaliser les deux équations $(4)$ et $(5)$ :

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \Rightarrow 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0) = 1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0)$$

$$3x^2+2x-1=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2 = 1/3\end{array}\right.$$

Seule la solution positive est acceptable, soit : $\boxed{x = x_2 = 1/3}$, et l'angle $\alpha'$ correspondant est :

$$\cos\alpha' = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0),\quad \cos\alpha' = 0,875 \Rightarrow \boxed{\alpha' = 29°}$$

b/ Les deux angles de déviation pour $x=2$ :

**Dans le cas du choc élastique** : on remplace dans l'équation $(4)$ :

$$\cos\alpha_{1_{x=2}} = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0),\quad \cos\alpha_{1_{x=2}} = 0,94 \Rightarrow \boxed{\alpha_{1_{x=2}} \approx 20°}$$

**Dans le cas du choc mou** : on remplace dans l'équation $(5)$ :

$$\cos\alpha_{2_{x=2}} = 1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0) \cos\alpha_{2_{x=2}} = 0,11 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{2_{x=2}} = 83,7°}$$