Logique des prédicats

(Logique du premier ordre avec égalité)
(suite)

K. Akli et S. Mazouz
Département Informatique
USTHB
2015-2016

Sémantique

Pour pouvoir interpréter (donner un sens) une formule, il faut :

- Interpréter les symboles de l'alphabet
- interpréter les termes
- interpréter les formules atomiques
- interpréter les formules quantifiées

Sémantique

Rappel

- **Une fonction n -aire f sur un ensemble A :**

  f : $A^n \rightarrow A$ et associe à un n-tuple de valeurs $(a_1,\ldots,a_n)$ une valeur $f(a_1,\ldots,a_n) = a \in A$

- **Une relation n-aire R sur un ensemble A :**

  est un ensemble de n-tuples $(a_1,\ldots,a_n)$ dont les éléments appartiennent tous à A ($R \subseteq A^n$)

Interprétation

Définition (Interprétation)

Soit $D \neq \emptyset$ un ensemble appelé **domaine d'interprétation**.
L'interprétation I est une correspondance telle que :

1. A tout symbole de constante, on associe un **élément $I(a) \in D$**
1. A tout symbole de fonction f d'arité n, on associe **une fonction I(f) à n arguments définie de D^n dans D.**
1. A tout symbole de prédicat P d'arité m, on associe **une relation $I(P) \subseteq D^m$**
1. Au prédicat d'égalité « = » d'arité deux, on associe la relation **$Diag_D = \{(d, d) / d \in D\}$**

Exemple

On définit l'interprétation standard I pour le langage L_N de l'arithmétique **dont le domaine d'interprétation est N (l'ensemble des entiers naturels)** de la manière suivante :

- I(a)=0,
- I(f)=Succ tel que Succ : $N \rightarrow N$
  $n \rightarrow n+1$
- I(g)= (+) tel que (+) : $N \times N \rightarrow N$
  $a, b \rightarrow a+b$
- I(h)=(*) tel que (*) : $N \times N \rightarrow N$
  $a, b \rightarrow a*b$
- au prédicat d'égalité '=' est associé la relation $Diag_N=\{(n,n) / n \in N\}$

Sémantique

Définition (Valuation)

Soit I une interprétation de domaine D du langage L.

On appelle ***valuation* V** des variables

toute fonction de **l'ensemble des variables var** dans D (V : var $\rightarrow$ D),

qui associe à chaque variable un élément du domaine D

Interprétation d'un terme

L'interprétation d'un terme t par une valuation V pour une interprétation I, noté par I(t)[V], est :

1. **t est une constante a** :
   I(t)[V]= I(a)
2. **t est une variable x** :
   I(t)[V]=V(x)
3. **t =f(t_1,…,t_n)** où f est un symbole de fonction et t_1,…,t_n sont des termes :
   I(t)[V]= I(f)(I(t_1)[V],…., I(t_n)[V])

Interprétation d'un terme

Exemples
On considère l'interprétation standard I pour le langage L_N.
Soit la valuation V avec V(x)=4 et V(y)=6
Donner l'interprétation des termes suivants :
- f(a)
  I(f(a)) = I(f)(I(a)) =Succ(0)= 1
- g(x, f(a))
- g(f(x), y)

Remarque
L'interprétation d'un terme ne contenant pas de variables ne dépend pas de la valuation.

Interprétation d'une formule

Soient L un langage, I une interprétation de L de domaine D et V une valuation définie sur D.
L'interprétation d'une formule ***α* *par la valuation V pour une interprétation I,*** notée I(***α)[V], est*** donnée par :

1. **La formule *α* est une formule atomique P(t_1,…, t_n) :**
   I(***α***)[V] est vraie ssi
   (I(t_1) [V],…, I(t_n) [V]) ∈ I(P) où
   - I(P) est l'interprétation du prédicat P
   - I(ti) [V] est l'interprétation du terme ti (i=1,..,n).
2. **La formule *α* est de la forme ¬β ou β∧δ :**
   utiliser les tables de vérité usuelles
3. **La formule *α* de la forme ∀x β :**
   I(***α***)[V] est vraie ssi ***Tous les éléments de D vérifient la formule β***

Donc **pour tout d ∈ D,**
I(β)[V(d/x)] est vraie
avec V(d/x) est la valuation V sauf pour x qui prend la valeur d

9

Interprétation

Exemples Soit α = ∀x P(x, y)
Soit l'interprétation I : D=N, I(a)=0, I(P)=« ≥ »
Soit V une valuation sur N
I(α)[V]= pour tout d ∈N,
(I(x)[V(x/d)], I(y)[V(x/d)])∈ I(P)
= pour tout d ∈N, d ≥ V(y)
L'interprétation de α dépend de la valuation donnée à y.
Pour la valuation V1/ V1(y)=0 : I(α)[V]= Vraie
Pour la valuation V2/V2(y)=5 : I(α)[V]= faux

Interprétation

Exemples Soit β = ∀x P(x, a)
1. **Soit l'interprétation I : D=N, I(a)=0, I(P)=« ≥ »**
Soit V une valuation sur N
I(β)[V]= pour tout d ∈N, (I(x)[V(d/x)], I(a))∈I(P)
= pour tout d ∈N, d ≥ 0
I(β)[V]= vraie

2. **Soit l'interprétation J : D=N, J(a)=0, J(P)=« > »**
Soit V une valuation sur N
J(β)[V]= pour tout d ∈N, (J(x)[V(d/x)], J(a))∈J(P)
= pour tout d ∈N, d > 0
J(β)[V] = faux il suffit de prendre comme contre exemple d=0

Remarque
L'interprétation d'une formule fermée ne dépend pas de la valuation.

Satisfaisabilité

Définition

On dit qu'une ***formule α est satisfaisable par la valuation V pour l'interprétation I***

et on note I ╞ α[V]

si l'interprétation de la formule α est vraie (I(α)[V] est vraie)

Satisfaisabilité

Exemple Soit $\alpha = \forall x\ P(x, y)$

Soit l'interprétation I : D=N, I(a)=0, I(P)=« ≥ »

- Pour la valuation V1/ V1(y)=0 : I(α)[V]= Vraie

Donc α est satisfaisable par la valuation V1 pour l'interprétation I (I ╞ α[V1])

- Pour la valuation V2/V2(y)=5 : I(α)[V]= faux

Donc α n'est pas satisfaisable par la valuation V2 pour l'interprétation I (I ╞/= α[V2])

Satisfaisabilité et Valide

Définition

Soient L un langage, I une interprétation de domaine D et α une formule. Deux cas peuvent se présenter :

- ***Il existe une valuation* V sur D**, telle que
  I ╞ α[V],
  on dit que **α est satisfaisable pour I.**
- ***Quelque soit la valuation* V sur D**, on a
  I ╞ α[V],
  on dit que **α est valide pour I** et on note I ╞ α

14

Satisfaisable et Valide

Soient la formule α : f(x,y) = a et l'interprétation I telle que :

D = N, I(f) = * et I(a)= 100 ∈ N

Montrons que α est satisfaisable pour I.

Soit la valuation **V** suivante telle que :

V(x) = 20 et **V**(y)=5

I (α) [**V**] : V(x)*V(y)=I(a) donc 20 * 5 = 100 qui est vraie

I (α) [**V**] est Vraie, c-à-d : I ╞ α [**V**].

α est donc Satisfaisable pour I

car on a trouvé une valuation **V** telle que I ╞ α [**V**].

15

Satisfaisable et Valide

Soit α= ∃x P(x, y). Notons que la formule α est non fermée.

1. Soit I l'interprétation suivante:

D=N et I(P)=**'multiple de**'.

Considérons une valuation **V** quelconque sur N.

I(α)[**V**] = il existe d ∈ N, **d est multiple de V (y).**

quelque soit la valuation **V**, il suffit de prendre d = **V** (y) (Tout nombre est multiple de lui-même).

Donc I(α)[**V**] est vraie.

Ainsi, α est valide pour I.

16

Satisfaisable et Valide

α= ∃x P(x, y)

2. Soit J l'interprétation suivante : D = N et J(P) = '<'.

Considérons une valuation **V** quelconque sur N.

I(α)[**V**] = il existe d ∈ N, d < **V** (y).

I(α)[**V**] est vraie pour la valuation **V** (y) = 3

(il suffit de prendre d=1)

mais fausse pour la valuation **V** (y) = 0.

Donc α n'est pas valide pour J.

17

Satisfaisable et Universellement valide

Définition

Soit L un langage et soit α une formule. Deux cas peuvent se présenter :

- ***Il existe une interprétation I* de domaine D et *il existe une valuation V*** définie sur D,
  on a I ╞ α[V],
  on dit que **α est satisfaisable**.
- ***Quelque soit l'interprétation I* de domaine D et *quelque soit la valuation V*** définie sur D,
  on a I ╞ α[V],
  on dit que **α est universellement valide**
  et on note ╞ α.

18

Satisfaisable et Universellement valide

Soit une formule α : P(x, a),

- l'interprétation I telle que D = N, I(P)= '$\geq$', I(a)= 5$\in$N
- V_1 une valuation telle que $V_1(x)=6$

I(α)[V_1] : $V_1(x) \geq$ I(a) ie $6 \geq 5$ qui est vraie

I (α) [V_1] est vraie

Ainsi on a trouvé une interprétation I et une valuation V_1 telle que I $\models \alpha[V_1]$

Donc α est satisfaisable.

Satisfaisable et Universellement valide

Exemple

Soit la formule $\alpha = \forall x \exists y$ P(x, y) ; c'est une formule fermée. Considérons les deux interprétations suivantes :

1. l'interprétation I telle que D = N et I(P) = « multiple de ».

- I(α)= quelque soit $d_1 \in$N, il existe $d_2 \in$N tel que d_1 est multiple de d_2.
- Cette interprétation est vraie, il suffit de prendre $d_2 = d_1$. Donc α est valide pour I.

2. L'interprétation J telle que D=N et J(P)=« > »

J(α)= quelque soit $d_1 \in$N, il existe $d_2 \in$N tel que $d_1 > d_2$.

- J(α) est faux. En effet, nous avons un contre exemple : pour $d_1=0$, il n'existe pas d_2. Donc α n'est pas valide pour J.

Par conséquent α n'est pas universellement valide.

Satisfaisable et Universellement valide

Soit la formule α : $\forall x$ (R(x) $\vee \neg$R(x))

- Soit I une interprétation quelconque sur D, on a :
  I(α) = quelque soit d $\in$ D, d $\in$ I(R) ou non (d$\in$ I(R))
  I(α) est Vraie
  car tout élément du domaine
  soit il vérifie la relation I(R), soit il ne l'a vérifie pas
- Donc quelque soit I on a : I $\models \alpha$, autrement dit :
  α est Universellement Valide.

Vérifier si les formules suivantes sont universellement valides :

- p(a, b)$\wedge \neg \exists y$ p(a, y)
- ($\forall x$ P(x)) V ($\exists y \neg$P(y))

Sémantique

Remarques

- $\models \alpha$ (Universellement valide)
  $\Leftrightarrow \quad \forall$I $\forall$ V, I $\models \alpha$[V]
- $\models$\= α (Non universellement valide)
  $\Leftrightarrow \exists$I $\exists$ V, I $\models$\= α[V]
- I $\models$\= α (non valide pour I)
  $\Leftrightarrow \exists$ V, I $\models$\= α[V]
- α non satisfaisable
  $\Leftrightarrow \forall$I $\forall$ V, I $\models$\= α[V]

Modèle

Définition

Soit Γ un ensemble de formules, on dira qu'une **interprétation $\mathbf{M}$ est un modèle de Γ**, si

toutes les formules de Γ sont valides pour l'interprétation **$\mathbf{M}$**.

c-à-d : quelque soit $\alpha \in \Gamma$, on a **$\mathbf{M}$** $\models \alpha$.

Modèle

Exemple $\alpha = \exists x$ P(x, y) et $\beta = \forall x$ P(x, a)

Soi l'interprétation I : **D=N, I(a)=0 et I(P) =« $\geq$ »**

Soit V une valuation quelconque sur N:

1**/ I(α)[V]=il existe d $\in$N, d $\geq$V(y)**

Pour toute valuation V,

I(α)[V] est vraie il suffit de prendre d=V(y),

donc α est valide pour I

2/ **I(β)[V]=quelque soit d $\in$N, d $\geq$0**

I(β)[V] est toujours vraie

donc β est valide pour I

Donc I est modèle de {α, β}

Consistance et Complétude

Définition (Implication sémantique)

Soient Γ un ensemble de formules et α une formule.
On dit que **Γ implique sémantiquement (ou logiquement) α**

et on note $\Gamma \models \alpha$ si :

$\forall I\ \forall V$, (si $\forall \beta \in \Gamma$, $I \models \beta[V]$

alors $I \models \alpha[V]$)

Cas particulier

- $\beta \models \alpha \Leftrightarrow \forall I\ \forall V$, $(I \models \beta[V] \Rightarrow I \models \alpha[V])$

25

Consistance et Complétude

Définition (Equivalence sémantique)

Soient α et β deux formules, on dit que
α est sémantiquement équivalente à β

et on note $\alpha \models\mid \beta$ si :

$\forall I\ \forall V$, $(\forall \beta \in \Gamma, I \models \beta[V] \Leftrightarrow I \models \alpha[V])$

26

Consistance et Complétude

Remarques

- $\alpha \models \beta$

  $\Leftrightarrow\ \models \alpha \rightarrow \beta$ ($\alpha \rightarrow \beta$ est universellement valide)
- $\alpha \models\mid \beta$

  $\Leftrightarrow\ \models \alpha \leftrightarrow \beta$ ($\alpha \leftrightarrow \beta$ est universellement valide)
- $\alpha \models\mid \beta$

  $\Leftrightarrow \alpha \models \beta$ et $\beta \models \alpha$

27

Consistance et Complétude

Théorème

Soit Γ un ensemble de formules et soient α et β deux formules :

- $\Gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \alpha$
- A $\vdash\dashv \beta \Leftrightarrow \alpha \models\mid \beta$
- $\vdash \alpha \Leftrightarrow\ \models \alpha$

28