

Programme

- Chapitre 1 : Introduction à la logique
- Chapitre 2 : La logique des propositions
- Chapitre 3 : La logique des prédicats

Introduction à la Logique Mathématique

K.Akli & S. Mazouz

USTHB

2015-2016

Qu'est ce que la logique ?

Logique :

- Etymologie** : mot grec logos qui signifie « science de la raison »
- Théorie mathématique qui définit **les lois formelles du raisonnement.**

Une similarité avec le calcul : produire de l'information à partir **d'informations préexistantes** en utilisant certains mécanismes de transformations.

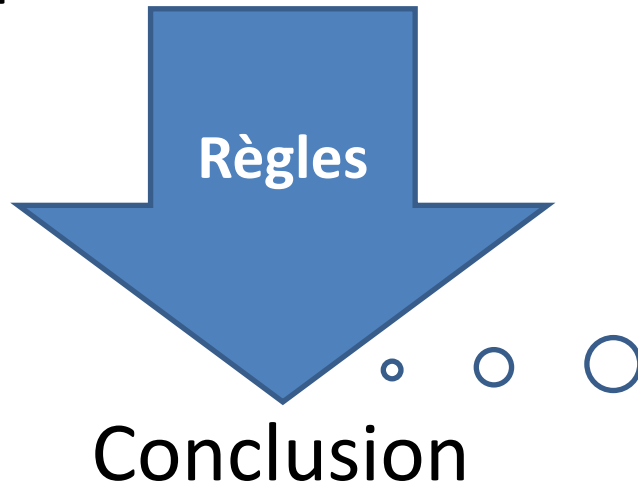
Exemple

- Information disponible : un carré dont le côté est de 4cm
- produire une nouvelle information : le périmètre du carré est de 16cm (par la règle classique **périmètre=4*côté**)

Qu'est ce que la logique ?

Raisonnement Logique

Hypothèses formulées ou faits observés



Qu'est ce que la logique ?

Exemple :

Hypothèses :

1. S'il pleut alors le sol est mouillé
2. Il pleut

Conclusion : le sol est mouillé

Qu'est ce que la logique ?

Syllogisme (Aristote 4^{ème} siècle av J-C) :

un raisonnement logique à deux prémisses conduisant à une conclusion. C'est un **schéma de raisonnement** qui est valide indépendamment des assertions.

Exemple de syllogisme :

Tous les hommes sont mortels, et

Socrate est un homme,

donc Socrate est mortel

Qu'est ce que la logique ?

Exemple :

Hypothèses :

1. Socrate a deux pieds
2. Socrate est un homme

Conclusion : Tous les hommes ont deux pieds

Raisonnement est-il correct??

Qu'est ce que la logique ?

Exemple :

Hypothèses :

1. Socrate est chauve
2. Socrate est un homme

Conclusion : Tous les hommes sont chauves

Raisonnement est-il correct??

Qu'est ce que la logique ?

Exemple :

Hypothèses :

- 1- si le train arrive en retard et il n'y a pas de taxis à la gare alors l'invité arrive en retard
- 2- l'invité n'est pas arrivé en retard
- 3- le train est arrivé en retard

Conclusion : il y avait des taxis à la gare

Raisonnement est-il correct??

Qu'est ce que la logique ?

Les raisonnements ne sont pas toujours aussi simples.

Exemple :

Ali, Kader et Madjid sont arrêtés suite à un vol.

-Ali déclare : Kader a volé mais pas Madjid

-Kader déclare : si Ali a volé alors Madjid aussi

-Madjid déclare : je n'ai pas volé mais au moins l'un des deux autres a volé.

Si les trois suspects disent la vérité, qui est le voleur??

Qu'est ce que la logique ?

La logique a pour but de donner de critères permettant de décider si un raisonnement est correct ou non.

Ce cours a pour objectif de vous montrer comment on a codifié certaines règles que vous utilisez quand vous raisonnez correctement.

Systeme Formel Logique

1. Langage formel :

Dans le syllogisme donné précédemment , les occurrences des mots **homme, mortel et Socrate** peuvent être remplacés par n'importe quel mot, le raisonnement reste correct.

Exemple

Toutes **les grandes villes** sont **polluées**, et
Alger est **une grande ville**
donc **Alger** est **polluée**

On peut le schématiser par : Tout x est y, et
z est x
donc z est y

On a remplacé les mots substituables par des symboles.

Les mots de liaison (si alors, et, ou, car,..) et les verbes (est, appartient, ..) jouent un rôle important.

Systeme Formel Logique

Ambiguïté de la langue naturel :

- La disjonction « ou » exprime
soit le « ou inclusif » soit le «ou exclusif »

Cet après-midi, je pars au cinéma **ou** à la plage

Comme dessert, je mange une pomme **ou** un gâteau

Il est inscrit en MI **ou** en ST.

- L'auxiliaire « être » peut traduire :
l'appartenance, inclusion, égalité, etc..

Systeme Formel Logique

Un langage Formel doit être :

- Simple
- Sans ambiguïté

Il est défini par

- Son alphabet (les symboles du langage)
- Un procédé de construction des propositions du langage (grammaire)

Systeme Formel Logique

2. **Systeme de deduction ou d'inférence** :
détermine comment les propositions se déduisent les unes des autres.

Il comprend :

- Un ensemble d'axiomes (propositions postulées vraies)
- Un ensemble fini de règles de deduction

Exemple de règle de deduction (modus ponens) :
(si α alors β) et α alors on peut déduire β

Systeme Formel Logique

3. **Modèle** : est une interprétation qui établit une correspondance (donne un « sens ») entre :
- Les symboles du langage et les objets de l'univers (domaine d'interprétation)
 - Des propositions et l'ensemble des valeurs de vérité {vrai, faux}

Systeme Formel Logique

Un problème fondamental de la logique mathématique concerne **l'étude des rapports** entre les deux concepts **preuve et vérité** :

- notion de consistance
- notion de complétude

Décidabilité

Un problème de décision : question mathématique dont la réponse est soit « oui », soit « non ».

Exemple : test d'appartenance à un ensemble donné.

Un problème de décision est décidable s'il existe une **procédure**, qui en un **nombre fini d'étapes**, répond par oui ou par non à la question posée par le problème.

Le problème de l'arrêt d'un programme n'est pas décidable

Décidabilité

Une logique est décidable s'il existe un algorithme, permettant en un temps fini, de répondre par oui ou non à la question si un énoncé est démontrable.



Les différentes Logiques

- Logique classique
 - Logique propositionnel : relations entre les propositions (négation, conjonction, disjonction, etc..)
 - Logique des prédicats : permet de définir des entités, des fonctions sur les entités et des relations entre les entités.
- Logique non-classique
 - Logique modale
 - Logique temporelle
 - Logique de description
 - Etc..

Applications de la logique

- Electronique (Circuits électroniques)
- Assistants de preuve (Par exemple Coq) :
 - la correction de programmes
 - Preuve mathématiques avancées (Théorème des 4 couleurs, conjecture de Kepler, ..)
- Validation des spécifications
- Diagnostic des pannes ou diagnostic médical (base de connaissances)
- Bases de données (les langages de requêtes des Bases de données)
- Etc...

Paradoxes

- Étymologie : (du grec *paradoxos*, « contraire à l'opinion commune », de *para* : « contre », et *doxa* : « opinion »), est une idée à première vue surprenante ou choquante, c'est-à-dire allant contre le sens commun.
- Larousse : être, chose ou fait qui semble défier la logique parce qu'ils présentent des aspects contradictoires
- Logique : énoncé qui contient ou semble contenir une contradiction logique ou un raisonnement, qui bien sans faille apparente aboutit à une absurdité.

Paradoxe du Barbier

Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire:

« **Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement cela** ».

Paradoxe exposé par Bertrand Russel en 1918

Savez-vous qui rase le barbier??

- **S'il se rase lui-même** : il ne respecte pas son enseigne car il raserait quelqu'un (lui-même) qui se rase lui-même.
- **S'il ne se rase pas lui-même** : son enseigne ment car il ne rase pas au moins un homme (lui-même) qui ne se rase pas lui-même.

Il y'a deux ensembles :

- Celui des hommes qui se rasent eux-mêmes
- Celui des hommes qui se rasent par le barbier

Le barbier ne peut appartenir à l'un d'entre eux!!!!

Exercice

Les raisonnements suivants sont-ils corrects??

1. Tous les x sont z ,
tous les y sont z ,
donc certains x sont y
2. Certains x sont y ,
tous les y sont z ,
donc certains x sont z
3. Tous les x sont y ,
certains y sont z
donc certains x sont z