Logique des prédicats

(Logique du premier ordre avec égalité)

K. Akli et S. Mazouz
Département Informatique
USTHB
2015-2016

Plan

Introduction

Limite de la logique des propositions :

Exemple

Si **x** est père de y et si y est père de **z**

alors **x** est un grand-père de **z**

Sa modélisation par $A \wedge B \rightarrow C$ en logique des propositions ne met pas en évidence les relations entre les individus x, y et z.

Introduction

Notion de prédicats : permet d'exprimer une relation entre individus.

On aura pour l'exemple précédent les prédicats:

- **Père(x, y) :** x est père de y

Cette relation est vraie ou fausse selon les valeurs de x et de y.

- **GrandPère(x, y) :** x est grand-père de y

Ce qui donne la modélisation :

Père(x, y) $\wedge$ Père(y, z) $\rightarrow$GrandPère(x, z)

Introduction

« S'il pleut alors Ali prend son parapluie »

« Si Ali prend son parapluie alors il ne sera pas mouillé »

S'il ne pleut pas alors Ali ne sera pas mouillé »

En langage des propositions :

$\alpha_1 = P \rightarrow R$,

$\alpha_2 = R \rightarrow \neg M$

et $\alpha_3 = \neg P \rightarrow \neg M$.

P: « Il pleut »
M : «Ali est mouillé »
R : « Ali prend son parapluie»

Introduction

Ce qui est vrai pour Ali, peut être aussi vrai pour d'autres personnes (Omar, Samia, …) :

« S'il pleut alors Ali prend son parapluie »
« Si Ali prend son parapluie alors il ne sera pas mouillé »
S'il ne pleut pas alors Ali ne sera pas mouillé »

« S'il pleut alors Samia prend son parapluie »
« Si Samia prend son parapluie alors elle ne sera pas mouillé e»
S'il ne pleut pas alors Samia ne sera pas mouillée »

« S'il pleut alors Omar prend son parapluie »
« Si Omar prend son parapluie alors elle ne sera pas mouillé e»
S'il ne pleut pas alors Omar ne sera pas mouillée »

Introduction

Pour Ali : **M_{Ali} et R_{Ali}**	**$P \rightarrow R_{Ali}$, $R_{Ali} \rightarrow \neg M_{Ali}$ et $\neg P \rightarrow \neg M_{Ali}$**
Pour Omar : **M_{Omar} et R_{Omar}**	**$P \rightarrow R_{Omar}$, $R_{Omar} \rightarrow \neg M_{Omar}$ et $\neg P \rightarrow \neg M_{Omar}$**
Pour une personne donnée X : **M_X et R_X**	$P \rightarrow R_X$, $R_X \rightarrow \neg M_X$ et $\neg P \rightarrow \neg M_X$.

7

Introduction

En Logique des prédicats, nous définissons les symboles M et R comme **prédicats** prenant comme **argument X**, tels que :

M(X) : « X est mouillé » et R(X) : « X prend son parapluie ».

Une formalisation pour une personne quelconque X est donc :

« S'il pleut alors X prend son parapluie » :

$P \rightarrow R(X)$

« Si X prend son parapluie alors X ne sera pas mouillé » :

$R(X) \rightarrow \neg M(X)$

«S'il ne pleut pas alors X ne sera pas mouillé » :

$\neg P \rightarrow \neg M(X)$

8

Introduction

Exprimer en calcul propositionnel le fait

« s'il pleut alors **tout le monde** prend son parapluie »,

une solution pourrait être alors la formule

$R \rightarrow M(Ali) \wedge M(Omar) \wedge M(Samia) \wedge ....$

Mais cette formule est **infinie** et **n'appartient** donc pas au **langage propositionnel**.

L'introduction d'un **quantifieur universel** $\forall$ permet une représentation plus compacte $P \rightarrow \forall x\ M(X)$

9

Introduction

Exprimer le fait

« s'il pleut alors quelqu'un est mouillé »,

L'introduction du quantifieur existentiel $\exists$ permet aussi une représentation plus compacte :

$P \rightarrow \exists x, M(X).$

10

Langage

Un langage du calcul du premier ordre avec égalité est défini par la donnée de :

- Ensemble symboles
- Ensemble termes,
- Ensemble formules

11

Symboles (Alphabet)

1. Symboles **de variables** (infini dénombrable) x, y, z, x_1, x_2,…
2. Symboles **de constantes** (fini ou infini) a, b, c,..
3. Symboles **de fonctions** (fini ou infini) f, g, h,… A chaque symbole de fonction est associé un **paramètre entier appelé arité** (nombre d'argument)
4. Symboles **de prédicats** (fini ou infini) P, Q, R, … A chaque prédicat est associé un **paramètre entier appelé arité**.
5. Symbole **d'égalité '=' d'arité 2**
6. Symboles **logiques : $\neg$, $\wedge$, $\forall$**
7. Symboles **impropres : '(', ')', ','**

12

Termes

1. **Toute variable** est un terme
2. **Toute constante** est un terme
3. Si **f** est un **symbole de fonction** d'arité n

   et $t_1,\ldots t_n$ sont des termes

   alors **$f(t_1,\ldots t_n)$** est un terme.

13

Formules

1. Si P est un symbole de **prédicat d'arité n**

   et $t_1,\ldots t_n$ sont des **termes**

   alors **$P(t_1,\ldots t_n)$** est une **formule atomique**
1. Toute formule atomique est une formule
2. Si α et β sont des formules

   et x est une variable

   alors **$\neg\alpha$**, **$\alpha\wedge\beta$**, et **$\forall x\ \alpha$** sont **des formules, appelées formules composées.**

14

Langage

On définit le quantifieur d'abréviation existentiel
$\exists x\ \alpha =_{def} \neg(\forall x \neg \alpha)$.

La Priorité suivante est adoptée (décroissante):

( )

$\neg$

$\wedge$ $\vee$

$\forall$ $\exists$

$\rightarrow$ $\leftrightarrow$

15

Langage(Exemple)

Exemple de langage :

Soit L_N un mini langage de l'arithmétique dont l'alphabet se compose de :

Symboles de variables : $x_1, x_2, \ldots$

Symbole de constante : a

Symboles de fonctions : f d'arité 1, g et h d'arité 2

Symbole de prédicat : '= ' d'arité 2

Symboles logiques : ¬ , ^ et ∀

Symboles impropres, notés : '(' , ')' et ','

16

Langage(Exemple)

Exemples de termes :

x_2 , a , f(a) , $g(f(x_1), a)$, $h(x_1, x_2)$, etc.

D'une manière générale :

Toute variable x_i est un terme.

La constante a est un terme.

Si t_1 et t_2 sont 2 termes alors : $f(t_1)$, $g(t_1, t_2)$ et $h(t_1, t_2)$ sont des termes.

17

Exemples de formules :

$x_1 = a$, $x_1 = x_2$, $g(a, x_1) = x_3$, $f(x_4) = h(f(x_1), g(x_2,x_3))$ sont des formules atomiques.

$\forall x_1\ (x_1 = f(x_2))$, $\neg(a = g(a, x_1) \wedge (\forall x_2\ x_2=f(x_1))$) sont des formules composées.

D'une manière générale :

Si t_1 et t_2 sont 2 termes alors: $t_1 = t_2$ est une formule atomique.

Si x_i est une variable et α , β sont 2 formules alors : $\forall x_i\ \alpha(x_i)$, $\neg\alpha$ et $\alpha\wedge\beta$ sont des formules composées.

18

Formalisation

Considérons le syllogisme suivant :

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
Alors Socrate est mortel

On définit les prédicats

- H(x) : 'x est un homme ' et M(x) : 'x est mortel'

On utilisera aussi une **constante S pour Socrate**.

La formulation est alors :

$((\forall x\, (H(x) \rightarrow M(x))) \wedge H(S) \rightarrow M(S)$

Formalisation

Les oiseaux n'ont pas tous des ailes

Soient les prédicats suivants :

- O(x) : « x est un oiseau »
- A(x) : « x a des ailes »

On a $\neg \forall x\, (O(x) \rightarrow A(x)) = \exists x\, (O(x) \wedge \neg A(x))$

Formalisation

Aucun menteur n'est honnête

- M(x) : 'x est un menteur'
- H(x) : 'x est honnête'

On a $\neg (\exists x\, M(x) \wedge H(x))$

Définition(Champ d'une variable)

- Dans une formule de la forme $\forall x\, \alpha$, α est appelé le **champ de x**
- Toute occurrence d'une variable dans son champ est dite **liée**
- toute occurrence non liée d'une variable sera dite **libre**
- Une variable dont au moins une **occurrence est libre** est dite **libre**
- Une variable dont au moins une **occurrence est liée** est dite **liée**

Définition(Champ d'une variable)

Exemple $(\forall x\;\; x = y) \wedge (x = y)$

- Les deux occurrences de y sont libres.
- La première occurrence de x est liée, la seconde est libre.

Donc la variable x est libre et liée, tandis que la variable y est seulement libre.

Notation Si x est une variable libre dans une formule α, on note $\alpha(x)$. Si $x_1, \ldots x_n$ sont des variables libres dans une formule α, on note $\alpha(x_1, \ldots x_n)$.

Définition(Formule fermée)

- Si **toutes les occurrences** des variables d'une formule α **sont liées** alors la formule est dite **fermée**.
- Si α est une formule contenant les variables **libres $x_1, \ldots x_n$**, on appelle la **fermeture de α** la formule **$\forall x_1, \ldots \forall x_n\, \alpha(x_1, \ldots x_n)$.**

Exemples (Formule fermée)

- $\forall x\ \exists y\ x<y$

  est une formule fermée.
- $\exists x\ \ x<y$

  est une formule non fermée car la variable y est libre. Sa fermeture est $\forall y\ (\exists x\ \ x<y)$.
- $(\forall x,\ \ x<10) \wedge x>2$

  est une formule non fermée car la variable x est libre et liée.

25

Définition (substitution)

Soient x une variable et $\alpha(x)$ une formule, t un terme.

On dira que t est libre d'être substitué pour x dans α et on écrit « t libre pour x dans α »

si aucune variable de t ne devient liée après substitution de x par t dans $\alpha(x)$ (la nature des occurrences est préservée).

26

Cas particuliers et conventions

- Toute variable est libre pour elle-même dans n'importe quelle formule.
- Toute constante est libre pour x dans n'importe quelle formule.
- Si une formule α ne contient aucune occurrence libre de x, alors quelque soit le terme t, t est libre pour x dans α.
- Si le terme t ne contient pas de variables alors t est libre pour n'importe quelle variable dans n'importe quelle formule.

27

Exemples

1. $\alpha = (\exists x,\ x<y)$;

- le terme $t_1=z$ est-il libre pour y dans α?

  oui t_1 est libre pour y dans α.
- le terme $t_2=x$ est-il libre pour y dans α?

  non t_2 est non libre pour y dans α. En effet $\alpha[t_2/x] = (\exists x,\ x<x)$ et donc la variable x qui est libre dans t_2 devient liée dans $\alpha[t_2/x]$.

28

Exemples

2. $\beta = \exists y\ P(x, y)$;

$t=f(x, y)$ est-il libre pour x dans β ?

non t n'est pas libre pour x dans β.

En effet $\beta[t/x] = \exists y\ P(f(x,y), y)$

et l'occurrence y libre dans t devient liée dans $\beta[t/x]$.

29

Exemples(Substitution)

3. $\delta = P(x, y) \rightarrow \forall z\ R(x)$;

t = f(a, z) est-il libre pour x ?

non t n'est pas libre pour x dans δ.

4. $\gamma= R(x) \vee \forall z\ P(x, z, y)$;

t= y est-il libre pour x ?

oui t est libre pour x dans γ.

30

Exemples(Substitution)

5. $\phi = \forall y\ R(y) \wedge P(x,y)$;
   t =f(x,y) est-il libre pour x ?
   non t n'est pas libre pour x dans ϕ.

6. $\theta = \forall y\ R(y) \rightarrow P(x, y)$;
   t=f(x,y) est-il libre pour x ?
   oui t est libre pour x dans θ

31

Système Déductif

1. Axiome du système

Les axiomes affirment que certaines propositions sont des théorèmes.

Les axiomes sont en général vus comme des règles sans prémisses.

Le système déductif du calcul des prédicats comporte l'axiome suivant : Soit x une variable,

la formule $\forall x, x=x$ est appelée axiome

32

Système Déductif

2. Règles de déductions :

- les règles du calcul propositionnel
  ($E\neg$, $I\neg$, $E\wedge$, $I\wedge$)
- en plus de trois règles spécifiques au calcul des prédicats :
  - **Règle de particularisation ($\forall$E)**
  - **Règle de généralisation ($\forall$I)**
  - **Règle de remplacement (R)**

33

Système déductif

Règle de particularisation (E$\forall$)

$$\frac{\forall x\ \ \alpha(x)}{\alpha(t)}\ (E\forall)\quad \text{(t libre pour x dans } \alpha)$$

Cas particulier

$$\frac{\forall x\ \ \alpha(x)}{\alpha(x)}\ (E\forall)$$

34

Système déductif

Règle de généralisation (I$\forall$)

$$\frac{\alpha(x)}{\forall x\ \ \alpha(x)}\ (I\forall)\quad \text{(x n'apparait pas libre dans les prémisses non éliminées au dessus de } \alpha(x)\text{)}$$

Règle de remplacement (R)

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \alpha(t_1)}{\alpha(t_2)}\ (R)\quad t_1 \text{ et } t_2 \text{ libres pour x dans } \alpha(x)$$

35

Définition (Déduction)

Soit Γ un ensemble de formules et α une formule.
On dira que Γ implique α, noté $\Gamma \vdash \alpha$,
s'il existe une déduction utilisant éventuellement l'axiome telle que :

1. α est la conclusion
2. les seules prémisses non éliminées à part l'axiome sont dans Γ
3. les règles utilisées sont parmi : ($I\wedge$), ($E\wedge$), ($I\neg$), ($E\neg$), ($I\forall$), ($E\forall$) et (R).

36

Exemples (Déduction)

$\forall x\ \alpha(x) \ \vdash \exists\ x\ \alpha(x)$

Or $\exists\ x\ \alpha(x) =_{def} \neg(\forall x \neg\ \alpha x))$

Montrons la déduction $\forall x\ \alpha(x) \ \vdash \neg(\forall x \neg\ \alpha x))$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\ \alpha(x)}{\alpha(x)}\ {\scriptstyle (E\forall)\ x\ \text{libre pour } x} \qquad \dfrac{[\forall x \neg\alpha(x)]}{\neg\alpha(x)}\ {\scriptstyle (E\forall)\ x\ \text{libre pour } x}}{\neg(\forall x \neg\alpha(x))}\ {\scriptstyle (I\neg)}$$

Exemples de déduction

Montrer les déductions suivantes :

1. $\vdash \forall x\ \alpha(x) \to \forall x\ (\alpha(x) \vee \beta(x))$
2. $\Gamma, \alpha(x) \ \vdash \beta \ \Rightarrow \ \Gamma,\ \exists\ x\ \alpha(x) \ \vdash \beta$ (x non libre dans Γ et β)
3. $\alpha(t) \vdash \exists x\ \ \alpha(x)$ avec t libre pour x dans $\alpha(x)$
4. $(\forall x\ \ (H(x) \to M(x))) \wedge\ H(S) \vdash M(S)$ où S est une constante