

Préface.

Ce cours d'électricité a été rédigé à l'intention des étudiants qui préparent, dans le cadre de la réforme L.M.D¹, une licence dans les domaines des " Sciences de la Matière" et des "Sciences et Technologies". Il est conforme au programme officiel.

Le programme d'électricité du S2 se compose de deux grandes parties :

La première comporte les éléments de base de la théorie électromagnétique : l'*électrostatique* que nous présentons aux Chapitres I & II et l'*électromagnétisme* qui fait l'objet des Chapitres IV & V.

Les concepts de masse, de charge, de force, de champ, d'énergie et de potentiel, que nous introduisons dans cette partie, ont été très longs à se dessiner, au cours de l'histoire, et à être acceptés par les savants. D'autre part, il a fallu plus d'un siècle, de l'expérience de Coulomb en 1785, qui marque la naissance de cette théorie, à la parution de la théorie de la relativité restreinte en 1905, pour comprendre les lois de l'électromagnétisme. C'est la raison pour laquelle nous insistons particulièrement sur l'aspect conceptuel afin que l'étudiant puisse, dès la première année, réfléchir sur la signification des grandeurs physiques qu'il rencontre à mesure qu'il avance dans ses études.

L'étudiant, qui a déjà pris connaissance de ces lois au lycée, doit les assimiler durant les trois années de la licence de physique, à l'aide d'un outil mathématique plus performant d'une année à l'autre. En première année, il sait dériver et calculer les primitives des fonctions élémentaires, il a appris le calcul vectoriel mais ignore l'analyse vectorielle. C'est avec cet outil qu'il doit apprendre les premiers éléments de l'électromagnétisme. Les équations de Maxwell, qui expriment les lois de l'électromagnétisme, apparaissent dans ce cours sous forme intégrale et en régime quasi stationnaire. Ces équations sont appliquées à des cas où elles se ramènent à des intégrales simples que l'étudiant peut résoudre. Nous avons jugé utile d'introduire, dès la première année, les quatre grandeurs vectorielles qui apparaissent dans les équations de Maxwell : les champs \vec{E} et \vec{B} et les excitations \vec{D} et \vec{H} , la distinction entre ces grandeurs apparaîtra, en deuxième année, lors de l'étude des milieux².

La physique étant une science expérimentale, les lois de l'électromagnétisme sont mises en évidence, dans ce cours, à partir de la description d'expériences dont certaines sont faciles à réaliser.

¹ L.M.D. Système d'enseignement supérieur instauré en Algérie en 2004. Le système L.M.D. comporte trois grades : La *Licence* (L.), préparée en trois ans (L1, L2, L3), le *Master* (M.) en deux ans (M1, M2) et le *Doctorat* (D.) en trois ans. Chaque année se compose de deux semestres, en Licence par exemple il y a six semestres (S1, S2, S3, S4, S5, S6). Le module d'*électricité* est enseigné en S2.

² Cette étude n'est pas au programme du cours de S2.

Cette partie donne lieu à de nombreuses applications : A partir du travail des forces qui agissent sur un système, on calcule l'énergie qu'il emmagasine, et inversement, à partir de l'énergie stockée dans un système, on peut calculer les forces et les couples qui y interviennent : c'est le cas des électromètres, des électrodynamomètres, des éléments moteurs des appareils de mesure etc.

L'étudiant, qui opte pour une licence de physique, approfondira ses connaissances dans le module "*d'électromagnétisme*" en deuxième année et, en troisième année, dans deux modules : "*Ondes Electromagnétiques & Optique*" et "*Relativité*".

La deuxième partie, qui est exposée aux chapitres III & VI, porte sur l'électrocinétique des courants continus et des courants alternatifs qui constitue une application de la théorie électromagnétique. Cette partie est essentielle pour l'étudiant en technologie qui se destine à une carrière en électricité industrielle. En licence de physique elle constitue un pré-requis pour les modules d'*électronique* et d'*électrotechnique*.

Chaque chapitre est illustré par des exercices qui constituent une application, à des problèmes concrets, des lois introduites dans le cours. La résolution de ces exercices permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien assimilé le cours, d'estimer les ordres de grandeur et d'attacher de l'importance à l'analyse dimensionnelle aux unités de mesures et à la précision d'un résultat numérique. Les solutions des exercices, placés à la fin de chaque chapitre, seront publiés dans un autre fascicule.

Nous tenons à remercier les collègues qui ont bien voulu relire le manuscrit et nous aider à l'améliorer, notamment les professeurs Ahmed-Chafik Chami, Hakim Djelouah et Zohra Méliani. Il est possible que cette première édition comporte quelques imperfections, nous serions reconnaissants à tous ceux qui nous feraient part de leurs remarques et suggestions.

Alger octobre 2012.

Les auteurs

AÏT-GOUGAM Leïla
BENDAOUH Mohamed
DOULACHE Naïma
MÉKIDÈCHE Fawzia

PROGRAMME.

Domaine SM, : Licence de Physique: Première année L1, deuxième semestre S 2

UEF : **Module** : Phys 2 : Electricité

Semestre	Code	Intitulé	Cours/sem	TD/sem	TOTAL
S2	Phys2	Electricité	2x1h30	1x1h30	= 4h30

Interaction électrique : Electrification, Conservation de la charge, Conducteurs et isolants, Loi de Coulomb.

Electrostatique: Champ et potentiel créés par une charge, principe de superposition, distribution de charges, Topographie d'un champ.

Dipôle électrique : Potentiel et champ créés par un dipôle. Couple exercé sur un dipôle par un champ. Energie d'un dipôle.

Notion de flux. Théorème de Gauss (sans démonstration) : applications.

Conducteurs en équilibre. Influence totale.

Condensateurs : capacité, énergie électrique, groupements de condensateurs

Courants continus: Rupture d'un équilibre électrostatique. Intensité électrique, Loi d'Ohm groupements de résistances. Loi de Joule.

Circuits à courants continus : Générateur, récepteur. Lois de Kirchhoff.

Charge et décharge d'un condensateur.

Magnétisme : Champ créé par un aimant. Force de Lorentz, force de Laplace.

Moment magnétique d'une spire, couple agissant sur une spire placée dans un champ magnétique.

Loi de Biot : Applications

Force entre Deux courants parallèles : définition de l'Ampère.

Induction magnétique : Flux magnétique. Loi de Faraday. Générateurs de courants alternatifs.

F.E.M. d'auto induction Etablissement et rupture du courant dans un circuit R, L.

Courants alternatifs : Représentation d'une grandeur sinusoïdale : Représentation de Fresnel, notation complexe. Impédance. Applications : Circuits R,L,C série. Circuits R,L,C parallèle. Circuit bouchon.

Puissance en C.A. notation complexe.

Notions sur les courants triphasés : Obtention. Représentation de Fresnel. Montages étoile et triangle. Puissance en triphasé.

Ouvrages conseillés : 1°) Cours photocopié OPU *Electricité* : Caubarère, , Fourny, Ladjouze 2°) Alonso & Fynn Physique Tome 2

Principales notations

A, B, C, D etc : Points de l'espace

M Point où est calculé le champ \vec{E} ou \vec{B}

P Point où se trouvent les sources ρ ou \vec{J}

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Vecteurs unitaires, en coordonnées cartésiennes.

x, y, z Coordonnées cartésiennes d'un point

X, Y, Z Composantes d'un vecteur, en coordonnées cartésiennes.

\vec{a} Accélération

\vec{B} champ magnétique

C capacité

\vec{D} Excitation électrique

\vec{E} champ électrique

\vec{E}_m champ électromoteur

E Energie

e force électromotrice (f.e.m)

e charge de l'électron

f fréquence

\vec{F} Force

\vec{g} Champ de la pesanteur

\vec{H} Excitation magnétique

I Intensité du courant électrique

\vec{J} Vecteur densité de courant

J Moment d'inertie

$j = \sqrt{-1}$

K ou k Coefficient

L Coefficient de self induction

M Coefficient d'induction mutuelle

\vec{M} Moment magnétique

$\vec{M}_{\vec{F}/O}$ Moment d'une force / au point O.

$M_{\vec{F}/\Delta}$ Moment d'une force / à l'axe Δ .

m Masse

\vec{n} vecteur unitaire

P Puissance

\vec{p} Moment électrique

Q ou q Charge électrique

R Résistance électrique

\vec{R} ou \vec{r} Vecteur position

T Période

T° Température

t Temps

\vec{u} vecteur unitaire

V, U potentiel électrique

V Volume

\vec{V} ou \vec{v} Vitesse

W travail

X Réactance

Y Admittance

Z Impédance

α, β Angles

$\vec{\Gamma}$ Couple

ϵ Permittivité électrique

η Coefficient de viscosité, Rendement

θ Angle

λ Longueur d'onde

μ Perméabilité magnétique

π Nombre "Pi"

ρ Densité de charges volumiques

ρ_M Masse volumique

ρ_Ω Résistivité électrique.

σ Densité de charges superficielles

σ Conductivité électrique

τ Constante de temps

φ Phase ou déphasage

Φ Flux magnétique

ω Pulsation ou Vitesse angulaire

Ω Unité de résistance : Ohm.

TABLE DES MATIERES

Préface	1
Programme	3
Notations	4

Chapitre I
ELECTROSTATIQUE

1. INTRODUCTION	
1.1. Electrification par frottement (triboélectricité).....	9
1.2. Les deux types d'électricité	10
1.3. Autres modes d'électrification	10
1.4. L'électroscope à feuilles d'or	11
1.5. La charge électrique.....	11
1.6. Quantification de la charge électrique.....	12
1.7. Principe de la conservation de la charge électrique.....	13
1.8. L'électrification et la constitution de la matière.....	13
1.9. Aperçu historique	14
2. LA FORCE ELECTRIQUE	
2.1. Loi de Coulomb.....	15
2.2. Validité de la loi de Coulomb	17
3. LE CHAMP ELECTRIQUE	
3.1. Champ électrique.....	18
3.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée.....	19
3.3. Champ créé par plusieurs charges ponctuelles: Principe de superposition.....	19
3.4. Champ créé par une distribution continue de charges	20
3.5. Champ uniforme.....	20
4. LE POTENTIEL ELECTRIQUE	
4.1. Circulation d'un vecteur	21
4.2. Potentiel électrique	22
4.3. Cas de plusieurs charges, d'une distribution de charges	23
5. TOPOGRAPHIE DU CHAMP ELECTRIQUE	
5.1. Ligne de champ.....	25
5.2. Tube de champ	26
5.3. Surface équipotentielle.....	27
6. TRAVAIL & ENERGIE	
6.1. Travail de la force électrique	28
6.2. Energie potentielle	29
6.3. Energie interne d'une distribution de charges électriques	29
7. LE DIPOLE ELECTRIQUE	
7.1. Moment dipolaire électrique.....	30
7.2. Potentiel électrique créée par un dipôle	30
7.3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle.....	31
7.4. Dipôle placé dans un champ électrique uniforme	32
7.4.1. Couple.....	32
7.4.2. Energie potentielle.....	32
8. LES DIELECTRIQUES	

9. THEOREME DE GAUSS	
9.1. Flux d'un vecteur à travers une surface.....	35
9.2. Vecteur excitation ou déplacement électrique	35
9.3. Théorème de Gauss	36
9.4. Applications du théorème de Gauss.....	36
Annexe 1 : Les concepts de masse et de charge électrique	39
Exercices chapitre I	41

Chapitre II

CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

1. EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE	
1.1. Champ électrique.....	43
1.2. Potentiel électrique	43
1.3. Répartition des charges	44
1.4. Champ au voisinage d'un conducteur : Théorème de Coulomb	45
1.5. Pression électrostatique	46
1.6. Pouvoir des pointes.....	46
1.7. Conducteur creux	48
1.8. Capacité d'un conducteur	49
2. PHENOMENES D'INFLUENCE	
2.1. Eléments correspondants	51
2.2. Influence partielle	51
2.3. Influence totale	52
3. CONDENSATEURS	
3.1. Les condensateurs	53
3.2. Capacité d'un condensateur	54
3.3. Association de condensateurs	56
4. ENERGIE ET FORCE	
4.1. Energie électrostatique d'un conducteur.....	58
4.2. Energie électrostatique d'un ensemble de conducteurs en équilibre	58
4.3. Calcul de la force à partir de l'énergie	58
4.4. Energie emmagasinée dans un condensateur	60
4.5. Localisation de l'énergie : Densité d'énergie électrostatique	61
4.6. Force s'exerçant sur l'armature d'un condensateur	61
Exercices chapitre II	64

Chapitre III

LES COURANTS CONTINUS

1. COURANTS ELECTRIQUES	
1.1. Origine du courant électrique	67
1.2. Courant permanent	68
1.3. Sens conventionnel du courant	68
1.4. Intensité du courant	68
1.5. Ligne de courant.....	69
1.6. Vecteur densité de courant	69
1.7. Mouvement des électrons dans le vide.....	70
1.8. Mouvement des électrons dans un conducteur.....	70
2. LOI D'OHM	
2.1. Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique	72
2.2. Forme locale de la loi d'Ohm.....	72
2.3. Groupement de résistances	75
3. L'EFFET JOULE	
4. GENERATEURS	
4.1. Définitions	77

4.2. Générateurs à vide : Force électromotrice (f.é.m)	77
4.3. Générateur en charge	78
4.4. Association de générateurs	81
5. RECEPTEURS	
5.1. Force contre électromotrice d'un récepteur : " f.c.é.m " d'un récepteur	82
5.2. Schéma équivalent d'un récepteur	82
5.3. Différence de potentiel aux bornes d'un récepteur	82
5.4. Rendement d'un récepteur	82
6. ANALYSE d'UN RESEAU ELECTRIQUE	
6.1. Définitions	83
6.2. Lois de Kirchhoff	83
7. CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR	
7.1. Etude de la charge du condensateur	85
7.2. Etude de la décharge du condensateur	89
Exercices chapitre III	90

Chapitre IV

MAGNETOSTATIQUE

1. INTRODUCTION	
1.1. Propriétés des aimants	93
1.2. Champ magnétique	94
1.3. Force de Coulomb	95
1.4. L'expérience d'Oersted et ses conséquences	95
2. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR LE MOUVEMENT D'UNE CHARGE ELECTRIQUE	
2.1. Force de Lorentz	95
2.2. Application : Mouvement d'une particule dans un champ magnétique	96
3. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR UN COURANT ELECTRIQUE	
3.1. Force de Laplace	98
3.2. Action d'un champ sur un circuit fermé : Moment magnétique	99
3.3. Energie d'un circuit placé dans un champ magnétique	100
4. CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN COURANT	
4.1. Loi de Biot et Savart	102
4.2. Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles: Définition de l'Ampère	104
4.3. Champ créé par une spire circulaire en un point de son axe	105
4.4. Dipôle magnétique	105
4.5. Notions élémentaires sur l'aimantation de la matière	106
5. THEOREME D'AMPERE	
5.1. Vecteur excitation magnétique	107
5.2. Circulation de l'excitation magnétique le long d'un contour fermé	107
5.3. Application : Champ créé par un solénoïde de longueur infinie	108
6. FLUX MAGNETIQUE	
6.1. Flux du champ magnétique à travers une surface	109
6.2. Equation de conservation du flux magnétique	110
6.3. Expression du travail des forces en fonction du flux coupé	111
6.4. Expression du travail en fonction de la variation du flux à travers un circuit	112
6.5. Induction mutuelle de deux circuits	112
6.6. L'inductance d'un circuit électrique	112
6.7. Calcul des forces appliquées à un circuit électrique	113
Annexe 2: Le champ magnétique terrestre	115
Exercices chapitre IV	116

Chapitre V L'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

1. LES PHENOMENES D'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE	
1.1. Mise en évidence des phénomènes d'induction	119
1.2. Lois de l'induction.....	121
2. LOI DE LENZ FARADAY	
2.1. Cas d'un circuit fermé placé dans un champ constant et uniforme.....	122
2.2. Champ électromoteur	123
2.3. Loi de Lenz-Faraday en fonction de la vitesse	124
2.4. Equation de Maxwell-Faraday.....	125
3. MUTUELLE INDUCTION ET SELF INDUCTION	
4. APPLICATION DES PHENOMENES D'INDUCTION	
4.1. Générateur de courant alternatif	127
4.2. Courants de Foucault	128
5. CIRCUIT " RL "	
5.1. Etablissement du courant.....	129
5.2. Rupture du courant	130
5.3. Bilan énergétique.....	132
5.4 Localisation de l'énergie : Densité d'énergie magnétique.....	132
Exercices chapitre V	133

Chapitre VI LES COURANTS ALTERNATIFS

1. LES COURANTS ALTERNATIFS	
1.1. Définitions	135
1.2. Les courants sinusoïdaux.....	135
1.3. Production des courants sinusoïdaux.....	136
2. LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF SINUSOIDAL	
2.1. La notation complexe	138
2.2. La représentation de Fresnel.....	140
3. ASSOCIATION DES IMPEDANCES	
3.1. Impédances montées en série	145
3.2. Impédances montées en parallèle	146
3.3. Etude du circuit RLC série : Résonance	146
3.4. Bobine (R,L) et condensateur C en parallèle : Antirésonance.....	148
4. PUISSANCE ELECTRIQUE EN COURANT SINUSOIDAL	
4.1. Valeur instantanée de la puissance électrique	149
4.2. Valeur moyenne de la puissance électrique	149
4.3. Puissance active	150
4.4. Puissance réactive	150
4.5. Puissance apparente.....	152
5. PUISSANCE EN NOTATION COMPLEXE	152
6. FACTEUR DE PUISSANCE	153
Annexe 3: Les courants triphasés	155
Exercices chapitre VI	161
Annexe 4: Dimensions & unités des grandeurs physiques	166
BIBLIOGRAPHIE	167

Chapitre I

ELECTROSTATIQUE

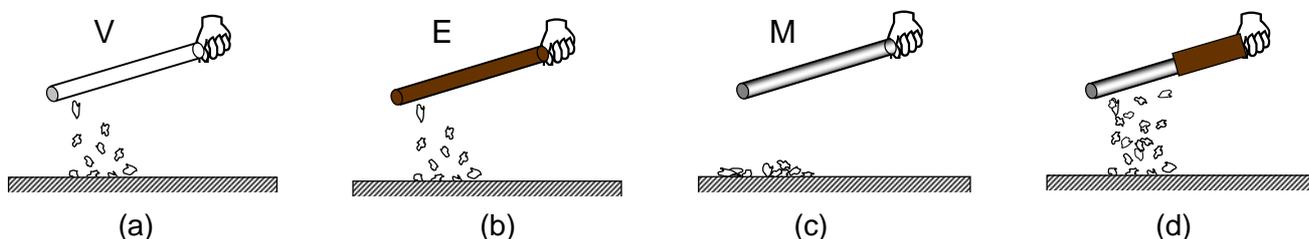
Nous avons étudié, en mécanique, l'interaction gravitationnelle qui intervient entre deux corps caractérisés par leurs masses. Nous allons considérer, dans ce qui suit, une autre interaction, l'interaction électrique, qui fait intervenir le concept de charge électrique. L'électrostatique est la partie de l'électricité qui ne fait intervenir que des charges fixes¹.

1. INTRODUCTION.

1. 1. Electrification par frottement (triboélectricité).

- Une tige en verre bien sèche, frottée à l'aide d'un morceau de drap en soie ou en laine, tenue à la main, attire de petits morceaux de papier² (figure I.1.a). On dit que le verre a été *électrisé*, ce phénomène est appelé *électrification* et la discipline de la physique qui traite de tels phénomènes est l'*électricité*.

- On obtient le même résultat si on remplace la tige en verre par un bâton d'ébonite³ et si on répète la même opération (figure I.1.b).



Figures I. 1

- Si on essaie d'électrifier, comme précédemment, une tige métallique, en cuivre par exemple, on n'obtient aucun résultat (figure I.1.c). La tige en métal, tenue à la main, n'exerce aucune force sur les morceaux de papier.

- Par contre si on tient, par l'intermédiaire d'un manche en bois, la tige métallique électrisée, on constate que des forces d'attraction se produisent sur toute la surface du métal (figure I.1.d).

Interprétation de ces expériences : On attribue cette propriété, qu'acquiert la matière et qui lui permet d'exercer une force, à l'existence de *charges électriques* q . Dans le cas du verre et de l'ébonite, ces expériences montrent que les charges restent localisées sur la partie frottée et ne se répandent pas sur toute la surface du matériau. Le verre et l'ébonite sont des *isolants électriques*.

¹ Les charges sont fixes dans le référentiel lié à l'observateur.

² Les morceaux de papier peuvent être remplacés par de la cendre ou une substance très légère.

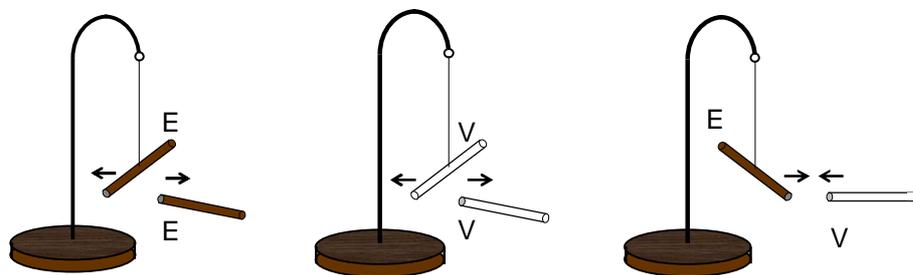
³ Ebonite : caoutchouc durci par mélange avec du soufre.

Par contre les charges dues à l'électrisation se déplacent dans les métaux et s'écoulent vers la terre à travers le corps de l'expérimentateur. C'est la raison pour laquelle on ne constate aucun effet de l'électrisation dans l'expérience de la figure I.1.c. Les métaux sont des corps *conducteurs* d'électricité.

Dans la quatrième expérience, le manche en bois, qui est un isolant, empêche l'écoulement des charges électriques. Néanmoins celles-ci se répandent sur toute la surface du métal.

1. 2. Les deux types d'électricité.

Les pendules, représentés sur les figures I.2, sont constitués d'une potence, fixée sur un socle en bois, à laquelle est relié un fil de soie sans torsion. Suspendons, en son milieu, un bâton d'ébonite dont une extrémité a été électrisée par frottement. Approchons de cette extrémité la partie électrisée, par la même méthode, d'un second bâton d'ébonite. L'interaction de ces parties électrisées se traduit par une répulsion.



Figures I.2 Répulsion et attraction entre corps électrisés

Répetons la même expérience, en remplaçant les bâtons d'ébonite par des tiges de verre électrisées comme précédemment. Là encore l'interaction se traduit par une répulsion.

Dans une troisième expérience, on met en présence l'extrémité électrisée du bâton d'ébonite et celle de la tige de verre électrisée. Il en résulte, à présent, une attraction.

Ces expériences mettent en évidence deux types d'électricité :

La première apparaît dans le verre : c'est *l'électricité vitreuse* à laquelle on a attribué arbitrairement un *signe positif*.

La seconde se manifeste dans l'ébonite et d'autres résines : c'est *l'électricité résineuse* ; on lui a attribué un *signe négatif*.

En outre, ces expériences montrent que : deux corps chargés d'une électricité de même signe, positive ou négative, se repoussent ; par contre ils s'attirent s'ils portent des charges de signes contraires.

Un corps qui n'est pas chargé est *neutre*.

1. 3. Autres modes d'électrisation.

Electrisation par contact : On constitue, à présent, un pendule électrostatique en suspendant au fil de soie une boule de polystyrène recouverte d'une matière conductrice. Celle-ci est initialement neutre. Approchons une tige en verre, électrisée par frottement, de la boule jusqu'au contact.

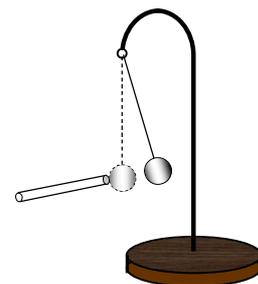


Figure I. 3

On constate que la boule est repoussée sous l'effet de son interaction avec la partie électrisée de la tige (figure I.3).

Cette expérience montre que lorsqu'un corps A, initialement neutre, est mis en contact avec un objet B portant une charge q , cette charge se répartit entre A et B. Les deux charges q_A et q_B , obtenues après électrisation par contact, sont de même signe : il en résulte une répulsion.

Electrisation par influence : Approchons une tige en verre électrisée de la boule B initialement neutre, sans la toucher. Nous constatons que la boule est attirée par la tige, comme l'illustre la figure I.4. La boule a été électrisée par influence. Lorsqu'on éloigne la tige électrisée, le pendule reprend sa position initiale. Le phénomène d'influence sera étudié au chapitre II.

Il existe d'autres modes d'électrisation. Par exemple, on peut électriser un corps, initialement neutre, en le reliant à une borne d'un générateur électrique.

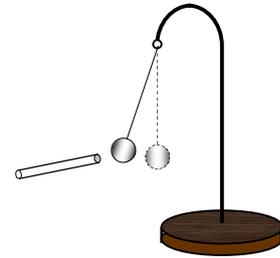


Figure I. 4

1.4. L'électroscope à feuilles d'or.

Le pendule électrostatique utilisé dans les expériences précédentes n'est pas un instrument très sensible. Souvent, pour détecter des états de faibles électrisations, on utilise un autre appareil : l'électroscope à feuilles d'or.

Il est constitué d'une tige métallique qui comporte à son extrémité inférieure deux feuilles d'or très minces qui tombent librement. Un plateau ou une boule métallique sont fixés à l'extrémité supérieure et l'ensemble est enfermé dans une cage métallique vitrée. On peut répéter les expériences sur l'électrisation par influence et par contact.

La figure I.5 met en évidence l'électrisation par influence. Le bâton d'ébonite, chargé négativement, est approché du plateau. Celui-ci se charge positivement par influence. Les charges négatives sont repoussées vers les feuilles d'or qui se repoussent.

Si on éloigne l'ébonite, le système (plateau, tige, feuilles) retrouve sa neutralité ; les feuilles de l'électroscope reprennent leur position verticale initiale.

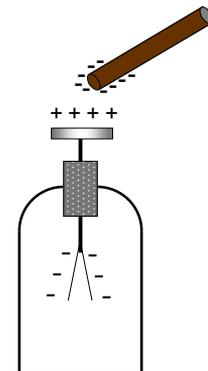


Figure I. 5

L'écartement des feuilles est d'autant plus grand que la charge de l'ébonite est grande.

Dans le cas d'une électrisation par contact, le bâton d'ébonite transmet, au système (plateau, tige, feuilles), une partie de ses charges. L'électroscope se charge négativement.

Pour le décharger, il suffit de relier le plateau à la terre par un conducteur.

1.5. La charge électrique.

Le concept de charge électrique : Les résultats des expériences précédentes ont amené les savants à introduire le concept de *charge électrique* confirmé par les

travaux de Coulomb⁴ et surtout par la découverte de l'électron en 1881 par Joseph J. Thomson. La charge électrique, qui caractérise le phénomène d'électrisation, ne peut être dissociée de la matière. Elle existe sous deux formes, qualifiées de *positive* et de *negative*.

Les expériences précédentes permettent d'énoncer la loi suivante:

Deux charges électriques de même signe positif ou négatif, se repoussent ; par contre elles s'attirent si elles sont de signes contraires.

Le concept de charge ponctuelle : Comme pour la masse, on introduit le concept de charge ponctuelle. C'est une charge dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport aux distances d'observation pour être assimilée à un point géométrique.

La charge électrique est une grandeur mesurable: Une grandeur physique est mesurable lorsqu'on sait définir le rapport de deux grandeurs G_1 et G_2 de son espèce⁵.

$$\frac{G_1}{G_2} = k$$

où k est une constante.

Soit une charge Q_1 placée en un point P de l'espace ; en un point M, qui se trouve à une distance d de P, on place une autre charge q et on mesure l'intensité de la force F_1 qui s'exerce sur q de la part de Q_1 . On remplace Q_1 par une autre charge Q_2 et on mesure la force F_2 que subit la charge test q . Ces forces ont toutes la même direction. L'expérience montre que:

Une charge électrique est proportionnelle au module de la force qu'elle crée en agissant sur une même charge test placée en un même point.

On trouve

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = k$$

Quelle que soit la charge Q le rapport k reste constant. La charge électrique est donc une grandeur mesurable. Parmi toutes les charges Q , on en choisit arbitrairement une comme unité de mesure U , et on exprime toutes les autres charges en fonction de U sous la forme :

$$Q = k U$$

k est la mesure de Q avec l'unité choisie U . Dans le système d'unités M.K.S.A (mètre, kilogramme, seconde, ampère) l'unité de la charge électrique est le *coulomb* dont le symbole est C (voir Annexe 4).

1.6. Quantification de la charge électrique.

Le physicien américain Robert A. Millikan a montré en 1913, à partir d'une expérience mettant en jeu des gouttes d'huile électrisées, le fait que toute charge électrique q est quantifiée, c'est à dire qu'elle n'existe que sous forme de multiples d'une charge élémentaire indivisible e :

$$q = Ne$$

où :

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$$

⁴ Voir § 2.

⁵ Deux grandeurs sont de la même espèce si on peut les comparer.

C'est la charge électrique portée par l'électron et le proton.

<i>Particule</i>	<i>Charge électrique</i>	<i>Masse</i>
Electron	$- 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	$+ 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	0	$1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Tableau I.1. Constituants de l'atome

L'expérience de Millikan sera présentée sous forme d'exercice (Exercice I.10).

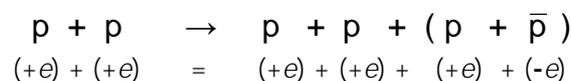
1. 7. Principe de la conservation de la charge électrique.

Lors des expériences précédentes, quand on frotte la tige de verre avec un morceau de drap, la tige de verre acquiert une charge positive, mais en même temps le morceau de drap prend une charge égale et opposée. Dans le système formé par la tige et le drap, la quantité de charge électrique reste constante. Les charges négatives arrachées au verre se retrouvent dans le morceau de drap.

Ce phénomène résulte d'un principe général, c'est le *Principe de conservation de la charge électrique* :

Dans un système isolé la somme algébrique des charges électriques reste constante.

En physique un principe ne se démontre pas ; il reste valable tant qu'il n'est pas démenti par l'expérience⁶. Le principe de la conservation de la charge a toujours été vérifié expérimentalement. Ainsi, lors d'un choc entre deux protons, lorsque les énergies mises en jeu sont importantes, il peut en résulter une création de nouvelles particules : une paire proton-antiproton⁷.



On remarque que la charge électrique totale est la même avant et après le choc.

1.8. L'électrisation et la constitution de la matière.

On sait que la matière est constituée d'atomes⁸. Dans le modèle planétaire, un atome est formé d'un noyau chargé positivement autour duquel gravitent Z électrons. La charge totale du noyau est $+Ze$ et celles de tous les électrons est $-Ze$. Z est le numéro atomique de l'atome. Par conséquent un échantillon de matière est électriquement neutre.

Les électrons internes sont fortement liés au noyau ; par contre les électrons périphériques le sont beaucoup moins. Ces derniers peuvent être facilement arrachés par frottement. Le fait de frotter deux corps, électriquement neutres, l'un contre l'autre, entraîne un transfert d'électrons de l'un vers l'autre. Les deux corps ne sont plus neutres, ils sont *électrisés*.

Celui qui a cédé des électrons se trouve chargé positivement et celui qui en a reçu se charge négativement.

⁶ Le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m \vec{a}$ par exemple n'est plus valable pour des vitesses qui ne sont plus négligeables devant celle de la lumière ; il en est de même du principe de l'action et de la réaction.

⁷ Voir le cours de Relativité restreinte [2] de la 3^{ème} année de Licence (chapitre III : Dynamique) .

⁸ La structure de la matière est étudiée en S1 (Chim 1 : *Structure de la Matière*)

L'électrisation résulte d'un transfert ou d'un déplacement d'électrons⁹.

Les expériences précédentes ont mis en évidence deux types de matériaux : Les *isolants électriques* ou *diélectriques* (verre, résines, matières plastiques, etc.) qui ne comportent que des charges liées ; celles-ci ne peuvent effectuer que des petits déplacements autour de leurs positions d'équilibre.

Les seconds, dans lesquels les électrons peuvent se déplacer facilement, sont des *conducteurs*. Les métaux sont de bons conducteurs, le corps humain l'est moins, mais comme l'a montré l'expérience de la figure I.1.c, il permet aux charges électriques de s'écouler vers la terre qui, elle aussi, est un conducteur.

1.9. Aperçu historique.

Ces phénomènes d'électrisation avaient déjà été observés dès l'antiquité. Les grecs, contemporains du mathématicien Thalès de Milet, avaient remarqué, six siècles avant Jésus Christ, que l'ambre jaune (électron) frotté attirait des substances très légères. Mais la contribution des grecs à l'électricité fut, comme l'a signalé P. Devaux¹⁰, purement linguistique. En 1672 l'allemand Otto Von Guericke invente la première machine électrostatique qui produit de l'électricité par frottement. Les phénomènes d'électrisation par influence ont été découverts par l'anglais Stephen Gray à qui nous devons aussi la distinction entre matériaux conducteurs et matériaux isolants. La mise en évidence, en 1733, de l'existence de deux *sortes d'électricité* fut l'œuvre du français Charles J. Du Fay: il qualifia de vitreuse celle qui est développée sur du verre, et l'autre de résineuse parce qu'elle apparaît sur de la résine. Par la suite, l'américain Benjamin Franklin attribua le signe positif à l'électricité vitreuse et le signe négatif à celle qui apparaît dans les résines.

Avant 1785, l'étude de l'électrostatique était purement qualitative. On disposait de la machine de Von Guericke pour produire l'électricité et de la bouteille de Leyde pour l'emmagasiner. Celle-ci fut inventée, à Leyde en 1745, par Van Musschenbroeck. En 1785, Coulomb énonce une loi qui va permettre d'aborder l'étude de l'électricité¹¹ avec l'outil mathématique et d'élaborer des théories.

⁹ Il y a transfert d'électrons dans le cas d'électrisations par frottement et par contact et déplacement d'électrons lors d'une électrisation par influence (Voir Ch II. § 2).

¹⁰ Devaux P. *Histoire de l'électricité* Ed. P.U.F 1954

¹¹ C'est cette étude que nous allons entamer, après avoir introduit la loi de Coulomb, dans ce chapitre consacré aux phénomènes d'électrostatique du vide.

Nous aborderons, dans la suite de ce chapitre, les concepts fondamentaux de force, d'énergie, de champ et de potentiel.

Les forces d'interaction : c'est la méthode de Newton que nous avons utilisée en mécanique en S1 et que nous appliquerons à l'électrostatique dans le cas de l'interaction coulombienne.

L'énergie : ce concept, introduit par Leibnitz, est à la base de la mécanique analytique de Lagrange et de Hamilton. Nous verrons, dans ce cours, de nombreux problèmes qui peuvent être résolus à partir de l'énergie emmagasinée dans un système.

Le champ : ce concept, introduit par Faraday et Maxwell et généralisé par Einstein, est à la base de l'électromagnétisme.

Le potentiel, utilisé par Poisson et Green en électricité, sera introduit dans ce chapitre au paragraphe 4.

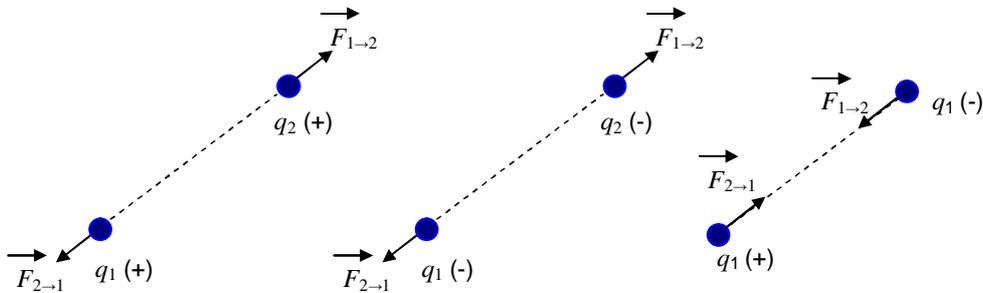
Un même problème peut être résolu, comme nous le verrons par la suite, par des méthodes différentes basées sur l'un ou l'autre de ces concepts. En voici un exemple en mécanique.

Exercice I. 1. Calculer la hauteur h atteinte par un corps de masse m lancé verticalement avec une vitesse V_0 , au voisinage du sol, en $x = 0$. Résoudre le problème en utilisant le concept de force (principe fondamental de la dynamique) puis le concept d'énergie (principe de la conservation de l'énergie). A.N : $V_0 = 6\text{m/s}$ [Solution I. 1].

2. LA FORCE ELECTROSTATIQUE.

2.1. Loi de Coulomb.

Coulomb a effectué, en 1785, une série de mesures, à l'aide d'une balance de torsion (§ 2.2), qui lui ont permis de déterminer les caractéristiques de la force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées par une distance r .



Figures I.6

Ces expériences ont mis en évidence une analogie avec la loi de la gravitation universelle de Newton, Coulomb a alors proposé l'expression mathématique :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad (1)$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ désigne la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 et $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ un vecteur unitaire porté par la droite qui joint les deux charges et orienté de q_1 vers q_2 (figures I.6). K une constante.

Lorsque le système MKSA rationalisé fut approuvé en 1946, on attribua à cette constante la valeur

$$K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \quad \text{où} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \quad (2)$$

est la permittivité électrique du vide. Elle est mesurée, dans ce système, en farad par mètre : F/m (Ch . II, § 1.8 et Annexe 4)

La force électrostatique est *répulsive* si les charges sont de même signe, et *attractive* si elles sont de signes opposés (figures I.6), alors que la force de gravitation est purement attractive.

La loi de Coulomb est une loi empirique¹², elle est à la base de l'électrostatique.

Remarque : La loi de Coulomb obéit au modèle newtonien. Dans ce modèle, la force d'interaction, présente les caractéristiques suivantes :

- 1°) Elle s'exerce sur des objets de *même nature*, ici des charges électriques.
- 2°) Elle agit *suivant la droite* qui joint les deux objets.
- 3°) Elle est proportionnelle au produit des grandeurs liées aux objets considérés : q_1 et q_2 .
- 4°) Elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux objets.
- 5°) Elle obéit au principe de l'action et de la réaction. $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$
- 6°) Enfin, elle est instantanée.

¹² Une loi empirique est obtenue à partir d'observations et d'expériences, mais elle n'est pas démontrée théoriquement.

Exercice I. 2. Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on suppose que celui-ci est constitué d'un électron, de masse m_e et portant une charge $-e$, qui tourne, sur une trajectoire circulaire de rayon r , autour d'un noyau assimilé à un objet ponctuel. Le noyau de l'atome d'hydrogène ne comporte qu'un proton.

Calculer le rapport des deux forces qui interviennent dans ce mouvement : La force électrostatique F_E et la force de gravitation F_G , on donne :

La charge électrique du proton est $+e$ et sa masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg,
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $r = 5,3 \times 10^{-11}$ m

Solution I. 2. Calculons les modules des deux forces d'interaction qui interviennent ici :

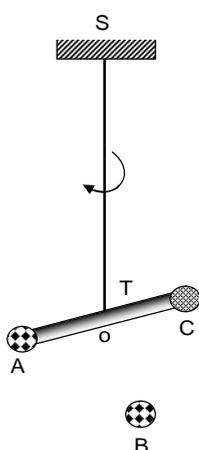
$$F_E = K \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \times \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_G = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \times 1,67 \cdot 10^{-27}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

Le rapport de ces deux forces : $\frac{F_E}{F_G} = 0,23 \cdot 10^{40}$ est très grand.

Par conséquent dans tous les problèmes d'électricité les interactions gravitationnelles seront négligées devant les forces d'origine électromagnétique. Par contre à grande échelle, en astronomie, seules les forces de gravitation interviennent. La matière comporte autant de charges positives que de charges négatives et, à cette échelle, la résultante des forces électrostatiques est nulle.

Exercice I. 3. Le pendule de torsion, qui est représenté sur la figure et qui constitue l'élément principal de la balance de Coulomb, comporte une tige T, isolante, horizontale, très



légère, munie, à une extrémité, d'une petite sphère métallique A et à l'autre extrémité d'un contrepoids isolant C. Sa longueur est $l = 20$ cm. Elle est suspendue en son milieu O à un support S fixe, par un fil métallique de longueur L et de constante de torsion $C = 12 \cdot 10^{-7}$ N.m/rad. La boule A, complètement déchargée, se trouve initialement en un point correspondant à un angle de torsion nul ($\alpha = 0$). Le système est en équilibre.

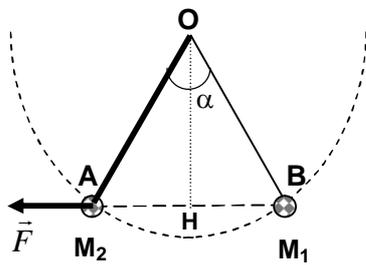
On met A en contact avec une boule B identique à A et portant une charge $+Q$. Il en résulte une électrisation de A qui tourne d'un angle $\alpha = 60^\circ$ par rapport à sa position initiale. Le système atteint, alors, une seconde position d'équilibre. Calculer la valeur de la charge Q .

N.B : Dans l'expérience de Coulomb, ce pendule est placé à l'intérieur d'une enceinte en verre. Les déviations sont repérées sur une bande graduée. La boule B est introduite, à l'aide d'une tige isolante, à travers un orifice percé dans le couvercle, comme le montre la figure I.7.

Solution I.3. Initialement la boule A est déchargée et la boule B porte une charge $+Q$. Après le contact, les deux boules étant identiques, chacune d'elles va prendre une charge :

$$q = Q/2$$

Appelons M_1 la position initiale de la boule A et M_2 sa nouvelle position lorsque le système atteint son équilibre après avoir tourné d'un angle α .



La figure ci-contre correspond à la 2^{ème} position d'équilibre du pendule. Le moment $M_{\vec{F}/\Delta}$ de la force \vec{F} , par rapport à l'axe de rotation Δ , est équilibré par le couple de torsion : $\Gamma = C\alpha$ du fil. La force de Coulomb a pour expression :

$$F = 9.10^9 \frac{q^2}{d^2} = 9.10^9 \frac{q^2}{l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

En effet $d = M_1M_2 = 2 M_1H = l \sin \frac{\alpha}{2}$

Calcul du moment $M_{\vec{F}/\Delta}$ $M_{\vec{F}/\Delta} = F OH = F \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 9.10^9 \frac{q^2}{2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}$

A l'équilibre $M_{\vec{F}/\Delta} = \Gamma$ d'où :

$$Q = 2q = 2 \sqrt{\frac{C \alpha}{9.10^9} \frac{2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = 8,03 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

2.2. Validité et importance de la loi de Coulomb.

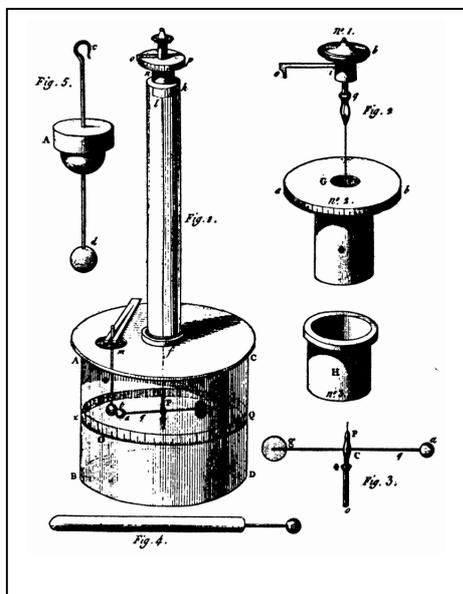


Figure I.7

La loi de Coulomb est valable en électrostatique. Elle reste valable dans le domaine des faibles vitesses, mais elle ne l'est plus pour les grandes vitesses. Son intervention dans les interactions intra nucléaires, est très faible. Le noyau contient des neutrons, dont la charge est nulle et des protons chargés positivement ; la répulsion coulombienne ne permet donc pas d'expliquer la cohésion du noyau. Une autre interaction intervient à cette échelle : c'est l'interaction forte.

La loi de Coulomb, obtenue à l'aide de la balance représentée ci-contre, est à la base de l'électrostatique, elle permet d'obtenir le champ et le potentiel électrostatiques. Mais ce n'est pas tout, en partant de cette loi et en appliquant la théorie de la relativité, on obtient l'expression de la force d'interaction entre deux charges en mouvement. Elle permet également de calculer les champs électrique et magnétique créés par une charge animée d'une vitesse constante. On peut en déduire, pour les faibles vitesses, la loi de Biot et la force de Lorentz que nous donnerons, au chapitre IV, sous forme de lois empiriques.

La planche de la figure I.7. est extraite des «*Mémoires relatifs à la physique*» de Charles André COULOMB 1785, réédités par A. Blanchard Paris 2002

3. LE CHAMP ELECTRIQUE¹³.

Au paragraphe précédent, nous avons utilisé le concept de force d'interaction.

Dans le cas de deux charges électriques par exemple, chacune des charges exerce sur l'autre une force dont l'expression mathématique est donnée par la loi de Coulomb. En vertu du principe de l'action et de la réaction de Newton, la seconde charge exerce sur la première une force égale et opposée. Ainsi les deux charges jouent le même rôle. En outre, cette interaction est, comme nous l'avons vu au §.2, *instantanée*.

Avec le concept de champ, le problème est posé d'une façon différente.

Une charge électrique Q , appelée "*charge source*", crée, dans l'espace environnant, appelé "*champ*", un "état" qui est mis en évidence par son action sur toute autre charge q placée en un point M de cet espace. Cet "état" existe *même en l'absence* de la charge q . Les charges Q et q ne jouent plus ici le même rôle : Q est la charge source du *champ* qu'elle crée et q la charge dont le comportement, dans ce champ, sera étudié.

3.1. Champ électrique.

En électrostatique:

On appelle champ électrique une région de l'espace où, en tout point, une charge q , maintenue immobile, est soumise à l'action d'une force électrique.

On introduit alors une grandeur vectorielle \vec{E} telle que

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (3)$$

Cette grandeur \vec{E} est également appelée *champ électrique*.

De la même manière en mécanique, si au voisinage de la terre, où règne le champ de la pesanteur \vec{g} , on place une masse m , elle sera soumise à la force de gravitation qui, dans ce cas, n'est autre que son poids.

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (3')$$

On peut noter l'analogie entre le champ électrique \vec{E} et le champ de gravitation \vec{g} créé par la terre. Seulement \vec{g} est toujours dirigé vers le centre de la terre alors que le sens du champ électrique dépend du signe des charges qui le créent (figures I.8).

Dans le cas général:

On appelle champ une région de l'espace où, en tout point, une particule est soumise à l'action d'une force.

N.B. 1°) L'existence d'un champ ne se manifeste que lorsqu'on y introduit un corps

- de masse m dans le cas la gravitation
- de charge q dans le cas de l'électrostatique.

2°) Le *champ* désigne :

- la région de l'espace où une particule est soumise à l'action d'une force
- la grandeur vectorielle \vec{E} ou \vec{g} par exemple.

¹³ Selon Einstein : "La théorie du champ électrique de Faraday et de Maxwell représente probablement la transformation la plus profonde que les fondements de la physique aient subi depuis le temps de Newton." Conceptions scientifiques Ed. Flammarion 1990 page 44.

3.2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée.

Dans le cas d'une seule charge source Q , la force qui s'exerce sur la charge test q est donnée par la loi de Coulomb :

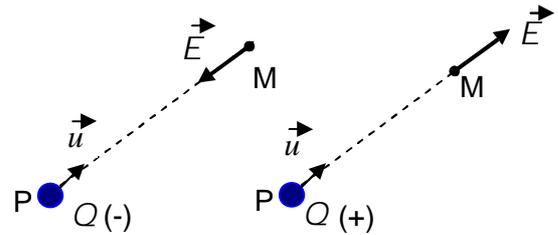
$$\vec{F} = K \frac{Qq}{r^2} \vec{u} \quad (4)$$

Avec (3) on obtient l'expression du champ électrostatique¹⁴ :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} \quad (5)$$

C'est l'expression mathématique du champ électrostatique créé, au point M, par la charge source Q placée en P.

Les figures I.8 montrent que le champ est orienté vers la charge lorsqu'elle est négative et en sens inverse lorsqu'elle est positive.



Figures I. 8

3.3. Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles : Principe de superposition.

On considère maintenant n particules de charges électriques Q_i , situées en des points P_i . On se propose de déterminer le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M distant de r_i des points P_i .

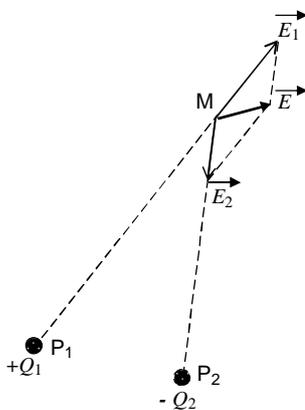


Figure I. 9

Ce champ est obtenu par la superposition des champs créés par chaque charge Q_i . Chacun de ces champs est calculé comme si la charge source était seule.

Ce *principe de superposition* résulte des propriétés d'additivité vectorielle des forces et des champs électrostatiques.

La figure I. 9 représente le champ créé par deux charges électriques en un point M de l'espace : c'est la somme vectorielle \vec{E} des deux champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créés respectivement par $(+Q_1)$ et $(-Q_2)$.

Dans le cas de n charges sources Q_i , le champ électrique résultant est :

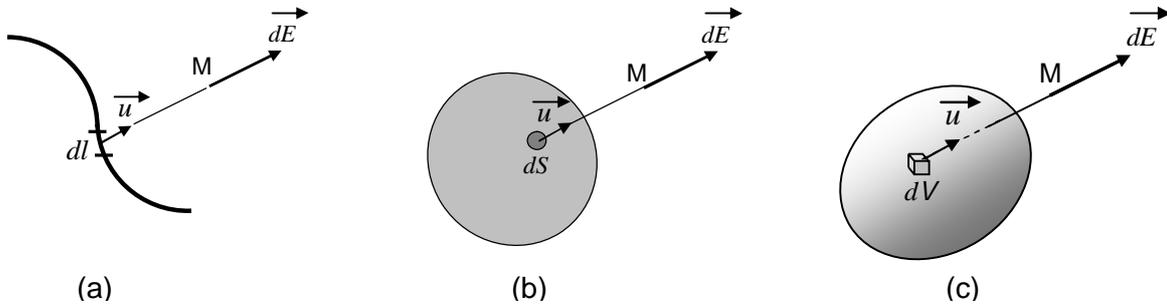
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (6)$$

¹⁴ Le champ électrostatique est la valeur du champ électrique en régime indépendant du temps (électrostatique). Dans le cas général, le champ électrique a deux composantes : le champ électrostatique et le champ électromoteur (Voir Ch V § 2.2)

3.4 Champ créé par une distribution continue de charges.

Lorsque la charge Q est répartie sur un fil avec une densité linéique λ , chaque élément dl porte une charge $dQ = \lambda dl$, et crée un champ élémentaire:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}, \quad \text{le champ créé par } Q \text{ est : } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u} \quad (7)$$



Figures I. 10

Dans le cas d'une surface chargée avec une densité surfacique σ telle que $dQ = \sigma dS$, on trouve de la même façon :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u} \quad (8)$$

De même dans le cas d'un volume V chargé avec une densité volumique ρ telle que. $dQ = \rho dV$ on obtient :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u} \quad (9)$$

dl , dS et dV désignent respectivement les éléments de longueur, de surface et de volume.

3.5. Champ uniforme.

Un champ uniforme est une région de l'espace où le vecteur champ reste constant en tous les points de cette région.

Remarques : 1°) Ce concept peut être généralisé à tous les vecteurs en introduisant des "champs de vecteurs". Par exemple, un champ de vitesses, un champ d'accélération etc.

Mais il n'existe que deux champs de force : le champ de gravitation et le champ électromagnétique dont le champ électrique est une composante¹⁵.

En électromagnétisme, la notion de champ a une importance fondamentale. Ce n'est pas le cas en mécanique newtonienne, où l'on considère plutôt les forces d'interaction. Par contre le concept de champ est à la base de la théorie de la relativité générale¹⁶ qui donne une explication de la gravitation.

2°) En physique classique, c'est-à-dire lorsqu'on ne tient pas compte des effets quantiques, une particule est caractérisée par sa masse¹⁷ m et sa charge électrique q . La masse est la source du champ de gravitation et la charge électrique crée le champ électromagnétique.

¹⁵ C'est ce que nous verrons dans le cours de *Relativité* [2] en L3.

¹⁶ Cette théorie a été élaborée pour comprendre des phénomènes que la théorie de Newton était incapable d'expliquer.

¹⁷ Voir l'annexe 1.

4. POTENTIEL ELECTRIQUE.

4.1. Circulation d'un vecteur.

En mécanique nous avons défini le travail élémentaire dW d'une force \vec{F} le long d'un trajet infiniment petit $\overline{MM'} = d\vec{l}$ par le produit scalaire:

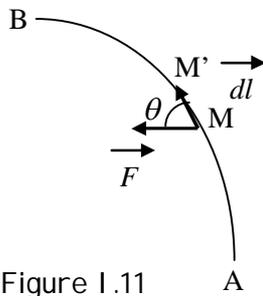


Figure I.11

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \theta \quad (10)$$

Lorsque le trajet AB n'est plus un infiniment petit, le travail W de la force \vec{F} entre deux points A et B, est égal à la somme des travaux élémentaires dW .

A la limite, on passe à l'intégrale :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (11)$$

Dans le cas de la pesanteur, on sait¹⁸ que le travail de la force :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

ne dépend pas du chemin suivi et ne dépend que des valeurs de l'énergie potentielle E_{pA} et E_{pB} mesurées en A et B.

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = E_{pA} - E_{pB}$$

Par conséquent, le travail de cette force, le long d'un trajet fermé, est nul.

La notion de travail W , qui concerne les forces, peut être étendue à tous les vecteurs en introduisant la "circulation" C d'un vecteur le long d'un trajet AB. La circulation élémentaire dC d'un vecteur :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

au cours d'un déplacement infiniment petit $d\vec{l}$ est définie par le produit scalaire :

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (12)$$

Soit en coordonnées cartésiennes :

$$dC = A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (13)$$

et en coordonnées cylindriques :

$$dC = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_z dz \quad (14)$$

Lors d'un déplacement entre deux points A et B éloignés, on passe à l'intégrale :

$$C = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (15)$$

Remarque : La circulation d'un vecteur, le long d'une courbe, est une notion mathématique introduite en analyse vectorielle.

¹⁸ Voir le cours de Mécanique de S1.

4.2. Potentiel électrique.

Calculons la circulation du vecteur *champ électrique* \vec{E} , créé par une charge fixe Q , lors d'un déplacement élémentaire $\overline{MM'} = \overline{d\vec{l}}$:

$$dC = \vec{E} \cdot \overline{d\vec{l}} \quad (16)$$

En coordonnées polaires, l'expression du champ se limite à sa composante radiale, par conséquent :

$$dC = E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

Or $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$ n'est autre que la dérivée de $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ donc :

$$E dr = -d \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \right]$$

Le vecteur \vec{E} dérive d'une fonction scalaire : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C$ (17)

appelée "*potentiel électrique*". Si l'on convient que le potentiel est nul à l'infini, la constante C s'annule, et on a :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (18)$$

On peut écrire¹⁹ :
soit

$$\vec{E} \cdot \overline{d\vec{l}} = -dV \quad (19)$$

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV$$

Ce résultat, trouvé dans le cas d'une seule charge source, est général :

Le champ électrostatique dérive d'un potentiel scalaire V .

Ses composantes sont :

- en coordonnées cartésiennes :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (20)$$

- en coordonnées cylindriques :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (21)$$

La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est obtenue par l'intégration, entre ces deux points, du champ électrique. Elle est égale à la variation du potentiel électrique entre les positions A et B et ne dépend pas du chemin suivi. Elle est donnée par la relation :

¹⁹ En analyse vectorielle on introduit le "*gradient*", l'expression (19) devient $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

Cette expression montre que²⁰ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{22}$$

La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée quelconque est nulle.

4.3. Potentiel électrique créé par plusieurs charges, par une distribution de charges.

Comme pour le champ électrique, on applique le principe de superposition en raison de l'additivité algébrique des potentiels. Ainsi, le potentiel créé par n charges fixes $Q_1, Q_2, Q_3, Q_i \dots Q_n$, est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \tag{23}$$

Cette expression montre que *le potentiel électrostatique est, comme le champ, une fonction du point, calculée à partir des charges sources.*

Lorsque la charge Q est répartie sur un fil avec une densité linéique $\lambda = dQ/dl$
 et dans le cas d'une distribution continue superficielle de charges $\sigma = dQ/dS$
 ou d'une distribution volumique $\rho = dQ/dV$
 on procède comme pour le calcul du champ et on obtient respectivement :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{r} dl, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma}{r} dS \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{r} dV \tag{24}$$

Exemple : Calcul du champ et du potentiel créés par une charge Q , portée par un disque plein de faible épaisseur, en un point M sur l'axe oz. La charge est uniformément répartie sur le disque. Soit $Q = \sigma S$ où σ représente la densité de charge superficielle et $S = \pi R^2$ la surface du disque.

Calcul du champ électrique : On calcule le champ par la méthode directe en un point M d'ordonnée z :

Prenons un élément de charge $dQ = \sigma dS$ sur le disque, il crée au point M un élément de champ électrique :

$$d\vec{E}_1 = \frac{KdQ}{PM^2} \vec{u}$$

Tout plan contenant (oz) est plan de symétrie de la distribution, donc pour tout point M de (oz) , le champ électrique total $\vec{E}(M)$ est porté par l'axe (oz) .

Un bon choix de l'élément de surface peut simplifier considérablement le calcul du champ électrique créé par tout le disque.

On utilise, dans ce cas, comme élément de surface une *couronne élémentaire* de rayon r , d'épaisseur dr (figure I.12).

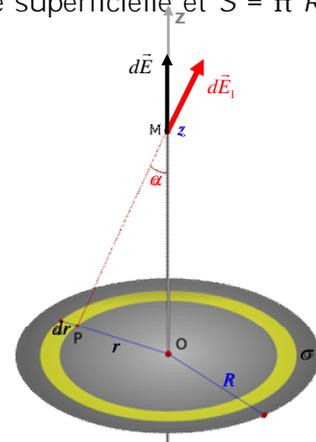


Figure I.12

²⁰ Le signe \oint signifie que la circulation est calculée le long d'un contour fermé.

La surface de cette couronne est:

$$dS = 2\pi r dr$$

Le champ électrique, créé par cette couronne élémentaire de charge, est, pour des raisons de symétrie, porté par l'axe \vec{oz} . En un point M de \vec{oz} on a :

$$dE = \frac{K\sigma dS}{PM^2} \cos \alpha$$

et le champ électrique total au point M créé par le disque est $E(M) = \int dE$.

Afin de prendre en compte toute la surface chargée du disque, on intègre suivant le rayon r entre 0 et R . Pour cela, on exprime tout en fonction de cette variable r :

Comme : $\cos \alpha = \frac{z}{PM}$ et $PM^2 = z^2 + r^2$,

le champ total devient :

$$E = 2\pi K\sigma z \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^R$$

Avec le changement de variable $u = z^2 + r^2$ et $du = 2r dr$, on obtient :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^R \quad \text{ou encore :} \quad E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

$$\text{- Pour } z > 0, |z| = +z \text{ et on a : } E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad \text{(a)}$$

$$\text{- Pour } z < 0, |z| = -z \text{ et on a : } E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad \text{(b)}$$

Calcul du potentiel électrique : En utilisant la circulation du champ électrique le long de la ligne de champ (oz), nous avons :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dz \Rightarrow V = -\int E(z) dz$$

Pour $z > 0$ et en utilisant l'expression (a) du champ $E(z)$ avec le changement de variable $u = z^2 + r^2$ et $du = 2r dr$, on obtient le potentiel :

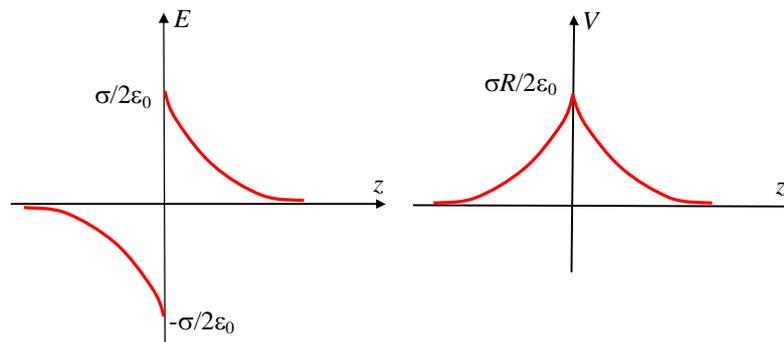
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - z \right] + C^{te}$$

De la même manière, pour $z < 0$, on obtient :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} + z \right] + C^{te}$$

Le calcul de la constante se fait en supposant que lorsque $z \rightarrow \infty$ on a $V=0$ et $C^{te} = 0$

On peut noter la continuité, au point $z = 0$, du potentiel et la discontinuité du champ.



Tracés des graphes de $E(z)$ et $V(z)$

Exercice I.6. Reprendre, pour cette même distribution de charges, le calcul du potentiel électrique V par la méthode directe puis déduire l'expression du champ électrique.

5. TOPOGRAPHIE DU CHAMP ELECTRIQUE.

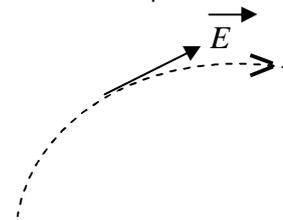
La présence de charges sources dans une région de l'espace modifie les propriétés électriques de celle-ci en créant, en chaque point M , un champ électrique. On introduit alors le concept de *lignes de champ*.

Le tracé de ces lignes donne une représentation spatiale du champ.

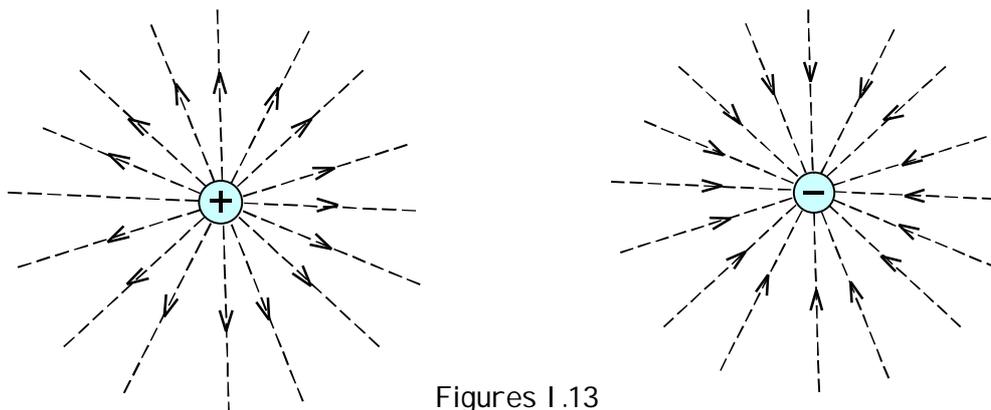
5.1. Ligne de champ.

Une ligne de champ est une courbe orientée à laquelle est tangente, en chacun de ses points, le champ électrique.

L'orientation de cette ligne suit celle du champ électrique.



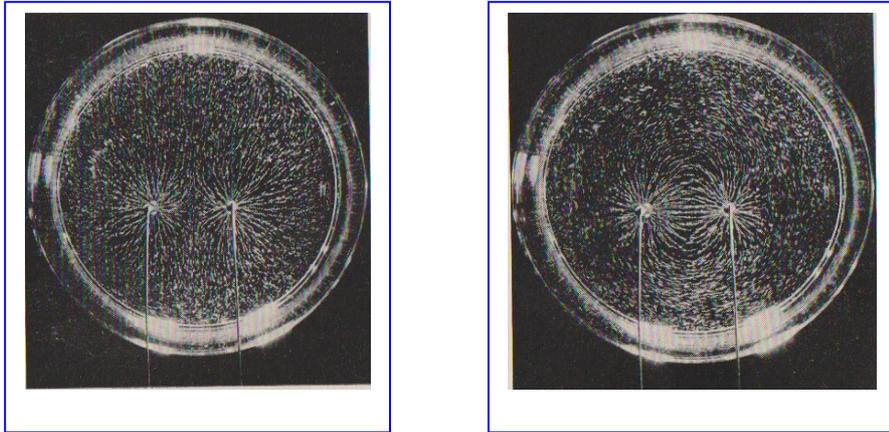
Les figures I.13 représentent les lignes de champ dues à une seule charge source Q . Si celle-ci est positive (+) le champ est dirigé de la charge vers l'extérieur. Si la charge est négative (-), le champ est dirigé de l'extérieur vers la charge.



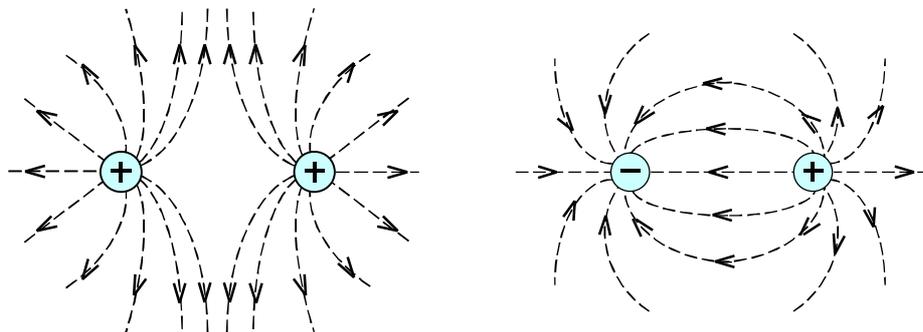
Figures I.13

Faraday a introduit le concept de champ, en observant les lignes du champ magnétique (voir Ch IV) dues à un aimant. Il les a visualisées en répandant, autour de l'aimant de la limaille de fer.

De la même façon on peut visualiser les lignes du champ électrique à l'aide de graines de gazon plongées dans un liquide isolant comme le montrent les photographies ci-dessous. Elles représentent respectivement les lignes de champ de deux charges égales positives (à gauche) et celles de deux charges égales et de signes contraires (à droite). Cette disposition des lignes de champ donne la nette impression que les charges de même signe se repoussent et que les charges de signes contraires s'attirent.

Photographies extraites de "*La Physique*" PSSC Dunod 1970 page 470

Figures I.14



Chaque charge source crée des lignes de champ telles qu'elles sont représentées sur les figures I.13. La mise en présence de deux charges, d'égale valeur, entraîne une déformation des lignes de champ et on obtient une nouvelle topographie (figures I.14). En chaque point, la ligne de champ est tangente au champ résultant.

5.2. Tube de champ.

Un tube de champ ou tube de forces est une surface formée par des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée. Si on limite le tube de champ par des sections terminales, il constitue une surface fermée.

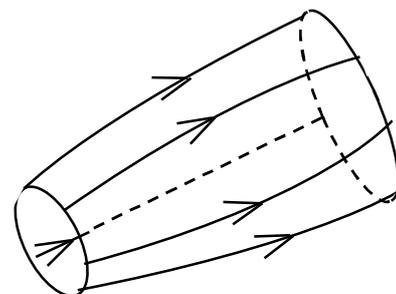


Figure I.15

5.3. Surface équipotentielle.

On appelle surface équipotentielle, une surface S dont tous les points sont au même potentiel V .

a) Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles qu'elles rencontrent.

En considérant un très petit déplacement $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$ sur une surface équipotentielle (figure I.16) on trouve :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

Par conséquent \vec{E} est perpendiculaire à $\overrightarrow{MM'}$

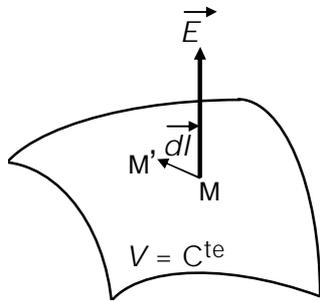


Figure I.16

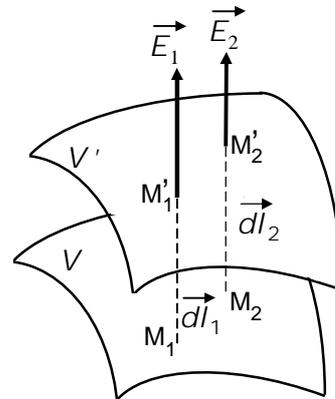


Figure I.17

b) Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ.

En effet, un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$, dans le sens de \vec{E} sur la ligne de champ, entraîne :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = -|\vec{E}| |\overrightarrow{MM'}|$$

$$dV < 0 \Rightarrow V_{M'} < V_M.$$

La ligne de champ est donc orientée du potentiel le plus élevé au potentiel le moins élevé.

c) Le champ électrique est plus intense là où les équipotentielles sont les plus resserrées.

En effet, si l'on considère deux très petits déplacements (figure I.17)

$$\overrightarrow{M_1M_1'} = d\vec{l}_1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_2M_2'} = d\vec{l}_2$$

on a :

$$dV = -\vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_1'} = -\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -|\vec{E}_1| |d\vec{l}_1|$$

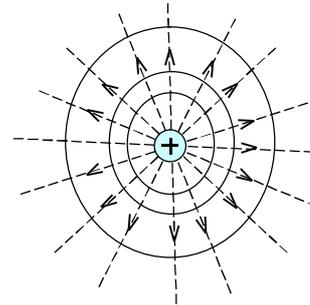
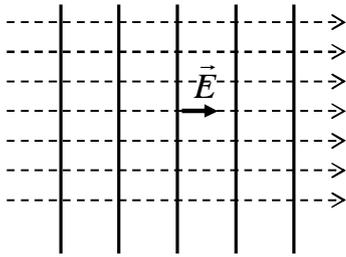
et

$$dV = -\vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{M_2M_2'} = -\vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = -|\vec{E}_2| |d\vec{l}_2|$$

et comme

$$|d\vec{l}_1| < |d\vec{l}_2| \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}_1| > |\vec{E}_2|.$$

Dans le cas d'un champ uniforme les lignes de champ sont des droites parallèles et les surfaces équipotentielles sont des plans perpendiculaires à ces droites.



Figures I.18

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques de centre O et les lignes de champ sont radiales (figures I.18).

La figure I.19 représente le cas de deux charges électriques égales et opposées : les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. Sur ces figures, les lignes de champs sont représentées en pointillés et les traces des équipotentielles en traits continus.

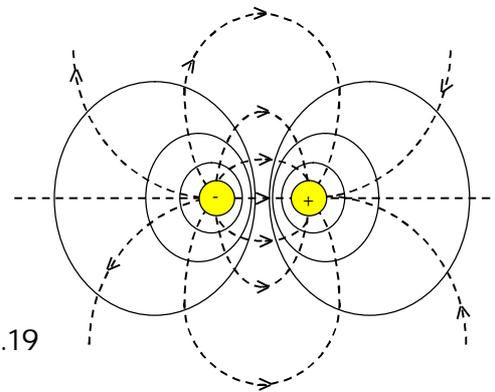


Figure I.19

6. TRAVAIL & ENERGIE.

6.1. Travail de la force électrique.

On place une charge électrique q en un point de l'espace où règne un champ électrique \vec{E} . Elle est alors soumise à l'action d'une force électrique :

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

Le travail de cette force lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

et, au cours d'un trajet AB, on a :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B)$$

soit

$$W_A^B = q(V_A - V_B) \quad (25)$$

Unités : Cette équation montre que le potentiel a les dimensions d'un travail par unité de charge électrique. Dans le système M.K.S.A. le travail est mesuré en *joule* et la charge en *coulomb*. Pour mesurer le potentiel on a choisi le *volt* en hommage au physicien italien Alessandro Volta qui a inventé, en 1800, la pile électrique.

Le champ électrique est alors mesuré en *volt par mètre* comme le montre l'équation (19)

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$$

6. 2. Energie potentielle.

L'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ extérieur est définie comme le travail de la force électrostatique agissant sur la charge, pour un déplacement de celle-ci du point M , où elle est située et où le potentiel est V_M , à un point de référence R , où la charge n'est plus soumise à l'action du champ extérieur. En ce point, le potentiel est nul : $V_R = 0$

Soit

$$E_p(M) = \int_M^R \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_M - V_R) \quad (26)$$

Or $V_R = 0$ par conséquent $E_p(M) = qV_M$

La force de Coulomb est donc conservative et son travail entre deux points quelconques ne dépend pas du chemin suivi. Elle dérive d'une énergie potentielle $E_p(M) = qV + C^{te}$ et l'on écrit

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p(M) \quad (27)$$

6. 3. Energie interne d'une distribution de charges électriques.

Nous nous limitons, ici, à deux charges électriques. L'énergie interne d'un système de deux charges est définie comme le travail fourni par un opérateur pour assembler les deux charges, initialement sans interaction. C'est l'énergie potentielle de la deuxième charge dans le champ de la première (ou l'énergie potentielle de la première charge dans le champ de la seconde).

Soient deux charges q_1 et q_2 placées respectivement aux points M_1 et M_2 distants de $M_1M_2 = r_{12}$. Afin de définir l'énergie interne du système des deux charges, on suppose que la charge q_1 placée en M_1 est fixe et que la charge q_2 se rapproche jusqu'en M_2 depuis une position infiniment éloignée.

Le travail que devrait fournir un opérateur pour rapprocher la charge q_2 jusqu'en M_2 sans variation d'énergie cinétique (c'est-à-dire très lentement) est donné par :

$$W_{op} = \int_{\infty}^{M_2} \vec{F}_{op} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{M_2} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{l} = -q_2 \int_{\infty}^{M_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} \quad (28)$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est la force électrostatique qu'exerce la charge q_1 sur la charge q_2 . Soit alors

$$U = W_{op} = q_2 V_1 = \frac{Kq_1 q_2}{r_{12}} \quad (29)$$

Cette dernière expression représente l'énergie interne du système des deux charges q_1 et q_2 .

Dans le cas d'un nombre N de charges on trouve (Exercice I. 11)

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Kq_j}{r_{ij}} \quad \text{Soit} \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(i) \quad (30)$$

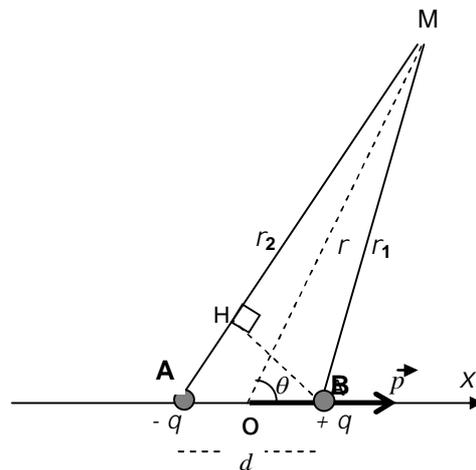
7. LE DIPOLE ELECTRIQUE.

7.1. Moment dipolaire électrique.

Le dipôle électrique est constitué de deux charges égales et de signes contraires, $+q$ et $-q$, séparées d'une distance d . Celle-ci est très petite par rapport aux distances d'observation r .

$$d \ll r \quad (31)$$

Figure I.20



Un dipôle est caractérisé par son "*moment dipolaire électrique*" ou "*moment électrique*" :

$$\vec{p} = q \vec{d} \quad (32)$$

Le moment électrique est orienté de la charge négative vers la charge positive.

7.2. Potentiel électrique créé par un dipôle.

Calculons le potentiel V produit, par ce dipôle, en un point M situé à une distance r du milieu O du dipôle:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (33)$$

Par définition $d \ll r$. Soit H la projection de B sur AM :

$$AH \approx d \cos \theta \approx r_2 - r_1$$

θ désigne l'angle formé par r et la direction du dipôle \vec{p} . Il est pratiquement égal aux angles θ_1 formé par \vec{p} et AM et θ_2 formé par \vec{p} et BM . D'autre part, on peut faire les approximations :

$$r_2 \approx r_1 \approx r$$

Par conséquent le potentiel créé en M , par le dipôle, est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (34)$$

7.3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle.

La relation entre le champ et le potentiel est,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

soit en coordonnées polaires (figure I. 21):

$$dV = -(E_r dr + E_\theta r d\theta) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) d\theta \quad (35)$$

On obtient à partir de (34) et (35), les composantes du champ électrique en coordonnées polaires :

$$E_r = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \quad (36)$$

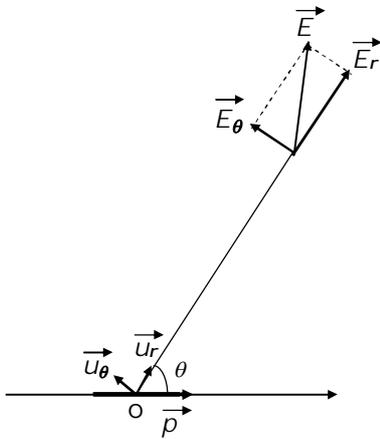


Figure I.21

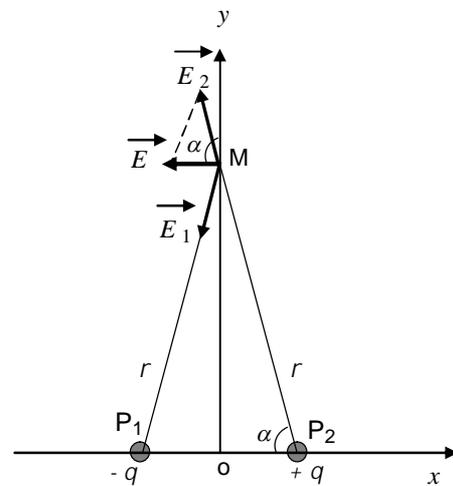


Figure I.22

Exercice I.4. Calculer directement le champ créé par un dipôle

1°) en un point M' sur l'axe ox du dipôle.

2°) en un point M situé sur l'axe oy perpendiculaire au dipôle en son milieu O

Solution I.4. 1°) Calcul du champ en M' sur l'axe ox :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x-a)^2} - \frac{q}{(x+a)^2} \right] \vec{i} \quad \text{où} \quad d = 2a$$

Après calculs et en négligeant a^2 devant r^2 on trouve : $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$

2°) Calcul du champ en M sur oy : Les deux triangles isocèles MP_1P_2 et E_2EM , de la figure I.22, sont semblables. Donc

$$\frac{E}{E_2} = \frac{d}{r} \quad \text{et avec} \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{on a :} \quad \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

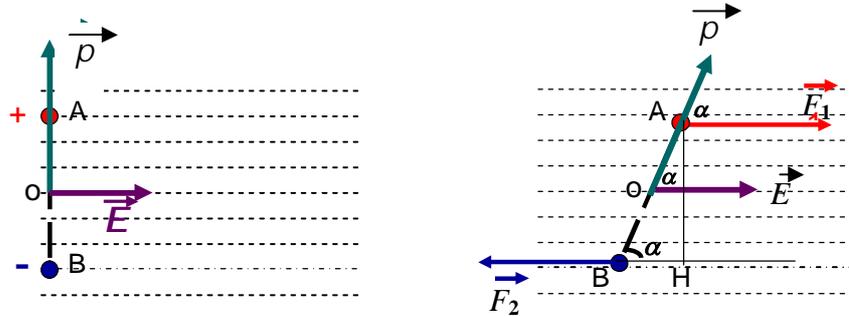
Soit, en négligeant a^2 devant r^2 : $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}$

7.4. Dipôle placé dans un champ électrique uniforme.

7.4.1. Couple.

Si on place un dipôle, de moment électrique \vec{p} , dans un champ extérieur \vec{E} uniforme, les charges qui le constituent sont soumises à des forces égales et opposées.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



Figures I.23

Le dipôle subit alors l'action d'un couple de module :

$$\Gamma = |\vec{\Gamma}| = F AH \quad \text{or} \quad F = q E \quad \text{et} \quad AH = d \sin \alpha$$

donc : $\Gamma = q E \cdot d \sin \alpha$ sachant que $p = q d$ on a : $\Gamma = p E \sin \alpha$

Le moment du couple de force qui agit sur le dipôle s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (37)$$

Ce couple fait pivoter le dipôle pour l'aligner parallèlement au champ extérieur (figures I.23).

7.4.2. Energie potentielle.

L'énergie potentielle d'un dipôle, placé dans un champ \vec{E} , est calculée en faisant la somme des énergies potentielles de chaque charge :

$$E_p = q (V_A - V_B) \quad (38)$$

Avec

$$V_A - V_B = -\vec{E} \cdot \vec{d}$$

l'expression (38) devient

$$E_p = -q \vec{E} \cdot \vec{d}$$

sachant que :

$$\vec{p} = q \vec{d}$$

l'énergie potentielle de ce dipôle, placé dans un champ \vec{E} , est alors donnée par:

$$E_p = - \vec{p} \cdot \vec{E} \quad (39)$$

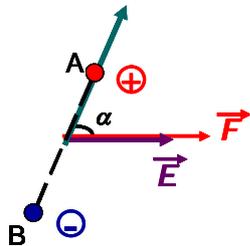


Figure I.24

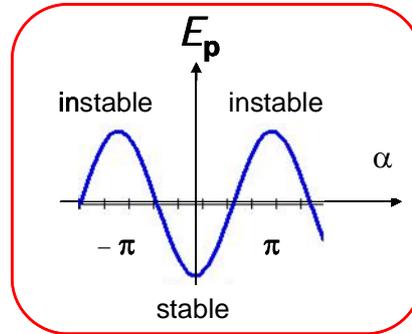


Figure I.25

Cette énergie est minimale pour : $\alpha = 0$
 et maximale pour : $\alpha = -\pi$ et $\alpha = +\pi$

la position $\alpha = 0$ correspond à un équilibre stable et les positions $\alpha = -\pi$ et $\alpha = +\pi$ à un équilibre instable.

Exercice I.5. On considère un dipôle formé de deux charges électriques ($-q$ et $+q$) séparées par une distance d . A. N : $q = 2 \text{ nC}$ et $d = 9 \text{ mm}$.

- 1°) Quel est le module de son moment dipolaire p .
- 2°) Calculer son énergie interne.
- 3°) Ce dipôle est placé dans un champ électrique uniforme $E = 50 \text{ kV/m}$. Exprimer en joules puis en électron- volts, l'énergie potentielle maximale qui résulte de l'interaction de ce dipôle et du champ. ($1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

Solution I.5. 1°) Moment dipolaire : $\vec{p} = q\vec{d}$ avec $p = 18 \cdot 10^{-12} \text{ C.m}$

2°) Energie interne :

$$U = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}} \quad \text{avec } q_1 = -q \text{ et } q_2 = +q$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} \quad U = -4 \cdot 10^{-6} \text{ joule} \quad \text{soit } U = -25 \cdot 10^{12} \text{ eV}$$

3°) Energie potentielle :

$$E_p = - \vec{p} \cdot \vec{E} = - p E \cos \alpha$$

Cette énergie potentielle est maximale si : $\alpha = \pi \Rightarrow \cos \alpha = -1$
 soit

$$E_p = 0,9 \mu\text{J} \quad \text{ou } E_p = 5,6 \cdot 10^{12} \text{ eV}$$

Ces propriétés des dipôles expliquent les phénomènes de polarisation dans les diélectriques.

8. LES DIELECTRIQUES.

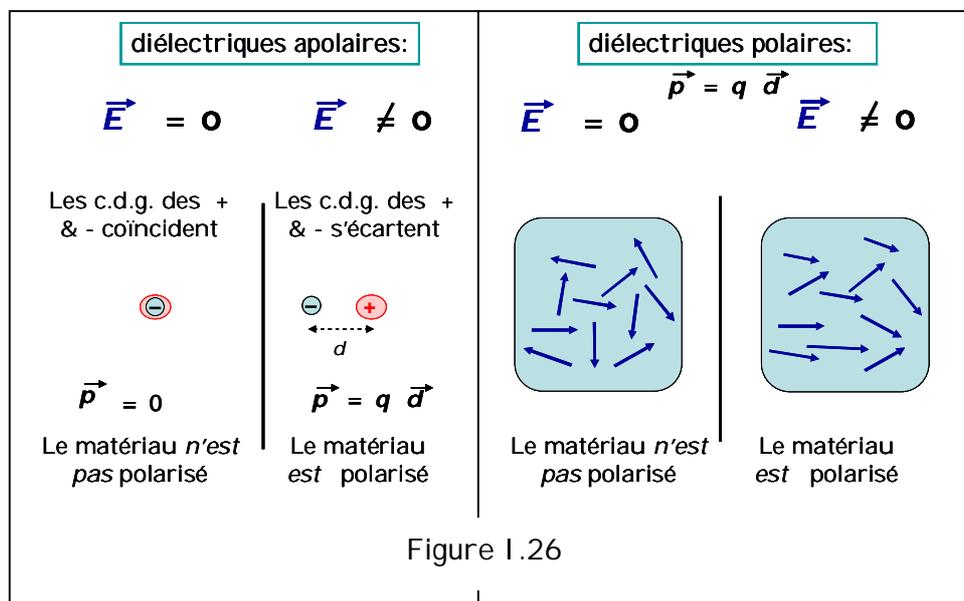
Les matériaux isolants ou diélectriques, qui ont été mis en évidence lors des phénomènes d'électrisation et les milieux magnétiques, seront étudiés en deuxième et troisième année de la licence. Le vide est le seul milieu considéré dans ce module. Néanmoins, quelques notions élémentaires seront données au sujet de ces milieux.

Il existe 2 types de diélectriques :

1°) Les diélectriques apolaires : Ils sont constitués d'atomes ou de molécules apolaires. Les barycentres des charges positives et négatives sont confondus. Le moment électrique de ces particules est nul, le milieu n'est pas polarisé.

Lorsqu'on applique un champ électrique, les charges subissent un petit déplacement d par rapport à leurs positions d'équilibre. Cela se traduit par l'apparition de dipôles, le diélectrique est alors polarisé. C'est la "*polarisation induite*"

2°) Les diélectriques polaires : Ils sont constitués de molécules polaires (HCl, H₂O ...) qui forment des dipôles. Mais, en raison de l'agitation thermique, ces dipôles sont orientés au hasard, leur moment résultant est nul : le milieu n'est pas polarisé.



En présence d'un champ électrique, ces dipôles ont tendance à s'orienter dans la direction du champ. Il en résulte un équilibre statistique entre l'action du champ et celle de la température : le diélectrique est alors polarisé. C'est la "*polarisation dipolaire*". Les diélectriques sont caractérisés par une permittivité ϵ supérieure à ϵ_0 .

Dans le cas des diélectriques linéaires homogènes et isotropes, ϵ est une constante, par contre si le diélectrique est inhomogène, anisotrope ou ferroélectrique, la permittivité n'est plus constante en tout point du matériau.

Tableau I.2. Moments électriques de quelques molécules polaires.

Molécule	CO	H Br	H Cl	SO ₂	H ₂ O
$ \vec{p} $ (C.m)	$0,40 \cdot 10^{-30}$	$2,6 \cdot 10^{-30}$	$3,43 \cdot 10^{-30}$	$5,3 \cdot 10^{-30}$	$6,2 \cdot 10^{-30}$

9. THÉORÈME DE GAUSS.

9.1. Flux d'un vecteur à travers une surface.

Une surface S réelle ou fictive peut être considérée comme constituée d'un grand nombre de surfaces élémentaires dS , chacune d'elles entoure un point M de l'espace. On considère un vecteur unitaire \vec{n} porté par la normale à dS et on représente cet élément de surface par un vecteur

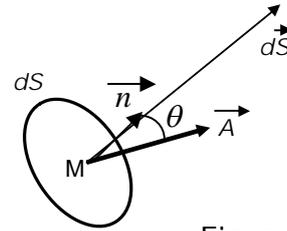


Figure I.27

$$d\vec{S} = dS \vec{n} \quad (40)$$

Soit \vec{A} un vecteur quelconque fonction du point M . On appelle flux élémentaire $d\Phi$ du vecteur \vec{A} à travers la surface dS la quantité scalaire définie comme suit :

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A dS \cos \theta. \quad (41)$$

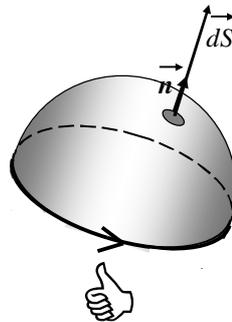
Le flux global à travers la surface S est obtenu par intégration :

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (42)$$

Remarque : Comme la circulation d'un vecteur le long d'une courbe, le flux d'un vecteur à travers une surface est une notion mathématique.

Orientation de la normale.

Cas d'une surface fermée : On oriente la normale de l'intérieur vers l'extérieur.



Figures I.28

Cas d'une surface ouverte : On choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite : Le pouce donne le sens de la normale si les autres doigts sont fermés dans le sens de parcours du contour (figure I.28).

9.2. Vecteur excitation ou déplacement électrique.

Maxwell a introduit en électromagnétisme un vecteur \vec{D} qu'il a appelé *déplacement électrique*. Celui-ci est relié au champ électrique par l'expression :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (43)$$

où ε est la permittivité électrique du milieu.

Dans le cas particulier du vide, l'expression précédente devient

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (44)$$

Elle montre que, dans ce cas, ces deux vecteurs sont proportionnels. Ce n'est pas toujours le cas dans les milieux matériels.

Le vecteur \vec{D} est également appelé "*excitation électrique*".

9.3. Théorème de Gauss.

Le théorème de Gauss²¹ s'énonce comme suit:

Le flux du vecteur déplacement électrique à travers une surface S fermée entourant des charges Q_i est égal à la somme de ces charges.

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (45)$$

$\sum Q_i$ représente la somme *algébrique* des charges intérieures à la surface.²²

L'équation (45) est l'une des quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell).

Dans le cas particulier du vide l'énoncé du théorème de Gauss devient :

Dans le vide, le flux du champ électrique à travers une surface *fermée* entourant des charges Q_i est :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (46)$$

De ces deux formulations du théorème de Gauss, c'est la première qui est la plus générale. En effet, les deux expressions (45) et (46) montrent que le vecteur excitation électrique est directement relié aux charges sources et ne dépend pas des caractéristiques du milieu (ici le vide caractérisé par sa permittivité électrique ϵ_0). Ce n'est pas le cas du champ électrique.

Dans les milieux, le vecteur \vec{D} prend une très grande importance.

9.4. Applications du théorème de Gauss.

Le théorème de Gauss permet, dans certains cas²³, de calculer, à partir des charges sources, le champ électrique. La méthode est alors plus simple que celle du calcul direct.

²¹ Le théorème de Gauss sera démontré en 2^{ème} année de Licence dans le module *d'Electromagnétisme* [6].

²² Pour calculer le vecteur déplacement, ou le vecteur champ électrique, on choisit une surface S qui englobe toutes les charges sources. Lorsque ces charges sont infinies, on peut, dans certains cas, exprimer ces vecteurs en fonction de la densité de charge, comme dans le cas du plan infini (§ 9.4.) et des exercices I. 13 et I.14.

²³ Notamment les problèmes qui présentent une symétrie.

Plan infini chargé

On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$. On veut calculer le champ électrique créé par cette distribution de charges en tout point M de l'espace au voisinage de ce plan.

Champ électrique : Les équipotentielles ont la même forme que le plan chargé, elles sont constituées par des plans parallèles à ce plan. Les lignes de champ sont alors perpendiculaires au plan chargé. Le champ \vec{E} est donc perpendiculaire au plan et sortant ($\sigma > 0$).

Il est utile de noter que le calcul de ce champ peut être obtenu par la méthode directe du calcul du champ électrique en considérant les résultats obtenus pour le disque chargé de rayon R (§ 4.3.) et en faisant tendre R vers l'infini. Il est cependant plus rapide d'arriver au résultat en utilisant le théorème de Gauss.

On choisit comme surface de Gauss un cylindre qui traverse ce plan infini chargé. (figure I. 29)

Le flux de \vec{E} à travers ce cylindre est :

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

$S_1 = S_2 = S$ sont les surfaces des bases du cylindre et S_3 est sa surface latérale.

Comme le montre la figure I.29, le champ est, pour des raisons de symétrie, perpendiculaire au plan :

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_3, \vec{E} \parallel d\vec{S}_1 \text{ et } \vec{E} \parallel d\vec{S}_2 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 0, \quad \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = E dS$$

et

$$\sum_i Q_i = \sigma S$$

donc

$$\Phi = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Notons que le champ électrique créé par le plan infini chargé est constant en tout point M de l'espace.

Potentiel électrique : En utilisant la relation liant le potentiel au champ électrique

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dy \Rightarrow V = -\int E dy$$

on trouve le potentiel V , créé par le plan infini :

$$V = -\frac{\sigma y}{2\epsilon_0} + C^{te},$$

La constante s'obtient à l'aide des conditions du problème.

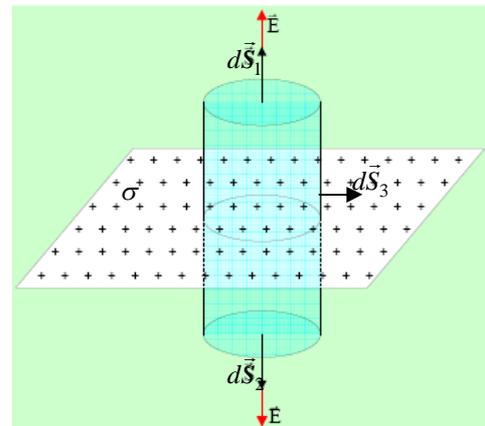


Figure I.29

En résumé :

Le champ électrique \vec{E} peut être calculé :

1°) directement à partir des expressions (5), (6) (7), (8), (9) selon le nombre ou la répartition des charges sources.

2°) à partir du potentiel V (19), (20), (21)

3°) à partir du théorème de Gauss (46) : $\iint_S \epsilon_o \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$

Tableau I.2. Equations de Maxwell en électrostatique

Au cours de ce premier chapitre nous avons mis en évidence deux équations de Maxwell que nous présentons, ci-dessous, sous forme intégrale

Champ conservatif	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	Valable uniquement en électrostatique
Théorème de Gauss	$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$	Valable dans tous les cas

Annexe 1

Les concepts de masse et de charge électrique

Nous avons fait remarquer que, si l'on ne tient pas compte des effets quantiques, une particule matérielle est caractérisée par sa masse et sa charge électrique (§ 3.5.).

La masse apparaît en physique sous l'aspect de deux grandeurs qui, au premier abord, semblent complètement différentes : la masse d'attraction source du champ de gravitation et la masse d'inertie qui traduit l'aptitude d'un corps à résister à toute variation de vitesse. Or aucune expérience n'a pu mettre en évidence une différence entre ces deux masses²⁴.

Avec la relation fondamentale de la dynamique, les relations (3) et (3') s'écrivent :

$$m \vec{a} = q \vec{E}$$

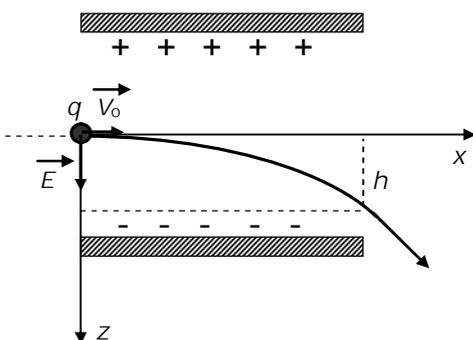
$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

\vec{a} désigne l'accélération de la particule.

Au premier membre de chaque relation, m représente une même grandeur physique la "masse d'inertie". Par contre au second membre, ce sont deux grandeurs différentes qui apparaissent. Dans la deuxième équation, si on simplifie par m , on obtient :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Un problème de dynamique se transforme en un problème de cinématique. En outre, on obtient une équivalence entre un champ d'accélération et un champ de gravitation, c'est la raison pour laquelle g est tantôt appelé "*champ de la pesanteur*"²⁵, tantôt "*accélération de la pesanteur*". C'est sur cette équivalence que s'est basé Einstein pour élaborer la théorie de la relativité générale.

Exercice I. 6 . Mouvement d'une particule dans un champ électrique²⁶

Une particule de masse m portant une charge électrique q , animée d'une vitesse constante V_0 parallèle à l'axe ox (figure ci-contre) entre dans un champ électrique uniforme parallèle à oz . Le champ agit sur une distance $ox = L$ (L étant la longueur des plaques d'un condensateur).

Trouver la valeur $z = h$ qui correspond à la sortie de la particule du champ.

A.N. $L = 1,25\text{cm}$, $q = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, $V_0 = 10^7\text{m/s}$

$m = 9,11 \times 10^{-31}\text{ kg}$, $E = 250\text{V/cm}$,

²⁴ Les expériences d'Oetvös en 1889, à l'aide d'une balance de torsion, ont montré l'égalité de la masse d'inertie et de la masse d'attraction avec une précision de l'ordre de 10^{-9} .

²⁵ Le champ de gravitation est appelé "champ de la pesanteur" au voisinage de la terre.

²⁶ Ce champ est créé par des charges sources réparties sur la surface des plaques du condensateur.

Solution I.6. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans ce cas :

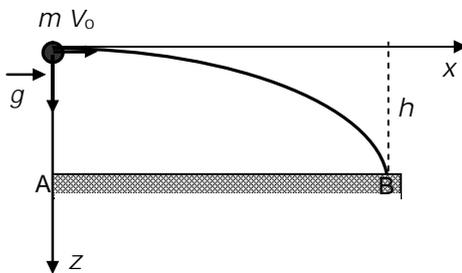
$$m \vec{a} = q \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{dV_z}{dt} = q E & \Rightarrow V_z = \frac{q}{m} E t + 0 = \frac{dz}{dt} \\ m \frac{dV_x}{dt} = 0 & \Rightarrow V_x = V_o + 0 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Après intégration, il vient :

$$z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2 \quad \text{et} \quad x = V_o t \quad \text{soit :} \quad z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{V_o^2} x^2$$

Pour $x = L$ on a $z = h$ d'où $h = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{V_o^2} L^2 = 0,343 \text{ cm}$

Exercice I.7. Mouvement d'un projectile dans le champ de la pesanteur



Un avion vole à une altitude h le long d'un axe ox parallèle au sol horizontal, avec une vitesse constante V_o . En O qui se trouve à la verticale d'un point A du sol, il lâche, dans le champ de la pesanteur g , un projectile de masse m . Ce dernier touche le sol en un point B tel que $AB = L$. A quelle altitude l'avion a-t-il lâché son projectile. On néglige la résistance de l'air.

A.N. $L = 2600 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $V_o = 750 \text{ km/h}$,

Solution I.7 : La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans ce cas :

$$m \vec{a} = m \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV_z}{dt} = g & \Rightarrow V_z = g t + 0 = \frac{dz}{dt} \\ \frac{dV_x}{dt} = 0 & \Rightarrow V_x = V_o + 0 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Après intégration, il vient :

$$z = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{et} \quad x = V_o t \quad \text{soit :} \quad z = \frac{1}{2} \frac{g}{V_o^2} x^2$$

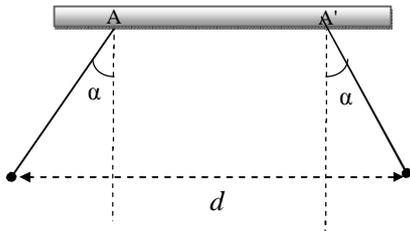
Pour $x = L$ on a $z = h$ d'où $h = \frac{1}{2} \frac{g}{V_o^2} L^2 = 767 \text{ m}$

N.B : Ces deux exercices montrent que, dans le cas du champ électrique, nous avons un problème d'électrodynamique où les caractéristiques de la particule interviennent. Par contre dans le cas du champ de la gravitation (ici la pesanteur), le problème s'est transformé, en raison de l'équivalence entre la masse d'inertie et la masse d'attraction, en un problème de cinématique.

Exercices : Chapitre I

Exercice I. 8.

Soient deux pendules électriques, formés de deux boules conductrices de masses m , suspendues par des fils de soie de longueurs l , aux points A et A' (voire figure). Les deux boules sont électrisées de la même façon et portent alors une même charge q . Disposés comme l'indique la figure, les deux pendules s'écartent d'un même angle α .



1°) Déterminer la valeur de la charge q .

2°) Sachant que q est négative, représenter le vecteur champ électrique créé par ce système en M, milieu de AA' et calculer son intensité.

On donne : $l = 10$ cm ; $m = 1$ g ; $OO' = d = 7$ cm ; $b = AA' = 5$ cm.

Exercice I.9.

Trois charges ponctuelles $-q$, $+q$ et $+q$ sont placées respectivement aux sommets A, B, C d'un triangle équilatéral de côté a . $A(-q)$, $B(+q)$, $C(+q)$.

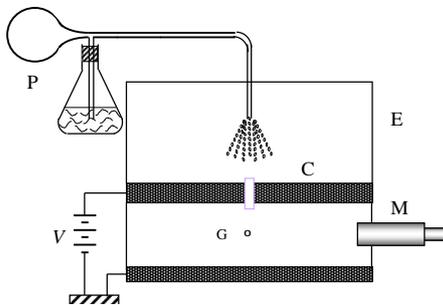
1/ Déterminer le champ électrique résultant \vec{E} en G, centre de gravité du triangle ABC.

2/ Calculer l'énergie interne du système formé par ces trois charges.

AN : $a = 10$ cm, $q = 2$ nC

Exercice I.10. Expérience de la goutte d'huile.

L'appareil qui a servi à Millikan pour mesurer la charge de l'électron et dont un schéma simplifié est représenté sur la figure, comporte essentiellement une enceinte E, à l'intérieur de laquelle se trouve un condensateur C dont l'armature supérieure est munie d'un orifice,



un pulvérisateur P, une source de tension continue V et un microscope M.

La goutte d'huile s'électrise par frottement à la sortie du pulvérisateur P, elle passe à travers l'orifice dans le champ électrique qui règne entre les armatures du condensateur. On éclaire à l'aide d'une source de lumière et on observe le mouvement de la goutte G au microscope. Ce dernier porte des graduations pour repérer les différentes positions de G. On néglige, dans cet exercice, la poussée d'Archimède

1°) Le condensateur n'est pas relié à la source de tension, la goutte n'est soumise qu'à son propre poids et au frottement visqueux de l'air. Ecrire l'équation différentielle du mouvement et en déduire l'expression de la vitesse limite de G. Calculer le rayon R de la goutte sphérique sachant que :

La masse volumique de l'huile est $\rho = 896$ kg/m³, le coefficient de viscosité de l'air est $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ S.I, et $g = 9,81$ m/s². La vitesse limite v_1 est mesurée à partir de la distance $\Delta l = 2,25$ mm, parcourue par la goutte en $\Delta t = 10$ s.

2°) Le condensateur est, à présent, relié à la source de tension, la goutte est soumise, en plus des forces précédentes, à une force électrique, on considère le cas où la goutte est chargée négativement, sinon on inverse la polarité des armatures du condensateur.

Ecrire l'équation du mouvement et en déduire la charge électrique de la goutte d'huile.

Comparer cette charge à celle de l'électron. Conclusion.

A.N. tension appliquée : $V = 600$ volts, distance entre les armatures : $d = 6$ mm et charge de l'électron : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. La mesure de la vitesse limite a donné : $v_2 = 1,27 \cdot 10^{-4}$ m/s.

Exercice I.11. Calculer l'énergie interne d'un système composé de 3 charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 .

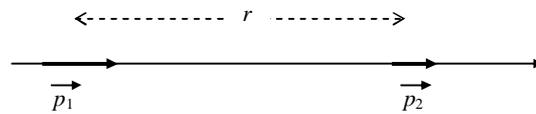
Généraliser au cas de n charges $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_n$

Exercice I.12. 1°) Exprimer, sous forme vectorielle, le champ \vec{E} créé par un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{p} .

2°) En déduire l'énergie potentielle d'un dipôle, de moment \vec{p}_1 , placé à une distance r d'un dipôle de moment dipolaire \vec{p}_2

3°) Considérer le cas où les deux dipôles sont alignés sur la droite qui les joint.

A.N : $p_1 = p_2 = 6,1 \cdot 10^{-30}$ C.m , $r = 3 \cdot 10^{-10}$ m



Exercice I .13. Calculer, en utilisant le théorème de Gauss, 1°) le champ et 2°) le potentiel créés, à une distance r de son centre, par une sphère pleine, de rayon R , uniformément chargée dans les deux cas suivants :

La charge électrique est répartie uniformément avec une densité surfacique σ .

Elle est répartie uniformément avec une densité volumique ρ .

Représenter, dans chaque cas, les variations du champ et du potentiel en fonction de r .

Exercice I .14. On considère un fil de longueur infinie portant une charge électrique répartie avec une densité linéique λ . Calculer la valeur du champ électrique en un point M situé dans un plan perpendiculaire au fil et à une distance D .

1°) Utiliser d'abord le théorème de Gauss

2°) Puis, effectuer le calcul direct

3°) En déduire le potentiel en M.

Chapitre II

CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

En électricité, un conducteur est un milieu matériel dans lequel certaines charges électriques, dites « charges libres », sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique, à l'échelle macroscopique où les dimensions considérées sont très grandes par rapport aux distances inter atomiques.

1. EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE.

L'équilibre électrostatique est atteint lorsqu' aucune charge électrique ne se déplace à l'intérieur du conducteur. Nous allons établir, dans cette partie, les propriétés des distributions d'équilibre d'un conducteur isolé dans le vide.

1.1. Champ électrique.

Le champ électrique est nul en tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique. En effet, la présence d'un champ entraînerait l'existence d'une force

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (1)$$

qui mettrait les charges en mouvement et le conducteur ne serait plus en équilibre.

En tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique \vec{E} est nul.

Le champ électrique sur la surface du conducteur est perpendiculaire à la surface. En effet, pour les mêmes raisons que précédemment, une composante du champ parallèle à la surface agirait sur les charges libres et entraînerait leur déplacement. Or, de tels déplacements n'existent pas dans les conditions d'équilibre électrostatique :

Le champ est normal à la surface d'un conducteur en équilibre.

1.2. Potentiel électrique.

Considérons la circulation du champ électrique entre deux points M et M' infiniment voisins à l'intérieur d'un même conducteur. La variation du potentiel dV entre les deux points est alors donnée par :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{où} \quad d\vec{l} = \overline{MM'} \Rightarrow V = \text{constante}$$

Le champ étant nul à l'intérieur du conducteur, le potentiel est donc uniforme dans tout le volume du conducteur.

Un conducteur en équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel.

1.3. Répartition des charges.

- A l'intérieur du conducteur.

Considérons un conducteur doté d'une charge nette Q et choisissons une surface fermée quelconque de façon qu'elle se retrouve sous la surface du conducteur. D'après le théorème de Gauss, on a :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}_{\text{int}} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Comme $E_{\text{int}} = 0$, on en déduit que $Q_{\text{int}} = 0$. Par conséquent

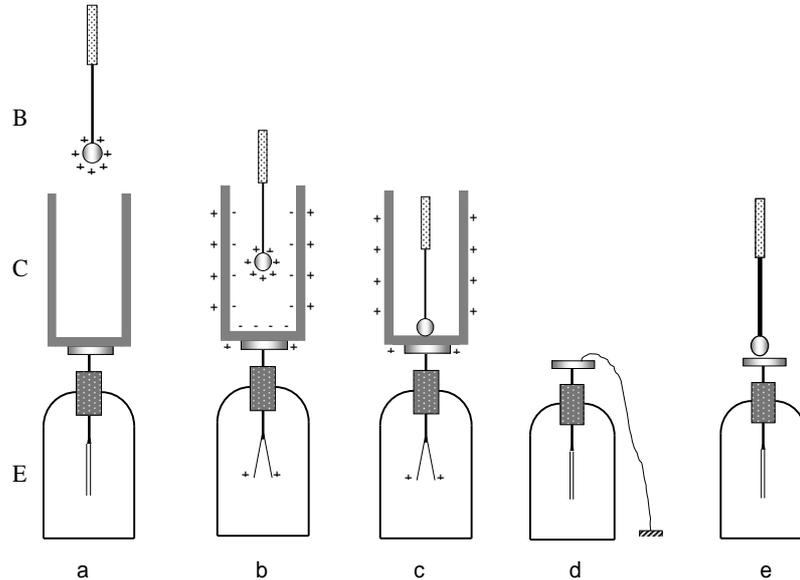
A l'intérieur d'un conducteur chargé en équilibre, la charge électrique est nulle.

- A la surface du conducteur : Expérience du cylindre de Faraday.

Cette expérience a pour but de mettre en évidence la répartition superficielle des charges électriques. On dispose :

- d'une boule métallique B, chargée positivement, solidaire d'une tige reliée à un manchon isolant,
- d'un cylindre de Faraday C, (c'est un cylindre métallique creux dont la hauteur est très grande par rapport à son diamètre),
- et d'un électroscope à feuille d'or E.

Le cylindre C est posé sur le plateau de l'électroscope E.



Figures II.1

La figure II.1.a montre que lorsque la boule se trouve hors du cylindre, l'ensemble formé par C et E ne porte aucune charge. Lorsqu'on introduit la boule dans le cylindre, un phénomène d'électrisation par influence est décelé par l'électroscope. Des charges négatives sont induites sur la face interne de C et des charges positives sur sa surface externe (figure II.1.b). Lorsque B et C sont mis en contact, on constate, là encore, que les feuilles de l'électroscope s'écartent (Figure II.1.c), cet écart est maintenu lorsqu'on retire B. Pour vérifier que la boule a entièrement transmis sa charge à C, on retire le cylindre, on décharge l'électroscope (figure

II.1.d), puis on met en contact B et le plateau de E. On constate alors que les feuilles d'or restent verticales (figure. II.1.e). En conclusion : toute la charge de la boule s'est trouvée répartie à la surface extérieure du conducteur.

La charge électrique d'un conducteur en équilibre est entièrement répartie sur sa surface.

1.4 . Champ au voisinage d'un conducteur : théorème de Coulomb.

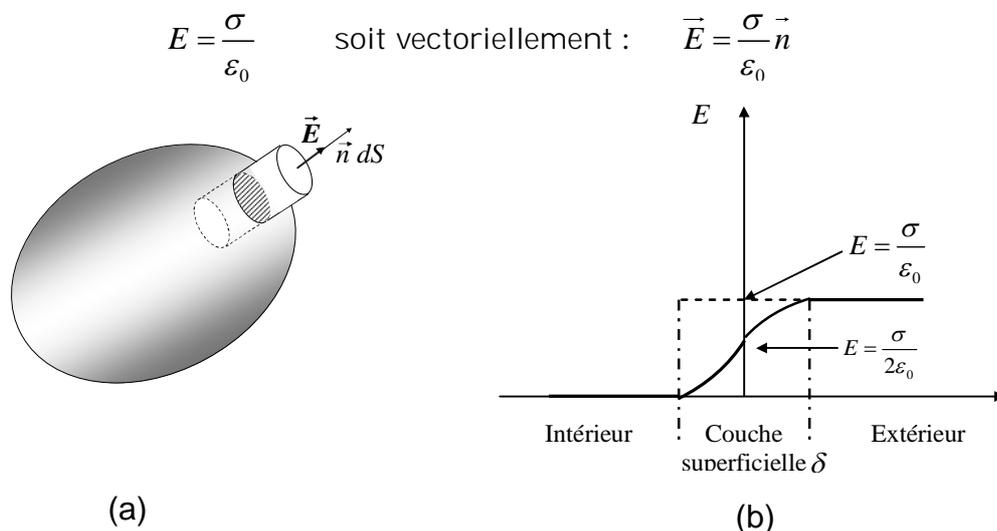
Considérons un conducteur de forme quelconque. On se propose de calculer le champ électrique en un point au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur. Construisons, pour cela, une surface de Gauss cylindrique aplatie, dont une base se trouve à l'extérieur de la surface et l'autre base à une profondeur telle que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre (figure II.2.a). En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, nous obtenons:

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Comme mentionné plus haut, aux points situés au voisinage immédiat de la surface du conducteur, le champ est normal à la surface. Le champ étant nul partout à l'intérieur du conducteur, on ne tient compte que du flux à travers la surface située à l'extérieur du conducteur. Le flux sortant de la surface latérale du cylindre étant nul, il ne reste plus que celui qui sort de la base, soit

$$\phi = ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

où σS est la charge nette comprise à l'intérieur de la surface de Gauss. On obtient alors :



Figures II.2

C'est l'expression du champ électrostatique, au voisinage immédiat d'une surface conductrice chargée. C'est la formulation du *théorème de Coulomb*.

Théorème : le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur portant une charge de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (2)$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal au conducteur et orienté vers l'extérieur.

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul, en son voisinage immédiat extérieur, il vaut :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Par conséquent, à la traversée de la surface du conducteur, par continuité, le champ varie de la manière indiquée sur la figure II.2.b (δ est un infiniment petit). En particulier, sur la surface du conducteur, il vaut ¹:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Cette dernière expression du champ sera utilisée pour le calcul de la pression électrostatique.

1.5. Pression électrostatique.

Calculons maintenant les forces auxquelles sont soumises les charges électriques situées à la surface d'un conducteur en équilibre. Ces charges de surface sont soumises à des forces répulsives de la part des *autres charges* du conducteur (Voir Exercice II.8).

Considérons un élément de surface dS , portant une charge $dq = \sigma dS$.

Le champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$ exerce sur la charge dq une force électrostatique :

$$\vec{dF} = dq \vec{E} = \sigma ds \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n} \quad \text{soit :} \quad \vec{dF} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} ds \vec{n}$$

Cette force est donc normale à la surface et dirigée vers l'extérieur quelque soit le signe de la charge. Elle est proportionnelle à l'élément de surface ds et présente, par conséquent, le caractère d'une force de pression. La force par unité de surface, c'est-à-dire la pression électrostatique, est alors donnée par :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad (4)$$

1.6. Pouvoir des pointes.

A proximité d'une pointe, le champ électrostatique est très intense. Cela résulte du fait que la densité surfacique de charges est très élevée au voisinage d'une pointe.

Ce phénomène peut être expliqué en considérant deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 ($R_2 < R_1$), reliées par un long fil conducteur mince (Figure 3). De ce fait, les deux sphères sont portées au même potentiel ; et comme elles sont très éloignées l'une de l'autre, on peut écrire :

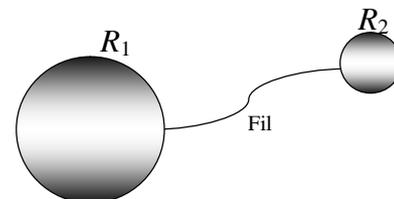


Figure II.3

¹ L'expression (3) est démontrée dans l'exercice II.8 (Voir la solution II.8)

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{R_1} \iint \sigma_1 ds = \frac{K}{R_2} \iint \sigma_2 ds$$

Pour des raisons de symétrie, les charges sont réparties uniformément à la surface de chaque sphère (σ_1 et σ_2 sont constantes). Il s'en suit que :

$$\frac{\sigma_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{R_1} \quad (5)$$

Cette dernière équation montre que la sphère ayant le plus petit rayon porte la plus grande densité de charges. (Voir exercice II. 10)

Ce résultat se généralise à un conducteur de forme quelconque et explique le pouvoir ionisant d'une pointe.

Applications.

- Le pouvoir de pointe est utile pour faciliter la décharge de l'électricité ; c'est le rôle des paratonnerres qu'on place sur les édifices pour les protéger contre la foudre.



La foudre est un phénomène naturel de décharge électrique qui se produit, lors d'un orage, entre deux nuages chargés d'électricité statique, ou entre un nuage électriquement chargé et la Terre qui est un conducteur électrique.

Lors d'un orage, les constituants d'un nuage, gouttes de pluie, grêlons, particules de glace, se heurtent à très grandes vitesses et s'électrifient par triboélectricité (voir chapitre I). La décharge se produit lorsque la différence de potentiel entre le nuage et la Terre, par exemple, dépasse un certain seuil (plusieurs millions de volts).

La foudre s'accompagne d'un phénomène lumineux *l'éclair* et d'une détonation *le tonnerre*.

Figure II.4 « *La Tour Eiffel, paratonnerre géant* » Photographie prise à 21h20 le 3 Juin 1902 et publiée dans le *Bulletin de la société Astronomique de France* en Mai 1905.

Document : WIKIPEDIA

- Expérience de la bougie- vent électrique

Au voisinage de la pointe (figure 5), le champ est si intense que l'air s'ionise. Les ions, de même signe que celui des charges de la pointe, sont repoussés. Il en résulte un déplacement d'air, un vent électrique, qui arrive à éteindre la flamme d'une bougie placée au voisinage de la pointe.

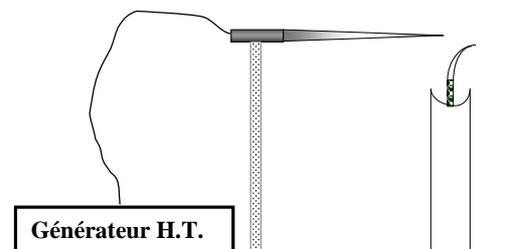


Figure II.5

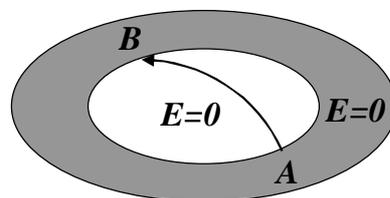
1.7. Conducteur creux.

Considérons maintenant un conducteur de forme arbitraire contenant une cavité (voir figure II.6.). Supposons qu'il n'existe aucune charge à l'intérieur de la cavité. Dans ce cas, le champ électrique à l'intérieur de la cavité doit être nul indépendamment de la distribution de la charge sur la surface externe du conducteur. De plus, le champ à l'intérieur de la cavité est nul même s'il existe un champ électrique à l'extérieur du conducteur.

Pour étayer ce point, nous utilisons le fait que chaque point du conducteur est porté au même potentiel électrique, deux points quelconques A et B de la surface de la cavité sont donc au même potentiel. Imaginons maintenant qu'un champ électrique \vec{E} existe à l'intérieur de la cavité et calculons la différence de potentiel $V_B - V_A$ définie par l'équation :

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

\vec{E} n'étant pas nul, nous pouvons toujours trouver un chemin entre A et B pour lequel $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ est un nombre positif, l'intégrale est alors positive. Or $V_B - V_A = 0$, la circulation de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ est nulle pour tous les parcours entre deux points quelconques du conducteur, il en résulte que le champ électrique est partout nul. Par conséquent, une cavité entourée par des murs conducteurs est une région où le champ est nul, quelles que soient les conditions extérieures au conducteur. Ce dernier constitue un *écran électrostatique* : aucun champ extérieur ne peut être décelé dans la cavité. Cette dernière est à l'abri de toute influence extérieure.



Figures II.6

Cette propriété est valable même si le conducteur creux comporte des ouvertures, c'est le cas d'une cage de Faraday.

Applications : *Cage de Faraday.*

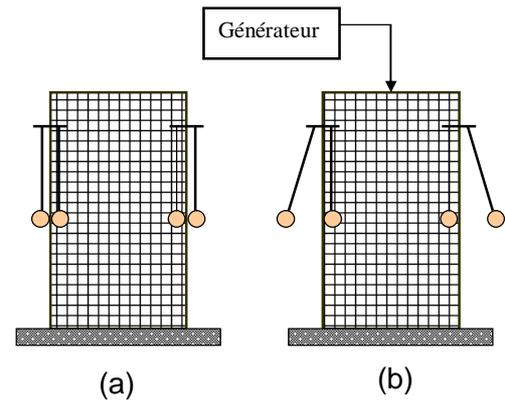
C'est une cage métallique qui permet d'effectuer des mesures à l'abri des champs extérieurs. Inversement, ces mesures ne perturbent pas des expériences menées à l'extérieur.

Considérons une cage de Faraday fabriquée à l'aide d'un grillage métallique. Des pendules électrostatiques sont mis en contact avec les parois internes et externes de la cage comme le montrent les figures II.7.

Si la cage n'est pas chargée, $Q = 0$, tous les pendules restent à la verticale (figure.II.7.a).

Si on charge la cage à l'aide d'un générateur par exemple, on constate que les pendules à l'intérieur restent à la verticale, alors que ceux qui sont placés à l'extérieur s'écartent de la cage (figure.II.7.b).

Une telle enceinte est largement utilisée pour protéger des appareils électriques des champs extérieurs. C'est la raison pour laquelle, la plupart de ces appareils sont placés à l'intérieur d'une carcasse métallique reliée à la terre.



Figures II.7

1.8. Capacité d'un conducteur.

Considérons un conducteur isolé en équilibre électrostatique, placé en un point O de l'espace et portant une charge Q , répartie sur sa surface externe avec une densité surfacique σ telle que :

$$Q = \iint \sigma dS$$

Si la charge Q augmente, la densité surfacique σ augmente proportionnellement :

$$\sigma = a Q$$

Cela, en raison de la linéarité des équations qui régissent le problème de l'équilibre des conducteurs. Le potentiel créé par Q , en un point M de l'espace tel que $OM = r$, s'écrit

$$V = K \iint \frac{\sigma dS}{r} \quad \text{soit} \quad V = K Q \iint \frac{a dS}{r}$$

Ce résultat reste valable pour tout point de la surface du conducteur. L'intégrale dépend uniquement de la géométrie et des dimensions du conducteur

On en déduit que le rapport, entre la charge et le potentiel auquel est porté le conducteur,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$$

ne dépend que de la géométrie du conducteur, on l'appelle *capacité propre du conducteur*. Celle-ci est donnée par l'expression :

$$Q = CV \quad (6)$$

C'est une grandeur positive, dont l'unité est appelée le *farad* en hommage à Michael Faraday (1791-1867). Le farad est ainsi défini comme la capacité d'un conducteur isolé dont le potentiel est de 1 volt lorsqu'il reçoit une charge de 1 coulomb.

Le farad est une unité très grande, on utilise plutôt des sous multiples :

Le microfarad : $1\mu F = 10^{-6} F$, le nanofarad : $1nF = 10^{-9} F$, le picofarad : $1pF = 10^{-12} F$.

Exercice II.1. Calculer la capacité d'un conducteur sphérique de rayon R .

A.N. $R = 1 \text{ m}$ et $R = 6400 \text{ km}$ (rayon de la terre)

Solution II.1. Considérons une sphère de rayon R et de charge Q . Son potentiel est donné par l'expression suivante :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

D'où sa capacité :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Ainsi la valeur de la capacité d'une sphère de rayon $R = 1\text{m}$ vaut $C = 0.11\text{nF}$.

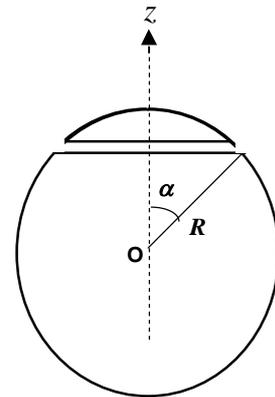
Dans le cas de la Terre, la capacité vaut :

$$C_T = 4\pi\epsilon_0 R_T = \frac{6.4 \times 10^6}{9 \times 10^9} = 0.71\text{mF}$$

Exercice II.2. Une sphère conductrice creuse, de rayon R est séparée en deux parties inégales par un plan horizontal : on obtient deux calottes sphériques inégales dont la base commune est un cercle de rayon $r = R \sin \alpha$. La sphère est portée au potentiel $V > 0$ puis isolée.

1°) En supposant la calotte inférieure fixe, déterminer la force qu'elle exerce sur la calotte supérieure en fonction de V et α .

2°) Calculer cette force dans le cas de deux hémisphères portées à un potentiel $V = 30\text{ kV}$.



Solution II.2. 1°) La charge surfacique apparaissant sur la sphère conductrice est donnée par :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CV}{S}$$

Avec $C = 4\pi\epsilon_0 R$ et $S = 4\pi R^2$, on en déduit :
$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{R}$$

Une charge élémentaire $dq = \sigma dS$ est soumise au champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$, il résulte une force

élémentaire
$$\vec{dF} = dq \vec{E} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}$$

On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de la pression électrostatique obtenue en (4) :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow \vec{dF} = P \cdot dS \vec{n} \quad \text{soit} \quad \vec{dF} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}$$

Pour des raisons de symétrie, la force totale exercée par la calotte inférieure sur la calotte supérieure est portée par l'axe \vec{oz} et elle est ascendante, son module est donné par :

$$F = F_z = \int dF_z = \int dF \cos \theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \int_{S_1} \cos \theta dS$$

où S_1 est la surface de la calotte supérieure et θ un angle compris entre 0 et α .

Donc $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$, d'où :

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 2\pi R^2 \int_0^\alpha \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 \sin^2 \alpha \quad \text{soit} \quad F = \frac{\epsilon_0 V^2}{2} \pi \sin^2 \alpha$$

2°) Dans le cas de deux hémisphères $\alpha = \pi/2$ et $F = \frac{\epsilon_0 V^2}{2} \pi$ A.N. $F = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

2. PHENOMENES D'INFLUENCE.

2.1. Eléments correspondants.

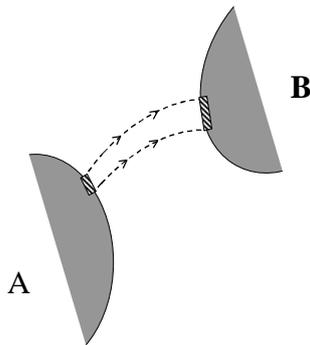


Figure 11.8

Considérons deux conducteurs A et B en équilibre et portant des charges Q_A et Q_B et deux éléments de surfaces dS_A sur A et dS_B sur B découpées par le tube de force représenté sur la figure 11.8. dS_A et dS_B , appelés "éléments correspondants" portent des densités de charges σ_A et σ_B .

Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée S s'appuyant sur les surfaces dS_A et dS_B et limitée par les lignes de champ et deux surfaces à l'intérieur de A et B. Le flux du champ, sortant de S , est nul. En effet le champ est nul à l'intérieur des conducteurs et il est tangent au tube de forces. Donc :

$$\sigma_A dS_A + \sigma_B dS_B = 0$$

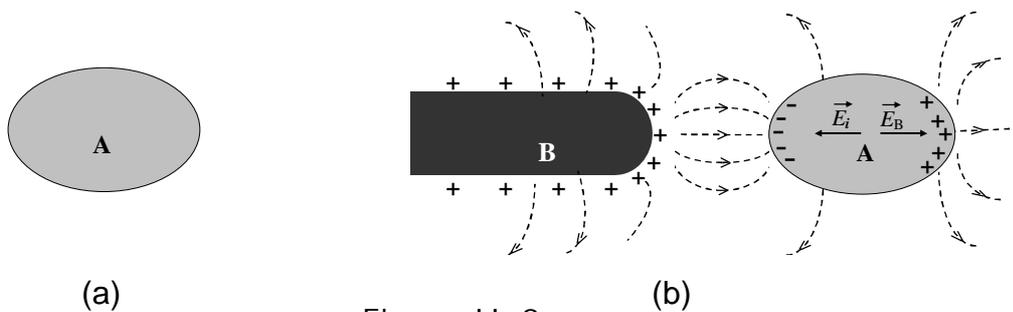
D'où :

Théorème des éléments correspondants : *Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées.*

2.2. Influence partielle.

Considérons un conducteur A électriquement neutre (figure 11.9.a).

Approchons de ce dernier, un conducteur B chargé positivement, tel que représenté sur la figure 11.9.b. Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique \vec{E}_B .



Figures 11.9

Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de \vec{E}_B . Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est $-Q$. A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est $+Q$, vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons comme le montre la figure 11.9.b. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par *influence*, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Elles créent un champ *induit* \vec{E}_i qui vient s'opposer au champ *inducteur*² \vec{E}_B et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A les électrons

² Les termes *inducteur* et *induit* sont utilisés surtout en électromagnétisme (voir chapitre V)

libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

Remarques : 1°) Lors de l'évolution de ce phénomène, les charges $+Q$ et $-Q$, *induites* ou créées par influence, interviennent en ajoutant leur action à celle des charges inductrices. Il se produit une *influence retour* de A sur B. On dit qu'il y'a *influence mutuelle*.

2°) Dans cette expérience, le conducteur A a été *électrisé par influence*. Le système étant isolé, le principe de la conservation de la charge implique que la somme des charges induites est nulle. Ainsi, lors d'une électrisation par influence, il n'y aucune création, mais simplement un déplacement de charges.

Lignes de champ : La topographie de l'espace électrique, représentée sur la figure II. 9. b, montre que seules certaines lignes de champ, qui émanent du corps inducteur B, aboutissent au conducteur A. Il en résulte, en vertu du théorème des éléments correspondants, que la charge Q créée par influence, est inférieure à la charge inductrice du conducteur B.

On relie, à présent le conducteur A à la terre, au moyen d'un fil conducteur (figure II.10). La terre et le conducteur forment ainsi un seul conducteur ; les charges positives sont alors repoussées vers la terre. Le potentiel de ce conducteur est nul et plus aucune ligne de champ ne le quitte.

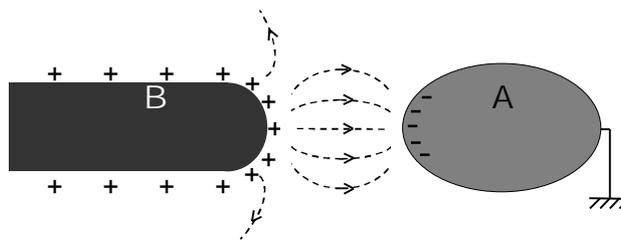


Figure II.10

Dans ces exemples, l'influence est dite *partielle*, car toutes les lignes de champ issues du conducteur B n'aboutissent pas sur A. Nous pouvons créer des conditions d'influence totale en plaçant tout simplement le conducteur B à l'intérieur d'un conducteur creux A (§ . 2. 3)

2.3. Influence totale.

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de B aboutissent sur A. Ceci est obtenu lorsque A entoure complètement B (figure II.11).

L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B.

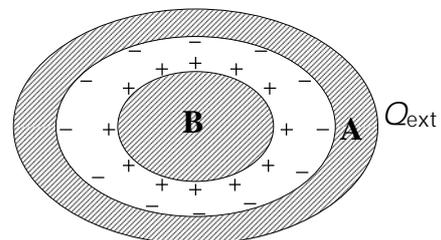


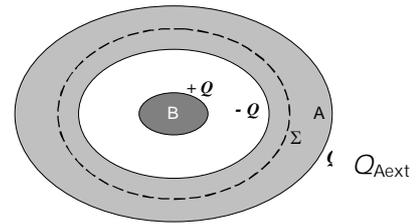
Figure II.11

$$Q_B = -Q_{A_{\text{int}}}$$

Exercice II. 3. 1°) Retrouver le résultat du § 2.3 en utilisant le théorème de Gauss.

2°) Calculer la charge extérieure Q_{Aext} dans les cas suivants :

- a - Le conducteur A est isolé et initialement neutre.
- b - Le conducteur A porte une charge initiale q .



Solution II. 3. 1°) On applique le théorème de Gauss en considérant une surface Σ à l'intérieur du conducteur A. Sachant que le champ est nul à l'intérieur du conducteur A (équilibre électrostatique) on a :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}_{int} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_B + Q_{Aint}}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{Aint} = -Q_B$$

2°) a) Cas où le conducteur A est initialement neutre:

$$Q_{Aext} + Q_{Aint} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{Aext} = -Q_{Aint} = Q_B$$

b) Cas où le conducteur A porte initialement une charge q :

$$Q_{Aext} + Q_{Aint} = q \quad \Rightarrow \quad Q_{Aext} = q - Q_{Aint} \quad \Rightarrow \quad Q_{Aext} = q + Q_B$$

3. CONDENSATEURS.

3.1. Les condensateurs.

Un condensateur est un système constitué de deux conducteurs électriques en influence totale.

On réalise un tel système en utilisant deux conducteurs dont l'un est creux et entoure complètement l'autre (Figure II.11). L'espace compris entre les deux conducteurs, appelées "armatures", est vide ou rempli d'un milieu isolant (diélectrique).

Lorsqu'une différence de potentiel est appliquée entre les armatures d'un condensateur, en le reliant par exemple à une source d'électricité, il se charge. Les deux plaques acquièrent alors des charges égales et opposées.

Un condensateur est un appareil qui sert à emmagasiner de l'énergie électrique. Il est largement utilisé en électronique et en électrotechnique.

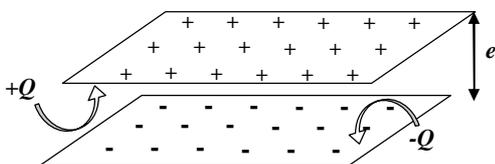


Figure II.12

Condensateur plan :

Un *condensateur plan* est formé de deux conducteurs plans, parallèles, distants de e . L'espace e est très petit par rapport aux dimensions des armatures afin que celles-ci soient en influence totale. (figure II.12.).

Remarques :

1°) Il est important de noter qu'un condensateur est caractérisé par la valeur absolue de la charge Q portée par chaque armature et non pas la charge résultante qui est nulle. De même, il est caractérisé par la différence de potentiel V entre ses armatures et non pas le potentiel de l'une de ses armatures par rapport à une référence donnée.

2°) Le nom de condensateur, donné à un système de deux conducteurs en influence totale, provient du fait que ces systèmes mettent en évidence le phénomène de « *condensation de l'électricité* », à savoir l'accumulation de charges électriques sur la surface des armatures.

La bouteille de Leyde : La bouteille de Leyde est le premier condensateur de l'histoire, il a été mis au point, en 1745, par le savant hollandais Musschenbrock à Leyde.



Figure II.13

C'est un condensateur formé de deux conducteurs, des feuilles d'étain pour le premier et une feuille métallique qui enveloppe la bouteille dont le verre constitue le diélectrique.

Lorsqu'on communique une charge q à la bouteille, une différence de potentiel apparaît entre l'électrode reliée au conducteur interne et l'armature externe.

La bouteille se décharge lorsqu'elle est reliée à un circuit extérieur. C'était le seul moyen d'emmagasiner de l'énergie électrique jusqu'à ce que Volta invente en 1800 la pile électrique.

3.2 . Capacité d'un condensateur.

Le concept de capacité électrique, introduit dans le cas d'un seul conducteur, peut être étendu à un condensateur. On définit la capacité d'un condensateur par :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (7)$$

Q est la charge portée par chacune des armatures ($+Q$ pour l'une et $-Q$ pour l'autre) et $V = V_1 - V_2$ est la différence de potentiel entre ces armatures. La capacité est une constante propre à chaque condensateur. Sa valeur dépend de la forme, des dimensions et de la position relative des deux conducteurs qui le constituent. Elle dépend également de la nature du milieu qui les sépare.

La méthode de calcul de la capacité d'un condensateur s'appuie sur la relation :

$$Q = CV.$$

On commence d'abord par calculer le champ électrique en un point quelconque à l'intérieur du condensateur. La circulation du champ entre les deux armatures, permet de tirer l'expression du potentiel. Le rapport

$$C = \frac{Q}{V}$$

nous donne la valeur de la capacité du condensateur considéré.

Capacité d'un condensateur plan.

Soit un condensateur plan (figure II.14), constitué de deux conducteurs plans, portant respectivement des charges $+Q$ et $-Q$, de surfaces S , séparés par une distance e . Du fait de la symétrie de la distribution, le champ électrique entre les armatures de ce condensateur est uniforme, il est donné par :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La répartition de charge étant uniforme, on a :

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Q est la charge du condensateur. En choisissant l'axe \vec{ox} selon la normale aux plans (figure II.14), nous avons :

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E dx$$

Soit, en faisant circuler le champ entre les deux armatures :

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = \frac{Qe}{\epsilon_0 S}$$

Or $Q = CV$, d'où la capacité d'un condensateur plan :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad (8)$$

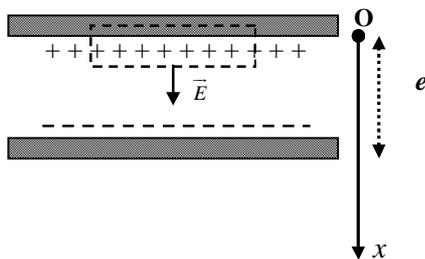


Figure II.14

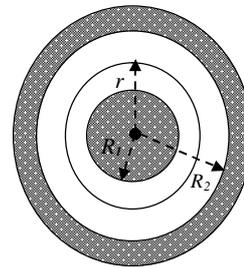


Figure II.15

Capacité d'un condensateur sphérique.

Un condensateur sphérique (figure II.15), est constitué de deux sphères conductrices et concentriques. La première de rayon R_1 porte une charge positive $+Q$ et son potentiel est V_1 ; la seconde de rayon R_2 ($R_1 < R_2$), porte une charge $-Q$ et son potentiel est V_2 ,

En appliquant le théorème de Gauss, on obtient le champ électrique entre les armatures d'un tel condensateur:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Sachant que $E = -\frac{dV}{dr}$ on a: $-dV = E \cdot dr$

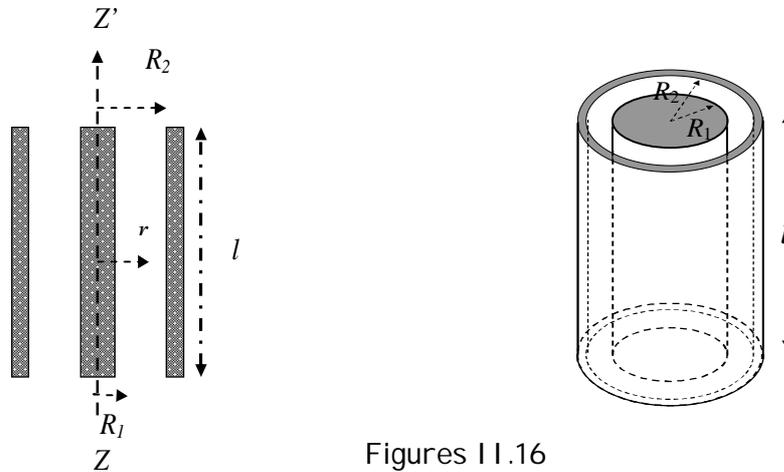
En faisant circuler ce champ entre les deux armatures, il vient :

$$V = \int_{V_1}^{V_2} -dV = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \quad \text{soit} \quad V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

D'où, le rapport $\frac{Q}{V}$: $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (9)$

N.B. Un matériau diélectrique, placé entre les armatures, permet d'augmenter la capacité d'un condensateur, sa permittivité ϵ étant nettement supérieure à celle du vide ϵ_0 . La permittivité relative $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ vaut environ: 2 (papier); 2,25 (polyéthylène); 2,4 (polystyrène); 5 (verre); 6 (mica); 18 (téflon). ϵ_r varie en fonction de la température, de l'humidité et de la fréquence de la tension appliquée.

Exercice II.4: Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur cylindrique (figure II.16), constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et R_2 , de hauteurs l , portant sur leurs surfaces en regard les charges $+Q$ et $-Q$. A.N. $l = 10 \text{ cm}$ $R_1 = 1 \text{ mm}$ $R_2 = 3 \text{ mm}$



Figures II.16

Réponse II.4:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\text{Log}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (10)$$

soit $C = 5 \text{ pF}$

3.3. Association de condensateurs.

Pour des raisons pratiques, on utilise des associations de plusieurs condensateurs afin d'emmagasiner le plus d'énergie possible. On distingue deux types de groupements de condensateurs : le groupement en série et le groupement en parallèle. La capacité équivalente des systèmes qui en résultent dépend du groupement choisi.

Association en série.

Considérons le groupement de N condensateurs en série représenté sur la figure³ II.17.a. Lorsqu'une différence de potentiel $\Delta V = V_0 - V_N$ est appliquée entre les points extrêmes de l'ensemble des condensateurs, l'armature de gauche du premier condensateur va acquérir une charge Q . En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge $\pm Q$ (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La différence de potentiel totale aux bornes de l'ensemble des condensateurs s'écrit alors simplement :

$$\Delta V = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{N-1} - V_N)$$

Soit

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_N} = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

³ Quelque soit la géométrie réelle du condensateur, on le représente schématiquement par deux traits parallèles.

Cette différence de potentiel correspond à celle d'un condensateur unique de capacité équivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (11)$$

Intérêt : Ce montage est utilisé lorsque la différence de potentiel appliquée est grande et ne peut pas être supportée par un seul condensateur.

Association en parallèle.

Soient N condensateurs, placés en parallèle, avec la même différence de potentiel V (Figure II.17.b). On désigne par Q_i et C_i la charge électrique et la capacité du $i^{\text{ème}}$ condensateur, on a

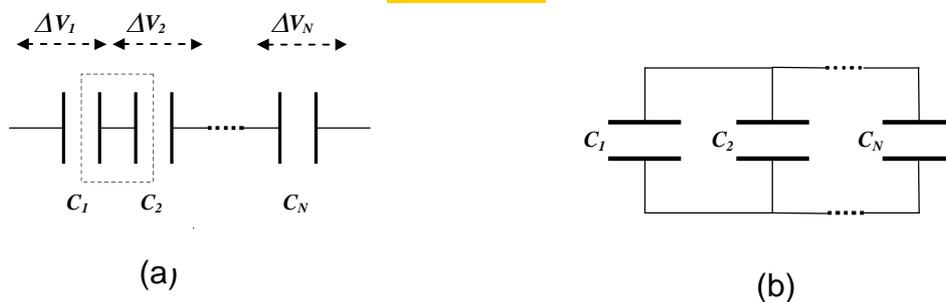
$$Q_i = C_i V$$

La charge électrique totale portée par l'ensemble des condensateurs est alors donnée par :

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = \sum_{i=1}^N C_i V = V \sum_{i=1}^N C_i$$

La capacité équivalente est la somme des capacités individuelles.

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (12)$$



Figures II.17

Intérêt : Ce montage permet d'obtenir une capacité équivalente élevée.

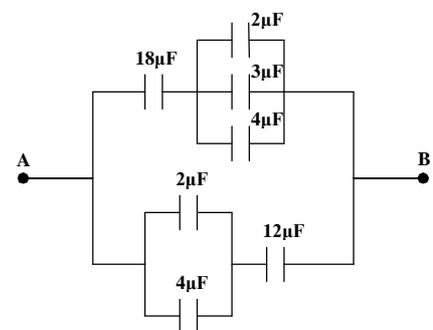
Exercice II.5: Soit le groupement de condensateurs suivant :
Déterminez la capacité équivalente du circuit.

Solution II.5:

$$C_1 = 2 + 3 + 4 = 9\mu F, \quad \frac{1}{C_2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{6} \Rightarrow C_2 = 6\mu F$$

$$C_3 = 2 + 4 = 6\mu F, \quad \frac{1}{C_4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow C_4 = 4\mu F$$

D'où $C_{eq} = C_2 + C_4 = 10\mu F$



4. ENERGIE & FORCE.

4.1. Energie électrostatique d'un conducteur.

Comme nous l'avons vu au chapitre I, l'énergie électrostatique d'un conducteur isolé est calculée par le travail nécessaire qu'il faut fournir pour le charger. Elle représente la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges du conducteur. Soit dE_p la variation d'énergie potentielle subie par une charge élémentaire dq , ramenée de l'infini (choisi comme référence du potentiel) jusqu'au conducteur :

$$dE_p = v dq$$

où q et v désignent les valeurs de la charge et du potentiel dans un état intermédiaire. Au cours du transfert de charges sur le conducteur, sa charge totale ainsi que la valeur absolue de son potentiel augmentent. L'énergie interne du conducteur lorsqu'il atteint sa charge complète est alors donnée par :

$$E_p = \int_0^Q v dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

Soit finalement:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (13)$$

Ou bien:

$$E_p = \frac{1}{2} QV \quad (14)$$

4.2. Energie électrostatique d'un ensemble de conducteurs en équilibre.

Considérons n conducteurs en équilibre, chacun d'eux porte une charge Q_i et se trouve porté à un potentiel V_i . En généralisant l'équation (14) à un ensemble de n conducteurs, l'énergie emmagasinée dans ce système est

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (15)$$

Il est possible de calculer la résultante des forces \vec{F} qui s'exerce sur l'un d'eux.

4.3. Calcul de la force à partir de l'énergie.

Lorsqu'on cherche à calculer les forces électrostatiques à partir de l'énergie emmagasinée dans un système, deux cas particuliers doivent être envisagés selon que l'évolution se fait à charge constante ou à potentiel constant.

- Le système de conducteurs n'est relié à aucune source de tension, la charge reste alors constante,
- Le système est relié à une source de tension, le potentiel reste constant.

a) Les conducteurs sont isolés.

Les conducteurs ne sont reliés à aucune source d'électricité, les charges Q_i restent donc constantes et les potentiels varient au cours d'un déplacement des conducteurs.

Lors d'une translation élémentaire \vec{dl}_i du $i^{\text{ème}}$ conducteur, le travail de la force \vec{F} est

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}_i = F_x dx_i + F_y dy_i + F_z dz_i \quad (16)$$

Ce travail est dû à la variation de l'énergie dE_p emmagasinée. Comme le système est isolé, le principe de la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$dW + dE_p = 0 \quad \text{soit} \quad F_x dx_i + F_y dy_i + F_z dz_i = - dE_p$$

d'où

$$F_x = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_Q \quad F_y = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_Q \quad F_z = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_Q \quad (17)$$

On dérive l'énergie par rapport aux coordonnées x , y , z en maintenant la charge constante.

Dans le cas d'une rotation α autour d'un axe fixe $\vec{\Delta}$, le moment de la force par rapport à cet axe est :

$$M_{\Delta} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right)_Q \quad (18)$$

b) Les conducteurs sont reliés à des générateurs.

Les conducteurs sont, à présent, reliés à des sources d'électricité, les potentiels V_i restent constants et les charges varient. Là encore, au cours d'un déplacement élémentaire \vec{dl}_i du $i^{\text{ème}}$ conducteur, le travail de la force \vec{F} est

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}_i = F_x dx_i + F_y dy_i + F_z dz_i \quad (19)$$

Mais à présent, les potentiels restent constants. Soit dQ_i la charge élémentaire fournie par la source au $i^{\text{ème}}$ conducteur, son énergie varie de :

$$dE_i = V_i dQ_i \quad (20)$$

Les n conducteurs reçoivent une énergie totale :

$$dE_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n V_i dQ_i \quad (21)$$

Cette énergie, empruntée aux générateurs, fournit :

- du travail dW qui permet à la force \vec{F} de déplacer les conducteurs
- et de l'énergie dE_p au système de conducteurs.

$$dE_{ext} = dW + dE_p \quad (22)$$

Or l'énergie emmagasinée dans ce système de conducteurs est:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (23) \quad \text{d'où} \quad dE_p = \frac{1}{2} \sum_i V_i dQ_i \quad (24)$$

Avec (21), (22) et (24) on a :

$$dW = dE_p \text{ soit } dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dE_p \quad \text{d'où}$$

$$F_x = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_V \quad F_y = \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_V \quad F_z = \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_V \quad (25)$$

Dans le cas d'une rotation α autour d'un axe fixe $\vec{\Delta}$, le moment de la force par rapport à cet axe est :

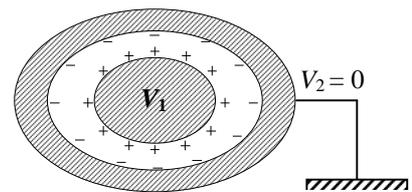
$$M_{\Delta} = \left(\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right)_V \quad (26)$$

Remarque : Il est important de remarquer le changement de signe dans l'expression de la force dans les deux cas envisagés.

4.4 Energie emmagasinée dans un condensateur

Considérons un condensateur dont :

- l'armature interne est portée au potentiel V_1 et dont la charge est $Q_1 = +Q$
- et l'armature externe est portée au potentiel V_2 et dont la charge de la surface intérieure est $Q_2 = -Q$. La surface extérieure porte une charge Q_{ext}



L'énergie du condensateur est d'après (15)

$$E_p = \frac{1}{2} Q [V_1 - V_2] + \frac{1}{2} Q_{ext} V_2 \quad (27)$$

Si l'armature externe est reliée à la terre, on a : $V_2 = 0$ et $Q_{ext} = 0$ d'où :

$$E_p = \frac{1}{2} QV \quad (28)$$

$$\text{Soit : } E_p = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{et} \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (29)$$

Ordre de grandeur et utilisation des condensateurs.

Bouteille de Leyde : $C = 600 \cdot 10^{-12} \text{ F}$, $V = 60 \text{ kV} \Rightarrow E_p = 1,18 \text{ J}$ (Bruhat [4] p 154).

Avec les diélectriques suivants : papier ou mica : $C \approx 10^{-6} \text{ F}$, céramique : $10^{-6} \text{ F} < C < 10^{-4} \text{ F}$.

Les condensateurs électrochimiques: $C \approx 10^{-3} \text{ F}$.

Les condensateurs sont largement utilisés en électronique dans les circuits, et en électrotechnique pour le relèvement du facteur de puissance (voir ch.VI)

En outre des super condensateurs permettent de stocker de l'énergie électrique puis de la restituer comme une batterie d'accumulateurs : La densité d'énergie, en watt-heure/kg, emmagasinée dans une batterie varie entre 50 et 150 et, dans un supra condensateur, elle se situe entre 4 et 6.

4.5. Localisation de l'énergie : Densité d'énergie électrostatique.

Considérons le cas d'un condensateur plan, dont les armatures ont une surface S , sont écartées de e et portent sur leurs surfaces les charges $+Q$ et $-Q$.

L'énergie électrostatique d'un tel condensateur est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2$$

En remplaçant la capacité par son expression et en faisant apparaître le champ électrostatique, nous obtenons :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{e} V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{V}{e} \right)^2 eS = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 eS$$

Où eS est le volume V du milieu limité par les armatures et $E = V/e$ est le champ électrique entre les armatures (qui est uniforme).

On obtient ainsi la densité volumique d'énergie électrostatique associée au champ électrique:

$$w = \frac{dE_p}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (30)$$

Cette dernière formule, établie ici dans un cas particulier, est générale⁴ : c'est la densité d'énergie électrique localisée dans un milieu de permittivité ε . Dans le vide, elle est donnée par

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

4.6. Force s'exerçant sur l'armature d'un condensateur.

On considère le cas d'un déplacement unidimensionnel.

a) Le condensateur est isolé : la charge reste constante.

Dans le cas d'un déplacement le long d'un axe \vec{ox} la force qui s'exerce sur une armature est d'après (17)

$$F = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_Q, \quad \text{et avec (29)} \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{on a :}$$

$$F = + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (31)$$

⁴ C'est l'énergie électrique véhiculée par un champ électrique \vec{E} lors de la propagation des ondes électromagnétiques

b) Une des armatures est portée à $V_1 = V$ l'autre est portée à $V_2 = 0$

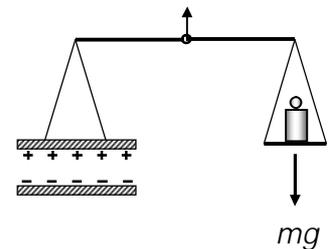
Avec (25)

$$F = + \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_V \quad \text{et} \quad (28) \quad E_p = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{il vient :}$$

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \quad (32)$$

Cas d'une rotation autour d'un axe.
$$M_\Delta = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad (33)$$

Exercice II. 6. Electromètre absolu : l'électromètre absolu, représenté sur la figure ci-contre, se compose d'une balance dont l'un des plateaux est solidaire de l'armature mobile d'un condensateur plan. La seconde armature est fixe. Une d.d.p. V est appliquée au condensateur, il en résulte une force électrostatique \vec{F} . Celle-ci est équilibrée par une force $m\vec{g}$ obtenue en plaçant des masses marquées sur l'autre plateau de la balance.



Exprimer la d.d.p. V à mesurer en fonction des caractéristiques du condensateur de m et g .

A.N. Rayon des armatures $R = 6$ cm, écartement $x = 1$ cm, $m = 5$ g et $g = 10$ m/s².

Solution II. 6.

1°) **1^{ère} méthode** : La force électrique peut être calculée directement à partir de la pression électrostatique (§ 1.5):

$$P = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

La force électrique qui s'exerce sur l'armature mobile est verticale et de module :

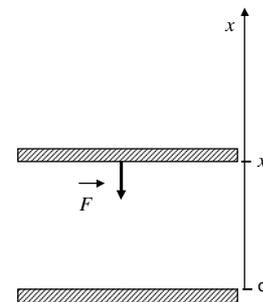
$$F = P.S = \frac{q^2}{2 \epsilon_0 S} \quad \text{avec} \quad q = CV \quad \text{soit} \quad q = \frac{\epsilon_0 S}{x} V \quad \text{on a :}$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V^2$$

2^{ème} méthode : La force électrique peut être calculée à partir de l'énergie :

Supposons que l'armature mobile effectue un déplacement élémentaire dx . Au cours de ce déplacement virtuel seul l'écartement x varie les potentiels $V_1 = V$ et $V_2 = 0$ restent constants. La force qui s'exerce sur l'armature mobile est dirigée le long de l'axe \overline{ox} et a pour module (voir Equation 32)

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{soit} \quad F = - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V^2$$

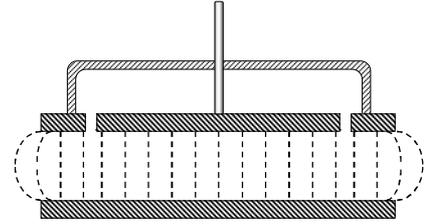


2°) Dans le cas de l'électromètre absolu, cette force est équilibrée par la force $\vec{P} = m\vec{g}$.

A l'équilibre :

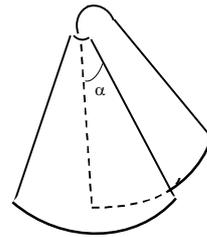
$$V^2 = 2 \frac{x^2}{\epsilon_0 S} m g \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2 \frac{x^2}{\epsilon_0 S} m g} = 10.000 \text{ volts}$$

Remarque : Dans un condensateur plan parfait, toutes les lignes de champs sont perpendiculaires aux armatures circulaires. En réalité, il ya une distorsion de ces lignes aux extrémités. Pour y remédier on utilise un anneau de garde, c'est une électrode qui a la forme indiquée sur la figure ci-contre et qui est portée au même potentiel que l'électrode protégée.



Exercice II. 7. Electromètre à déviation

Soit un condensateur plan dont les armatures ont la forme de section de cercle. L'une des armatures est fixe et portée à un potentiel $V_2 = 0$, L'autre est mobile autour d'un axe D perpendiculaire aux plans des armatures. Cette armature est portée au potentiel V à mesurer, en outre elle est solidaire d'une aiguille dont les positions sont repérées sur un cadran gradué.



1°) Calculer le couple moteur.

2°) Ce couple est équilibré par un couple de rappel créé par un ressort à spirale de constante k ($M = k \alpha$)

Solution II. 7.

Le couple moteur a pour expression (26)

$$M_{\Delta} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad \text{avec} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{e} \quad (\text{condensateur plan})$$

Par construction, cette capacité est proportionnelle à la surface S du condensateur formé par les parties des plaques qui se trouvent en face l'une de l'autre, donc C est proportionnelle à α .

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = A \quad \text{où } A \text{ est une constante} \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta} = \frac{A}{2} V^2 = k \alpha$$

A l'équilibre, les deux couples sont égaux et opposés :

$$\alpha = K V^2$$

K est une constante que l'on détermine par étalonnage de l'appareil de mesure.

Remarque : Un appareil absolu permet de mesurer une grandeur inconnue (ici une d.d.p V) à partir de grandeurs d'espèces différentes (une épaisseur x , une surface S , une masse m et l'accélération de la pesanteur g). Nous verrons, dans ce cours, d'autres appareils absolus : électrodynamomètres, balance de coton.

Un appareil à déviation, comporte un élément moteur (ici moteur électrostatique) qui, dans ce cas, transforme l'énergie électrique en énergie mécanique et fait correspondre, à la tension à mesurer, une déviation α repérée sur un cadran gradué. Les appareils à déviation nécessitent un étalonnage préalable.

Exercices : Chapitre II

Exercice II. 8. Champ au voisinage et à la surface d'un conducteur.

Le champ électrique, en un point M, infiniment proche de la surface d'un conducteur en équilibre, a pour expression en vertu du théorème de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

où σ est la densité de charges superficielles et \vec{n} un vecteur unitaire porté par la normale à la surface. On pose, en vertu du principe de superposition :

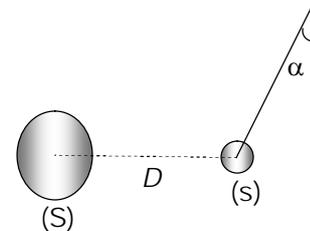
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

\vec{E}_1 est le champ créé par un élément de surface dS infiniment voisin de M et \vec{E}_2 le champ dû aux autres charges du conducteur.

En considérant un élément de surface dS circulaire et en partant du champ créé par un disque chargé avec une densité superficielle σ (Ch I, § 4.3), calculer les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 à l'intérieur, à l'extérieur et à la surface du conducteur. Retrouver le théorème de Coulomb

Exercice II. 9 Phénomène d'influence.

La figure ci-contre représente un pendule constitué d'une petite sphère conductrice (s), de centre O' de rayon r et de masse m suspendue à une potence par un fil conducteur de masse et de capacité négligeables. Cette sphère (s) est électrisée par influence à l'aide d'une seconde sphère conductrice (S) de rayon R de centre O et portée à un potentiel V . Les centres O et O' sont sur une même droite horizontale et situés à une distance $D = OO'$.



1°) Montrer que l'on peut remplacer la sphère (S), portant une charge Q , par une charge ponctuelle Q placée en O centre de (S).

2°) Décrire les phénomènes dans les deux cas suivants : a) le pendule est isolé b) le pendule est relié à la Terre.

3°) Dans le cas où le pendule est porté au potentiel zéro (il est relié à la Terre), calculer les charges Q et q portées respectivement par les sphères (S) et (s).

En déduire l'angle α que forme, à l'équilibre, le pendule avec la verticale.

A.N. $V = 3000$ volts, $R = 3$ cm, $r = 2$ mm $D = 6$ cm, $m = 50$ mg $g = 9.81$ m/s²

N.B. On montre en mathématiques, que le lieu des points, dont le rapport k des distances à deux points P et Q est constant, est une sphère centrée sur la droite PQ et qui coupe cette droite en 2 points A et B tels que ces quatre points forment une division harmonique de rapport k .

$$k = \frac{AQ}{AP} = \frac{BQ}{BP}$$

Exercice II. 10.

Une sphère conductrice S_1 , de centre O_1 et de rayon $R_1 = 10$ cm, porte une charge électrique $q_1 = 10$ nanocoulombs.

1°) Calculer son potentiel V et son énergie interne W

2°) On relie, par un fil conducteur, S_1 à une seconde sphère conductrice S_2 , initialement neutre, de centre O_2 et de rayon $R_2 = 1$ cm. Les centres des deux sphères sont séparées par une distance $d = O_1O_2 = 50$ cm. On néglige les caractéristiques du fil de jonction et on ne tient pas compte du phénomène d'influence.

Calculer, à l'équilibre, les charges q_1 et q_2 portées respectivement par S_1 et S_2 .

3°) En déduire les densités de charges correspondantes σ_1 et σ_2 et les champs E_1 et E_2

au voisinage de S_1 et S_2 .

4°) Calculer l'énergie du système formé par les deux sphères avant et après la connexion. Où est passée l'énergie perdue ?

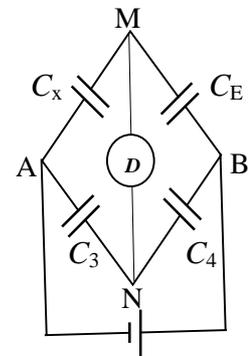
5°) Reprendre la deuxième question dans le cas particulier où la distance d est considérée comme infinie.

Exercice II. 11.. Mesure d'une capacité par une méthode de zéro.

Le pont de capacités, représenté sur la figure ci-contre, se compose de quatre condensateurs montés comme le montre cette figure. C_x est la capacité à mesurer, C_E la capacité d'un condensateur étalon, C_1 et C_2 deux capacités variables.

Ces condensateurs sont chargés par une source d'électricité qui établit entre les points A et B une différence de potentiel $V_A - V_B$. On fait varier C_1 et C_2 jusqu'à ce que le détecteur de zéro (un électromètre) indique une différence de potentiel nulle.

Exprimer la capacité inconnue en fonction des trois autres capacités. A.N. $C_1 = 4 \mu\text{F}$ $C_2 = 2 \mu\text{F}$ $C_E = 3 \mu\text{F}$.

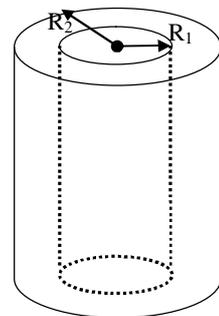


Exercice II. 12. Energie localisée dans un condensateur cylindrique.

Un condensateur cylindrique, constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$), séparées par du vide.

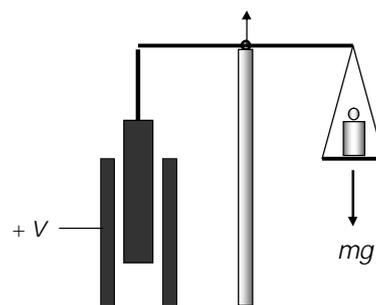
1°) Soit $V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre l'armature interne et l'armature externe du condensateur, et q_l la charge de ce condensateur par unité de longueur. Rappeler l'expression du potentiel en un point M situé entre les deux armatures et celle de la capacité C_l par unité de longueur de ce condensateur.

2°) En utilisant l'énergie emmagasinée entre les armatures, retrouver l'expression de C_l .



Exercice II. 13. Electromètre à condensateur cylindrique

L'électromètre absolu, représenté sur la figure ci-contre, se compose d'une balance dont l'un des plateaux est solidaire de l'armature interne mobile d'un condensateur cylindrique. L'armature externe est fixe. Une différence de potentiel V est appliquée au condensateur, il en résulte une force électrostatique \vec{F} . Celle-ci est équilibrée par une force $m\vec{g}$ obtenue en plaçant des masses marquées sur l'autre plateau de la balance.

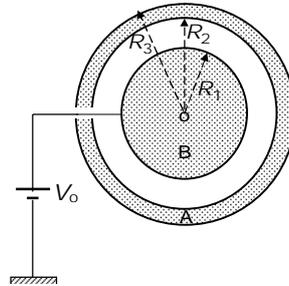


Exprimer la différence de potentiel V , que l'on doit mesurer, en fonction des caractéristiques du condensateur de m et de g .

A.N. Rayon des armatures $R_1 = 6 \text{ cm}$, $R_2 = 6,2 \text{ cm}$, $m = 5 \text{ g}$ et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Exercice II. 14. (Epreuve Finale 2010/2011, ST. Exercice noté 10 points/20)

Un conducteur sphérique creux A, initialement neutre, de rayon intérieur $R_2 = 2R$ et rayon extérieur $R_3 = 4R$ entoure un deuxième conducteur sphérique B, de rayon $R_1 = R$, porté à un potentiel V_0 par l'intermédiaire d'un générateur. (Voir figure ci-dessous). Le conducteur B porte une charge Q_0 .



- 1°) Quelles sont les charges portées par les surfaces intérieure et extérieure du conducteur A. Justifier.
- 2°) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique E dans les quatre régions suivantes :

$$r < R, \quad R < r < 2R, \quad 2R < r < 4R, \quad r > 4R.$$

- 3°) En considérant que V_A est le potentiel du conducteur A et sachant que le potentiel électrique est nul à l'infini, déterminer l'expression du potentiel électrique dans les quatre régions.
- 4°) En déduire la charge Q_0 en fonction de R , V_0 et ϵ_0 .

Chapitre III

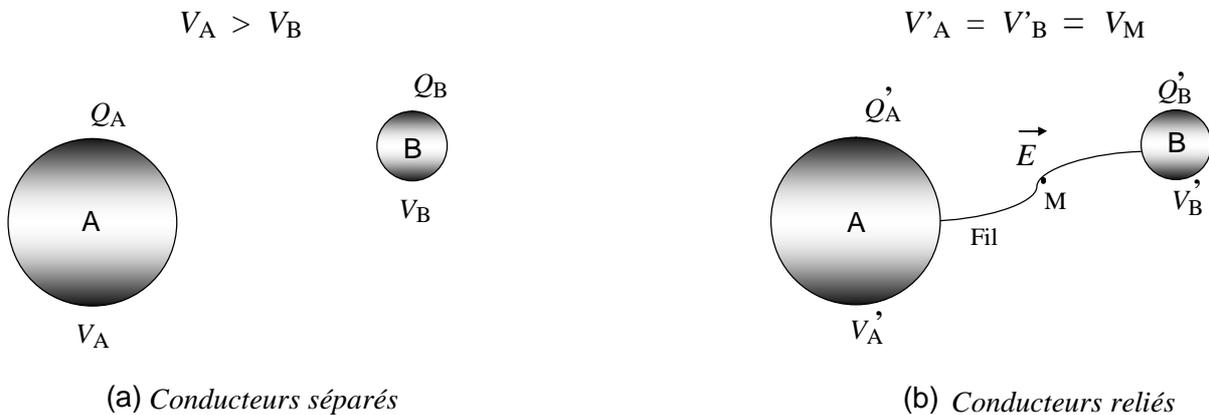
LES COURANTS CONTINUS

Nous avons traité, au premier chapitre, les phénomènes électriques dans des conditions où aucune grandeur physique n'évolue au cours du temps : c'est le cas de l'électrostatique où toutes les charges électriques sont supposées immobiles dans l'espace. Nous allons dans ce chapitre, nous intéresser au cas où ces charges se déplacent en donnant naissance à un courant électrique continu. L'étude des réseaux électriques parcourus par de tels courants sera traitée dans ce chapitre.

1. COURANTS ELECTRIQUES.

1. 1. Origine du courant électrique.

Soient deux conducteurs A et B, initialement en équilibre électrostatique, portant des charges Q_A et Q_B et dont les potentiels respectifs sont V_A et V_B tels que $V_A > V_B$ par exemple. Dans ces conditions, un champ électrique \vec{E} existe entre A et B. (Fig. III. 1.a)



Figures III.1

Lorsqu'on relie les conducteurs A et B par un fil conducteur, l'équilibre se rompt et un mouvement de charges électriques apparaît, sous l'action d'une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. Ce mouvement se poursuit jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre dans le nouveau conducteur formé par A, B et le fil (Fig. III. 1.b). Cette circulation de charges correspond au passage d'un *courant électrique* dans le fil de connexion. Ce courant est *temporaire*.

Lors de ce mouvement, la charge totale des conducteurs A et B se conserve :

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow Q_A - Q'_A = Q'_B - Q_B \Rightarrow -\Delta Q_A = +\Delta Q_B \quad (1)$$

Dans cet exemple, $V_A > V_B$, la variation de charges correspond à une diminution des charges positives ou à une augmentation des charges négatives du conducteur A.

1.2. Courant permanent.

Pour avoir une circulation permanente du courant électrique, il faut maintenir un état de déséquilibre entre les deux conducteurs A et B lorsqu'ils sont reliés. A cet effet, il est nécessaire d'amener de façon continue des charges sur l'un des conducteurs. Ceci peut être réalisé à l'aide d'appareils que l'on appelle générateurs (voir § 4)

Un courant permanent correspond à un déplacement ininterrompu de charges libres.

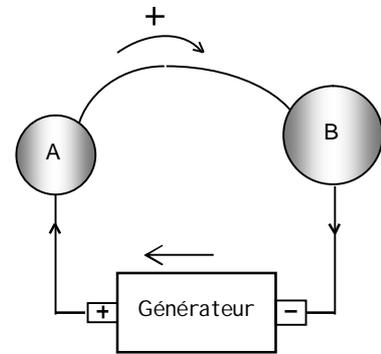


Figure III. 2

1.3. Sens conventionnel du courant.

Dans les métaux, le courant résulte d'un déplacement d'électrons, c'est à dire de charges négatives. Le sens conventionnel du courant, choisi par Ampère au début du dix neuvième siècle, est opposé à celui des électrons. Cette convention est toujours en vigueur.

Par conséquent, le courant électrique circule du pôle positif au pôle négatif à l'extérieur du générateur et du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur du générateur (figure III.2).

Dans les autres matériaux¹, le courant électrique est dû aux mouvements de différents porteurs de charges : électrons, ions positifs, ions négatifs...

Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que la conduction électrique dans les métaux.

1.4. Intensité du courant.

Soit un conducteur métallique de section S . L'intensité I du courant électrique est, par définition, la quantité d'électricité dQ qui traverse la section S pendant un intervalle de temps dt .

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

L'intensité I est exprimée en ampères² (A).

Un courant électrique est *continu* si son intensité I reste constante au cours du temps.

¹ Gaz, électrolytes, semi conducteurs, diélectriques etc.

² Pour la définition de l'ampère, voir Chapitre IV § 4.2.

1.5. Ligne de courant.

Une *ligne de courant* est la trajectoire orientée décrite par une charge positive en mouvement.

Un *tube de courant* est constitué par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

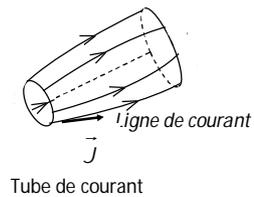


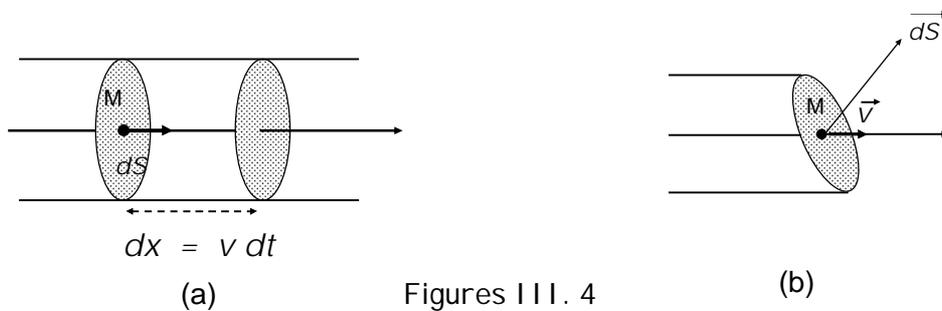
Figure III.3

1.6. Vecteur densité de courant.

Considérons un conducteur métallique, cylindrique, de section S et d'axe \overline{Ox} . Choisissons un tube de courant cylindrique dont l'axe est parallèle à \overline{Ox} et de section droite dS traversée par la quantité de charges dq (figure III.4.a).

Désignons par :

\vec{v} la vitesse de déplacement de ces charges,
et ρ leur densité volumique.



Figures III. 4

La quantité de charge dq , qui traverse la section dS perpendiculaire à l'axe du tube de courant, occupe, pendant un temps dt , un volume cylindrique

$$dV = dx dS = v dt dS,$$

et a pour valeur :

$$dq = \rho dV = \rho v dt dS,$$

\vec{v} et \overline{dS} sont ici parallèles. Dans le cas où \overline{dS} n'est plus parallèle à \vec{v} (figure III.4.b), cette expression devient :

$$dq = \rho \vec{v} \cdot \overline{dS} dt \tag{3}$$

Introduisons un vecteur \vec{J} tel que:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \tag{4}$$

L'expression (3) devient :

$$\frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot \overline{dS}$$

Si on considère, à présent, la section S du conducteur, la charge totale qui la traverse est :

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{J} \cdot \overline{dS}$$

Soit avec (2):

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

L'intensité du courant électrique apparaît comme le flux du vecteur \vec{J} à travers la surface S .

La grandeur vectorielle \vec{J} est appelée "densité de courant"³, elle est mesurée en ampères par mètre carré (A/m²).

L'expression (5) qui apparaît ici dans un cas particulier est valable dans tous les cas ; la surface S est, dans le cas général, une surface quelconque fermée ou non.

1.7. Mouvement des électrons dans le vide.

On soumet deux plaques métalliques A et B, parallèles, placées dans le vide et séparées d'une distance d , à une différence de potentiel $V = V_A - V_B$. (figure III.5.a).

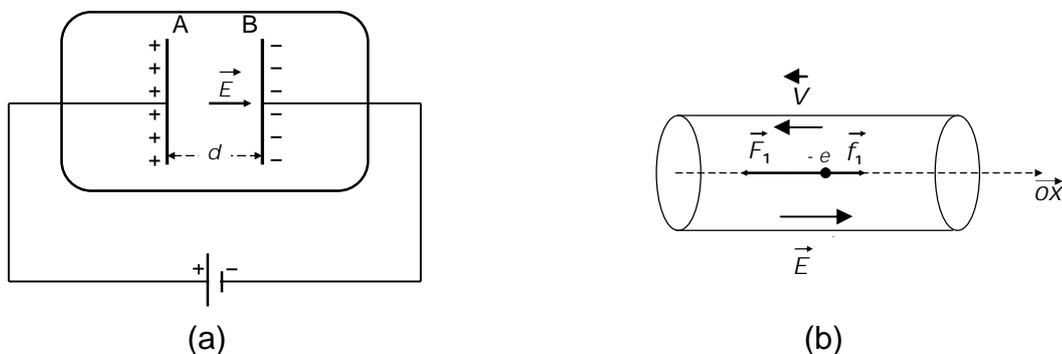
Ces conditions entraînent la création d'un champ électrique \vec{E} entre les deux plaques tel que :

$$E = \frac{V_A - V_B}{d} = \frac{V}{d}$$

Si un électron est émis par la plaque B, il sera soumis à une force électrique :

$$\vec{F} = -e \vec{E} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

L'accélération étant constante, le mouvement des électrons, dans le vide, est donc uniformément accéléré, ce qui n'est pas le cas dans les métaux.



Figures III. 5

1.8. Mouvement des électrons dans un conducteur.

Dans un métal (figure III.5.b), en l'absence de champ électrique, les électrons libres se déplacent dans toutes les directions. Leur vitesse moyenne est nulle, il n'y a donc pas de courant. En présence d'un champ électrique, un mouvement d'entraînement se crée, il en résulte un courant électrique.

³ Dans le cas d'un métal, la conduction est due à un déplacement d'électrons de charge $-e$. Le vecteur densité de courant s'écrit : $\vec{J} = -ne\vec{v} = \rho\vec{v}$. n est le nombre d'électrons par unité de volume.

L'étude des mécanismes de conduction dans les métaux fait appel à la mécanique quantique⁴. Néanmoins on peut considérer, en première approximation, que l'effet du réseau cristallin sur le mouvement des électrons se traduit par une force de freinage de la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{v} \quad (6)$$

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique pour l'électron (figure III. 5.b), on a :

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

où \vec{a} est l'accélération de l'électron. La projection de cette relation sur l'axe \overline{Ox} donne avec $E_x = E$:

$$-eE - k v_x = m a_x \quad \Rightarrow \quad m \frac{dv_x}{dt} + k v_x = -eE$$

ou encore :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x = -\frac{e}{m} E$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre. La solution générale est la somme de deux solutions :

- une solution de l'équation homogène (sans second membre) :

$$v_h = A \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

- et une solution particulière : $v_p = -\frac{e}{k} E$

soit :

$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E + A \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

En tenant compte de la condition initiale $v_x(0) = 0$, on obtient la constante $A = \frac{e}{k} E$.

Ce qui donne :

$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\right) = -v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (7)$$

où

$$v_l = \frac{e}{k} E \quad (8)$$

est la vitesse limite atteinte par les électrons et

$$\tau = \frac{m}{k} \quad (9)$$

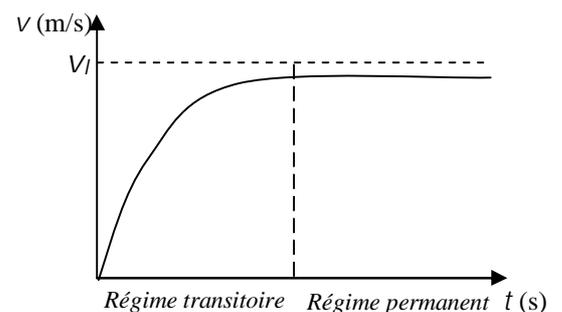


Figure III. 6

la constante de temps ou temps de relaxation.

Le module de la vitesse des électrons est représenté sur la figure III.6.

Remarques : 1° La durée du régime transitoire étant extrêmement faible (Exercice. III. 1), ce régime peut être négligé. La vitesse des électrons dans un métal est donc égale à celle du régime permanent.

2° L'existence d'une force de frottement dans les métaux se traduit par un dégagement de chaleur (Effet Joule § 3).

⁴ Ces mécanismes seront étudiés en troisième année de licence de physique (S6).

2. LOI d'OHM.

2.1. Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.

L'expérience montre que:

Le rapport, entre la différence de potentiel V entre deux points d'un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant, la température étant maintenue constante.

$$V = RI \quad (10)$$

C'est la loi d'Ohm. La constante R est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms (Ω).

2.2. Forme locale de la loi d'Ohm.

Conductivité σ

Un conducteur cylindrique, de longueur l et de section S , est soumis à une différence de potentiel V : il en résulte, en tout point du conducteur, un champ électrique \vec{E} tel que :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (11)$$

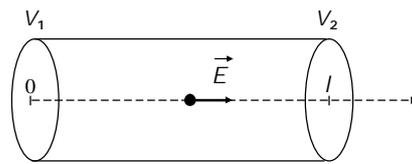


Figure III. 7

\vec{E} et $d\vec{l}$ étant parallèles, on a :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -E \int_0^l dl \quad \Rightarrow \quad V = V_1 - V_2 = El \quad (12)$$

La différence de potentiel V donne naissance à un courant électrique I dont la valeur est donnée par la loi d'Ohm (10) :

$$V = RI \quad \text{Avec (12), on a :} \quad El = RJS$$

soit :

$$J = \frac{l}{RS} E = \sigma E \quad (13) \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{l}{RS} \quad (14)$$

σ est la *conductivité* du conducteur ; elle est exprimée en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ou en siemens par mètre ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$). A partir de (14) on a l'expression de la résistance électrique :

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (15)$$

A l'échelle microscopique, on peut écrire avec (4) et (8) :

$$J = -nev = \frac{ne^2}{k} E$$

Avec (13) il vient :

$$\sigma = \frac{ne^2}{k}$$

En fonction du temps de relaxation (9), la conductivité s'écrit :

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau \quad (16)$$

L'expression (13) s'écrit, sous forme vectorielle

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (17)$$

Cette expression est générale, elle constitue la "*forme locale*" de la loi d'Ohm.

En tout point M d'un conducteur de conductivité σ , l'existence d'un champ \vec{E} entraîne l'apparition d'une densité de courant \vec{J} dont l'expression est donnée en (17)

Résistivité ρ_Ω

La résistivité est l'inverse de la conductivité : $\rho_\Omega = \frac{1}{\sigma}$ (18)

Elle s'exprime en $\Omega \cdot m$.

Dans le cas général, la résistivité dépend de la température:

$$\rho_\Omega = \rho_{\Omega 0} (1 + \alpha \Delta T) \quad (19)$$

où : $\rho_{\Omega 0}$ est la résistivité à la température $0^\circ C$, α une constante caractéristique du métal et ΔT l'élévation de température.

Mobilité μ

La vitesse est reliée au champ électrique par (8):

$$\vec{v} = \frac{e}{k} \vec{E} \quad \text{on pose} \quad \vec{v} = \mu \vec{E} \quad (20)$$

μ est la mobilité ; elle s'exprime en $m^2/V \cdot s$.

En fonction de la conductivité on a :

$$\sigma = \frac{ne^2}{k} = ne\mu \quad \text{soit} \quad \mu = \frac{\sigma}{ne} \quad (21)$$

Exercice III.1.

1°) Calculer le temps de relaxation et la mobilité des charges libres dans le cuivre.

2°) Calculer la vitesse des charges libres dans un fil de cuivre cylindrique et homogène de section $S = 2,5 \text{ mm}^2$. le fil étant parcouru par un courant $I = 10A$.

On donne la masse volumique du cuivre : $\rho_M = 8,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, sa masse atomique $M_A = 63,6g$, sa conductivité électrique $\sigma = 5,88 \cdot 10^7 S/m$ et le nombre d'Avogadro $N = 6,02 \cdot 10^{23}$. On suppose qu'il y a un électron libre par atome de cuivre.

($e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

Solution III.1. 1°) La conductivité est reliée au temps de relaxation par (16) $\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau$

Le nombre d'électrons par m³ $n = \frac{\rho_M}{M_A} N \Rightarrow n = \frac{8,8 \cdot 10^3}{63,6 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{23} = 0,83 \cdot 10^{29}$ et

Le temps de relaxation est : $\tau = \frac{m_e}{ne^2} \sigma$ soit $\tau = 2,5 \cdot 10^{-14}$ s

La mobilité des électrons dans le cuivre a pour valeur : $\mu = \frac{\sigma}{ne} = 4,4 \cdot 10^{-3}$ m²/V.s.

2°) On obtient à partir de l'expression de la densité de courant (4) $J = nev$, la vitesse des électrons :

$$v = \frac{J}{ne} \quad \text{avec} \quad J = \frac{I}{S} = 4 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2 \Rightarrow v = 0,31 \text{ mm/s}$$

Remarque : La durée du régime transitoire est très courte et peut être négligée

La résistance électrique d'un conducteur cylindrique de longueur l et de section S , s'exprime, comme le montre l'équation 14, en fonction de sa résistivité ρ_Ω , par :

$$R = \rho_\Omega \frac{l}{S} \tag{22}$$

Dans le cas d'un conducteur de forme quelconque, la résistance peut être calculée à partir de la loi d'Ohm.

Exercice III.2. Exemple de calcul de résistance d'un conducteur

Calculer l'expression de la résistance d'un conducteur annulaire cylindrique, homogène de conductivité σ , dont les faces sont des cylindres de rayons r_1, r_2 et de longueur l . Elles sont soumises à une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$.

Solution III.2.

En raison de la symétrie du problème, les équipotentielles sont des cylindres coaxiaux de surface S et les lignes de champ et de courant sont radiales.

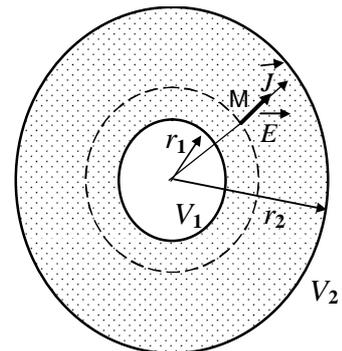
En tout point M, à l'intérieur du conducteur règne un champ \vec{E} tel que :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En intégrant de r_1 à r_2 , il vient

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

D'après la loi d'Ohm on a : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$



d'où
$$V = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \vec{J} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} J dr \tag{a}$$

D'autre part l'intensité du courant est :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit} \quad I = J l \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r l J \Rightarrow J = \frac{I}{2\pi l r} \tag{b}$$

En effet \vec{J} reste constant et perpendiculaire à la surface $S = 2\pi r l$, donc parallèle à $d\vec{S}$

A partir de (a) et (b), on peut écrire :

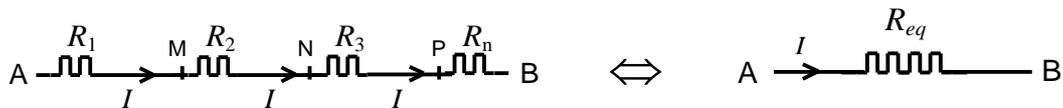
$$V = \frac{1}{2\pi l} \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{r} dr = \frac{1}{2\pi l} \frac{I}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \quad \text{soit} \quad V = \frac{1}{2\pi l \sigma} I \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Sachant que $V = RI$, on en déduit :

$$R = \frac{1}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

2.3. Groupement de résistances.

Groupement en série. Le même courant I traverse toutes les résistances, montées en série.



Figures III. 8

$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_N) + (V_N - V_P) + \dots \quad \text{soit}$$

$$V_A - V_B = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = R_{eq} I \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (23)$$

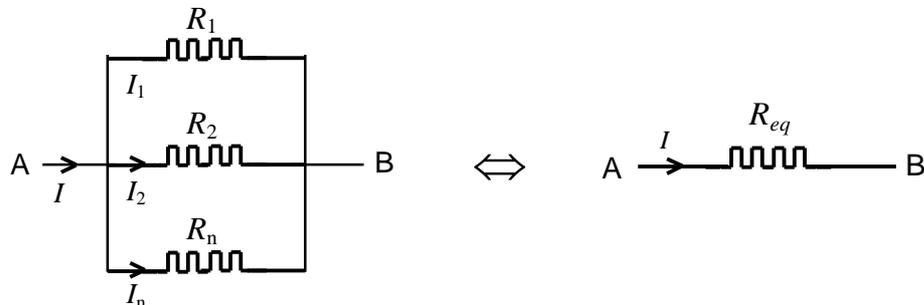
La résistance équivalente est égale à la somme des résistances.

Groupement en parallèle. A présent la même différence de potentiel $V = V_A - V_B$ est appliquée aux bornes des résistances, par conséquent :

$$V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_n I_n$$

et
$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

donc
$$\frac{V_A - V_B}{R_{eq}} = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + \dots + \frac{V_A - V_B}{R_n}$$



Figures III. 9

d'où la résistance équivalente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (24)$$

Exercice III.3. 1°) Deux résistances $R_1 = (1,25 \pm 0,01) \Omega$ et $R_2 = (4,52 \pm 0,02) \Omega$ sont montées en série. Calculer la résistance équivalente R_S et l'erreur ΔR_S .
2°) Même question si les deux résistances sont montées en parallèle.

Solution III.3. 1°) $R_S = R_1 + R_2 = (1,25 + 4,52) \Omega = 5,77 \Omega$
 $\Delta R_S = \Delta R_1 + \Delta R_2 = (0,01 + 0,02) \Omega = 0,03 \Omega \Rightarrow R_S = (5,77 \pm 0,03) \Omega$

$$2^\circ) \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0,982 \Omega$$

Calcul d'erreur: La dérivée logarithmique de l'expression précédente est :

$$\frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1 + R_2} - \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

Soit

$$\frac{dR}{R} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{dR_1}{R_1} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{dR_2}{R_2}$$

On passe aux erreurs :

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{\Delta R_1}{R_1} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{\Delta R_2}{R_2} = 0,72\% \Rightarrow R_p = (0,982 \pm 0,007) \Omega$$

3. L'EFFET JOULE.

La circulation d'un courant I à travers un conducteur électrique, entraîne une perte d'énergie qui se traduit par un échauffement. On peut déterminer l'énergie dissipée pendant le passage du courant.

Si dq est la quantité de charge qui passe d'un point A à un point B du conducteur, le travail des forces électriques est :

$$dW = (V_A - V_B) dq \quad (25)$$

Cette quantité de charge est reliée au courant par : $dq = I dt$

D'où :

$$dW = (V_A - V_B) I dt$$

Si R est la résistance de ce conducteur, on a d'après la loi d'Ohm:

$$V = V_A - V_B = RI$$

Le travail s'écrit alors :

$$dW = V I dt = RI^2 dt \quad (26)$$

Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur : c'est l'*effet Joule*

Elle correspond à une puissance :

$$p = \frac{dW}{dt} = RI^2 \quad (27)$$

soit $p = \frac{V^2}{R}$ (28) ou $p = VI$ (29)

Comme V et I sont constants, la puissance p reste constante au cours du temps.

Densité de puissance dissipée par effet Joule.

Dans le cas d'un conducteur cylindrique (figure III.7), l'expression (27) s'écrit :

$$p = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} (J.S)^2 = \frac{1}{\sigma} J^2 V$$

V est le volume du conducteur. En tout point M , la densité de puissance dissipée par effet Joule est :

$$\pi = \frac{p}{V} = \frac{1}{\sigma} J^2 \quad \text{soit} \quad \pi = J E$$

Comme les vecteurs \vec{J} et \vec{E} sont parallèles on peut écrire :

$$\pi = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (30)$$

Cette formule est générale.

4. GENERATEURS ÉLECTRIQUES.

4.1. Définitions.

Un générateur électrique est un dispositif qui, placé dans un circuit électrique, est capable de maintenir un champ électrique. Ce dernier, en déplaçant les charges mobiles, assure la circulation du courant électrique et le transport de l'énergie à travers le circuit. Notons que cette énergie n'est pas créée par le générateur, ce dernier ne fait que transformer une forme d'énergie, mécanique, chimique, lumineuse etc.. en une énergie électrique⁵.

On distingue deux types de générateurs :

Un générateur de tension est un dispositif capable de maintenir une différence de potentiel constante à ses bornes, quelque soit le circuit extérieur.

Un générateur de courant est un appareil qui délivre un courant pratiquement constant, quelque soit le circuit extérieur.

Dans ce cours, nous ne considérons que les générateurs de tension.

4.2. Générateur à vide: Force électromotrice (f.é.m)

Dans ce cas, le générateur ne débite pas de courant électrique ; les charges, qu'il renferme sont immobiles. Une quantité de charge élémentaire dq est soumise à l'action

$$\text{- d'une force électrostatique :} \quad \overline{dF_s} = dq \vec{E}_s \quad (31)$$

$$\text{- d'une force produite par le générateur:} \quad \overline{dF_m} \quad (32)$$

appelée "*force motrice*".

\vec{E}_s désigne ici le champ électrostatique.

⁵ La pile transforme de l'énergie chimique en une énergie électrique, le dynamo transforme de l'énergie mécanique en une énergie électrique.

Comme les charges sont immobiles, on a :

$$\overrightarrow{dF_s} + \overrightarrow{dF_m} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dF_m} = - dq \vec{E}_s$$

Cette condition, n'est satisfaite que si la force motrice est, elle aussi, proportionnelle à dq . On écrit alors :

$$\overrightarrow{dF_m} = dq \vec{E}_m \tag{33}$$

Le vecteur \vec{E}_m est appelé "*champ électromoteur*"⁶.

A vide :

$$\vec{E}_s = - \vec{E}_m \tag{34}$$

La différence de potentiel aux bornes du générateur est :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_s \cdot \overrightarrow{dl} \quad \text{soit} \quad V_A - V_B = \int_B^A \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{dl} \tag{35}$$

Cette quantité $e = V_A - V_B$ (36)

est une caractéristique du générateur ; c'est sa *force électromotrice*⁷. (*f.é.m.*), elle est mesurée en volts :

$$e = \int_B^A \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{dl} \tag{37}$$

l'expression (37) montre que le champ électromoteur ne dérive pas d'un potentiel.

4. 3.Générateur en charge.

Le générateur débite, à travers un circuit extérieur, un courant électrique I . Par convention, le courant sort par la borne positive A du générateur et rentre par sa borne négative B

En charge c'est le champ total

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$$

qui intervient. En chaque point on a :

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E}_s + \vec{E}_m) = \sigma \vec{E} \tag{38}$$

La circulation, dans le générateur, du champ total de B à A (c'est le sens du courant comme le montre la figure III.10) est :

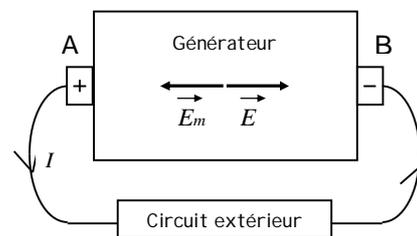


Figure III. 10

⁶ Le concept de "*champ électromoteur*" sera réintroduit au chapitre V lors de l'étude de l'induction électromagnétique. Ainsi, le champ électrique \vec{E} se compose de deux champs : le champ électrostatique \vec{E}_s et le champ électromoteur $\vec{E}_m \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$

⁷ Le terme "*force électromotrice*" peut prêter à confusion, il ne s'agit pas d'une force telle qu'elle est définie en mécanique, mais d'une grandeur qui a la dimension d'un potentiel.

$$\int_B^A (\vec{E}_S + \vec{E}_m) \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{E}_S \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = (V_B - V_A) + e = \frac{J}{\sigma} l$$

En multipliant et en divisant le dernier terme par S , section traversée par le courant, on a :

$$(V_B - V_A) + e = r I$$

où r est la résistance interne du générateur.

Par conséquent :

$$V_A - V_B = e - r I \quad (39)$$

$V_A - V_B$ est la différence de potentiel utilisable aux bornes du générateur. La loi d'Ohm appliquée au circuit extérieur, de résistance R , donne :

$$V_A - V_B = R I \quad (40)$$

D'où

$$e = (R + r) I \quad (41)$$

La relation (41) exprime *la loi de Pouillet*, établie expérimentalement en 1837 par le physicien français Claude Pouillet.

Bilan énergétique et rendement:

Le générateur transforme l'énergie qu'il reçoit, sous forme mécanique ou chimique par exemple, en énergie électrique.

Toute charge élémentaire dq , qui traverse le générateur reçoit une énergie dW égale au travail de B à A de la force motrice :

$$d\vec{F}_m = dq \vec{E}_m \quad \Rightarrow \quad dW = \int_B^A dq \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = e dq$$

En faisant intervenir le courant électrique, on a :

$$dW = e I dt$$

La puissance instantanée fournie par le champ électromoteur est :

$$p = \frac{dW}{dt} = e I$$

En courant continu, cette quantité reste constante au cours du temps ; elle est égale à la puissance moyenne :

$$P = e I \quad (42)$$

En multipliant les deux membres de l'expression (41)

$$e = (R + r) I$$

par I , on obtient

$$e I = (R + r) I^2$$

Avec (42), il vient :

$$P = RI^2 + rI^2 \quad (43)$$

Le premier terme RI^2 représente la puissance consommée dans le circuit extérieur et le second rI^2 la puissance dissipée dans le générateur.

Le rendement η d'un générateur est défini comme étant le rapport entre la puissance $P' = (V_A - V_B)I$ utilisable dans le circuit extérieur et la puissance $P = eI$ absorbée par le générateur. Il s'écrit :

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{V_A - V_B}{e}$$

Notons que dans le cas d'un générateur idéal, la tension utilisable à ses bornes est confondue avec sa f.é.m : son rendement est alors égal à 1. Dans le cas du générateur réel, $V_A - V_B$ est toujours inférieure à e et le rendement du générateur est donc inférieur à 1.

Exercice III.4. Puissance dissipée dans une résistance

On considère un générateur (e, r) aux bornes duquel est branchée une résistance R .

1°/ Calculer la puissance dissipée dans la résistance R .

2°/ Pour quelle valeur de R , cette puissance est maximale

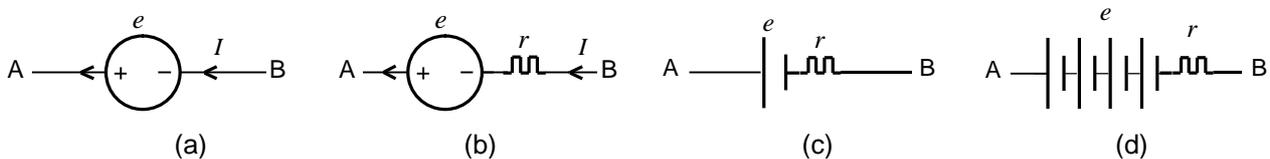
Solution III.4 1°/ La puissance dissipée dans la résistance R s'écrit :

$$P = RI^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{e}{r + R} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Re^2}{(R + r)^2}$$

$$2^\circ / \text{ Cette puissance est maximale si } \frac{dP}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = r \quad \Rightarrow \quad P_{\text{Max}} = \frac{e^2}{4r}$$

Schéma équivalent d'un générateur.

Générateur de tension idéal : un générateur de tension idéal ne possède pas de résistance interne ; il délivre une tension égale à sa f.é.m e quelque soit le courant débité. Il est modélisé par le schéma de la figure III.11.a:



Figures III. 11

Générateur de tension réel : un générateur de tension réel est modélisé par la mise en série d'un générateur de tension idéal et d'une résistance r appelée résistance interne du générateur. (voir la figure III.11.b). Dans ce qui suit, on ne considère que des piles (schéma c) ou des batteries d'accumulateurs⁸ (schéma d).

⁸ La différence entre une pile et un accumulateur est que ce dernier peut être rechargé, alors qu'une pile, une fois déchargée, ne peut plus être utilisée.

Noter que le courant électrique entre par la borne négative et ressort par la borne positive du générateur.

4. 4. Association de générateurs.

Association en série

Soient N générateurs (e_i, r_i) montés en série, c'est-à-dire de façon que le pôle positif du $i^{\text{ème}}$ générateur soit relié au pôle négatif du $(i + 1)^{\text{ème}}$ générateur. La figure III.12, qui représente ce montage dans le cas de N piles, montre qu'un seul et même courant I traverse chacun d'eux.

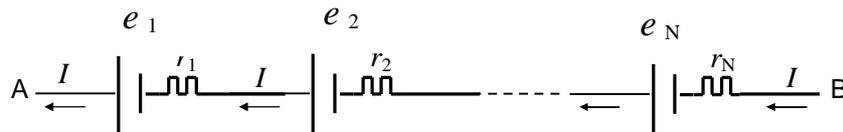


Figure III.12

La différence de potentiel aux bornes du $i^{\text{ème}}$ générateur s'écrit : $V_{i+} - V_{i-} = e_i - r_i I$
 La différence de potentiel aux bornes de l'ensemble des générateurs s'écrit :

$$V_A - V_B = (e_1 + e_2 + \dots + e_N) - (r_1 I + r_2 I + \dots + r_N I) = e - r I$$

Cette différence de potentiel correspond à celle d'un générateur unique de f.é.m e et de résistance interne r , tel que :

$$\begin{cases} e = e_1 + e_2 + \dots + e_i + \dots + e_N \\ r = r_1 + r_2 + \dots + r_i + \dots + r_N \end{cases} \quad (44)$$

Si plusieurs générateurs sont associés en série, leurs forces électromotrices et leurs résistances s'ajoutent.

Une telle association présente un avantage et un inconvénient. Son avantage réside dans l'obtention d'une f.é.m plus grande que celles des générateurs utilisés. La valeur importante de la résistance interne du générateur équivalent obtenu présente l'inconvénient de ce type d'association.

Association en parallèle

Soient N générateurs (piles) identiques (e, r) montés en parallèle. La figure 13 montre que le générateur équivalent débite un courant d'intensité I égale à la somme des intensités que débite chaque générateur

$$I = \sum_{i=1}^N I_i \quad (45)$$

La différence de potentiel entre les bornes A et B est :

$$V_A - V_B = e - r \frac{I}{N} = e - \left(\frac{r}{N} \right) I$$

La résistance interne du générateur équivalent est N fois plus faible que celle de chaque générateur.

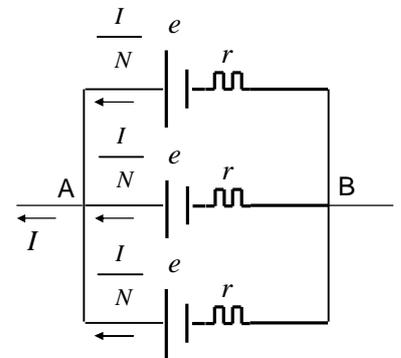


Figure III. 13.

5. RECEPTEURS.

Les récepteurs sont des systèmes qui, parcourus par un courant électrique, transforment l'énergie électrique sous une autre forme d'énergie. Les récepteurs actifs fournissent de l'énergie mécanique, chimique, lumineuse etc... Par contre, les récepteurs passifs, comme les résistances, dissipent l'énergie absorbée sous forme de chaleur.

5.1. Force contre électromotrice "f.c.é.m" d'un récepteur.

Un récepteur exerce sur les charges électriques qui le traversent, une force résistante. Celle-ci est due à un *champ contre électromoteur* \vec{E}_C . Le travail de ce champ donne naissance à une force contre électromotrice e' , exprimée par le rapport entre l'énergie électrique transformée par le récepteur et la quantité de charge Q qui le traverse pendant un temps t .

5.2. Schéma équivalent d'un récepteur.

Comme pour les générateurs, un récepteur peut être modélisé comme suit :

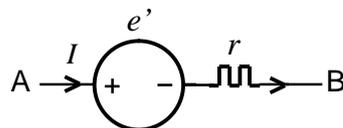


Figure III. 14

Dans un récepteur, le courant entre par la borne positive de ce dernier et sort par sa borne négative.

- e' représente la f.c.é.m du récepteur.
- r est sa résistance interne.

5.3. Différence de potentiel "d.d.p" aux bornes d'un récepteur.

Un récepteur placé dans un circuit parcouru par un courant I , reçoit du reste du circuit une puissance totale égale au produit de la différence de potentiel $V_A - V_B$ à ses bornes par le courant I qui le parcourt. Elle s'écrit : $P = (V_A - V_B) I$. Une partie de cette puissance est dissipée par effet Joule à l'intérieur du récepteur et a pour expression : rI^2 . L'autre partie est transformée sous une autre forme, elle s'écrit : $e'I$. Le principe de conservation de l'énergie nous permet d'écrire :

$$(V_A - V_B) I = e'I + rI^2$$

Soit : $(V_A - V_B) = e' + rI$

5.4. Rendement d'un récepteur.

Comme pour les générateurs, on définit le rendement η d'un récepteur comme étant le rapport entre la puissance utilisable qu'il délivre ($e'I$) et la puissance qu'il consomme $(V_A - V_B) I$. Il s'écrit :

$$\eta = \frac{e'I}{(V_A - V_B)I} = \frac{e'}{(V_A - V_B)}$$

6. ANALYSE D'UN RESEAU ELECTRIQUE.

6. 1. Définitions.

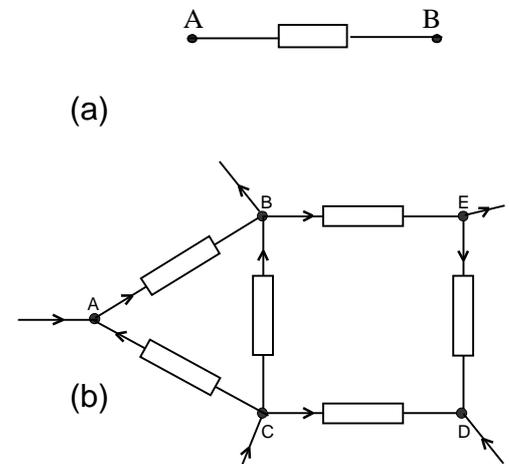
Dipôle: un dipôle est un élément électrique qui possède une borne d'entrée et une borne de sortie. Il est qualifié d'actif lorsqu'il fournit de l'énergie (cas d'un générateur) et de passif lorsqu'il en consomme. (figure III.15.a)

Réseau: est un circuit complexe constitué d'un ensemble de dipôles (résistances, générateurs, récepteurs...) reliés entre eux (figure III.15.b)

Nœud: on appelle nœud, un point tel que A, où aboutissent au moins trois dipôles du réseau.

Branche: une branche est une portion du réseau telle que AB, comprise entre deux nœuds.

Maille: une maille du réseau est constituée par un ensemble de branches, formant un circuit fermé tel que ABC.



Figures III.15

6. 2. Lois de Kirchhoff.

Etablies en 1845 par le physicien allemand Gustav Kirchhoff, ces lois, au nombre de deux, expriment la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique.

Loi des nœuds

Aux nœuds A, B, C, de la figure 15.b, on applique le principe de la conservation de la charge électrique. En effet, les charges ne peuvent pas s'accumuler en un point quelconque du circuit, donc :

La somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en ressortent.

C'est la première loi de Kirchhoff :

Dans le cas de la figure III.16, on a :

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Cette loi peut être traduite mathématiquement par l'expression :

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (46)$$

où I_i désigne la valeur algébrique du $i^{\text{ème}}$ courant. Cette valeur est affectée du signe (+) si le courant arrive au nœud considéré et du signe (-) s'il s'en éloigne.

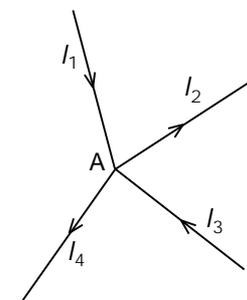


Figure III.16.

Loi des mailles

Elle constitue une généralisation de la loi d'Ohm :

$$\sum (e - RI) = 0 \quad (47)$$

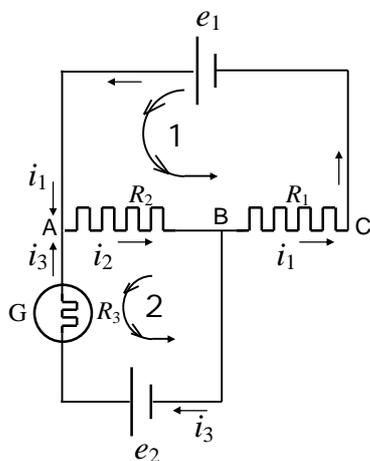
On procède de la manière suivante :

On choisit, sur chaque branche, un sens du courant arbitraire. On choisit un sens de parcours de la maille arbitraire. Chaque terme RI est affecté d'un signe (+) si le sens du parcours choisi coïncide avec le sens du courant. Sinon on l'affecte du signe (-).

La f.é.m. (ou f.c.é.m) e est affectée du signe du pôle par lequel on sort du générateur (ou du récepteur).

Exercice III. 5. Méthode d'opposition

On considère le montage représenté sur la figure, où e_1 et e_2 désignent les f.é.m de deux



piles électriques, R_1 et R_2 deux résistances variables. Un galvanomètre G très sensible, de résistance interne R_3 , est placé en série avec la deuxième pile sur la branche AB.

1°) Calculer le courant i_3 qui traverse le galvanomètre.

A.N. $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$, et $R_3 = 0,01 \Omega$,

$e_1 = 3$ volts et $e_2 = 3,2$ volts.

2°) On remplace la deuxième pile par une pile dont on veut mesurer la force électromotrice e_x . puis on fait varier les résistances R_1 et R_2 jusqu'à ce que le galvanomètre indique $i_3 = 0$. Les valeurs des résistances sont, dans ce cas, $R_1 = 750 \Omega$, et $R_2 = 360 \Omega$. Calculer la f.e.m de la nouvelle pile.

Solution III. 5. 1°) Les sens des courants et des parcours des mailles étant choisis arbitrairement comme l'indique la figure, on applique :

La loi des nœuds en A :

$$i_1 + i_3 = i_2$$

La loi des mailles :

$$\sum (e - Ri) = 0$$

Maille 1 :

$$e_1 - R_2 i_2 - R_1 i_1 = 0$$

Maille 2 :

$$-e_2 + R_3 i_3 + R_2 i_2 = 0$$

On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues d'où :

$$i_3 = \frac{-R_2 e_1 + (R_1 + R_2) e_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = 6,6 \text{ mA}$$

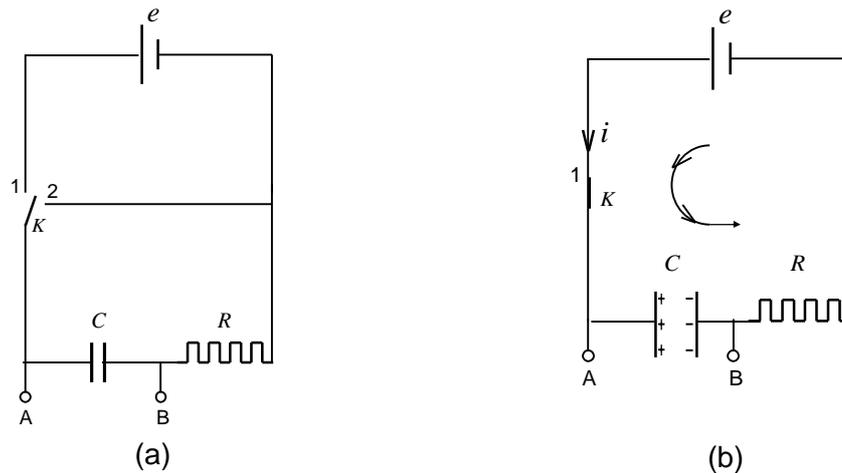
2°) On remplace, dans le résultat précédent, e_2 par e_x . A l'équilibre $i_3 = 0$

$$e_x = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_1 = 0,97 \text{ volts}$$

7. CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR.

Dans les paragraphes précédents, les grandeurs électriques considérées (intensité du courant électrique, différence de potentiel...) étaient supposées indépendantes du temps : elles appartiennent au domaine des régimes permanents ou stationnaires.

Dans ce qui suit, nous considérons le régime transitoire ou lentement variable (c'est à dire une succession de régimes stationnaires), pour lequel on suppose qu'à chaque instant t , la loi d'Ohm reste valable : c'est le cas de la charge et de la décharge d'un condensateur.



Figures III.17

Considérons le circuit de la figure III.17.a, formé d'un générateur idéal de f.é.m e , d'une résistance R , d'un interrupteur K et d'un condensateur de capacité C initialement déchargé.

7.1. Etude de la charge du condensateur.

L'interrupteur K est en position 1 : dès que l'interrupteur K est mis en position 2, un courant i commence à circuler dans le circuit de la figure III.17.b En effet, les électrons quittent la borne négative du générateur, traversent la résistance R et s'accumulent sur la plaque B du condensateur. La plaque A se charge alors positivement par phénomène d'influence.

Au fur et à mesure que le condensateur se charge, le courant i diminue jusqu'à ce que la d.d.p entre les armatures du condensateur soit égale à la f.é.m du générateur. Un régime d'équilibre est alors atteint lorsque i devient égal à zéro.

Afin d'établir l'équation de la charge du condensateur, on applique la deuxième loi de Kirchhoff à la maille du circuit de la figure III.17.b. On obtient alors,

$$V_c + Ri(t) - e = 0$$

où :

$$V_c = \frac{q(t)}{C}$$

est la d.d.p entre les armatures du condensateur

et
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

l'intensité du courant qui circule dans le circuit pendant la charge.

Soit
$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = e \quad (48)$$

C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre avec second membre. En utilisant la même méthode⁹ qu'au § 1.8, avec les conditions initiales

$$\begin{cases} t=0s \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow K = \ln(Ce) \quad (49)$$

on trouve les expressions de la quantité de charge $q(t)$ et du courant $i(t)$:

$$q(t) = Ce \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right) \quad (50)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (51)$$

La grandeur RC que l'on notera τ , a la dimension d'un temps et est appelée "*constante de temps du circuit*".

A partir des graphes représentant Les évolutions en fonction du temps de $q(t)$ et $i(t)$ (figures III.18), plusieurs constatations émergent, à savoir :

⁹ Voici une autre méthode pour résoudre l'équation (48). On peut l'écrire sous la forme:

$$\frac{dq}{q - Ce} = -\frac{dt}{RC}$$

En intégrant cette équation, on obtient :

$$\int \frac{dq}{q - Ce} = \int -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln(|q - Ce|) = -\frac{t}{RC} + K \quad (52)$$

A la fin de la charge, le condensateur aura accumulé une quantité de charge q telle que :

$$V_c = \frac{q}{C} = e.$$

La charge q accumulée à un instant quelconque t est inférieure à Q . L'équation (52) devient alors :

$$\ln(Ce - q) = -\frac{t}{RC} + K \quad (53)$$

Où K est une constante d'intégration, qu'on peut facilement déterminer à partir des conditions initiales. En effet,

$$\begin{cases} t=0s \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow K = \ln(Ce)$$

Lorsqu'on remplace dans l'équation (53), K par cette valeur, on obtient :

$$\ln\left(1 - \frac{q}{Ce}\right) = -\frac{t}{RC}$$

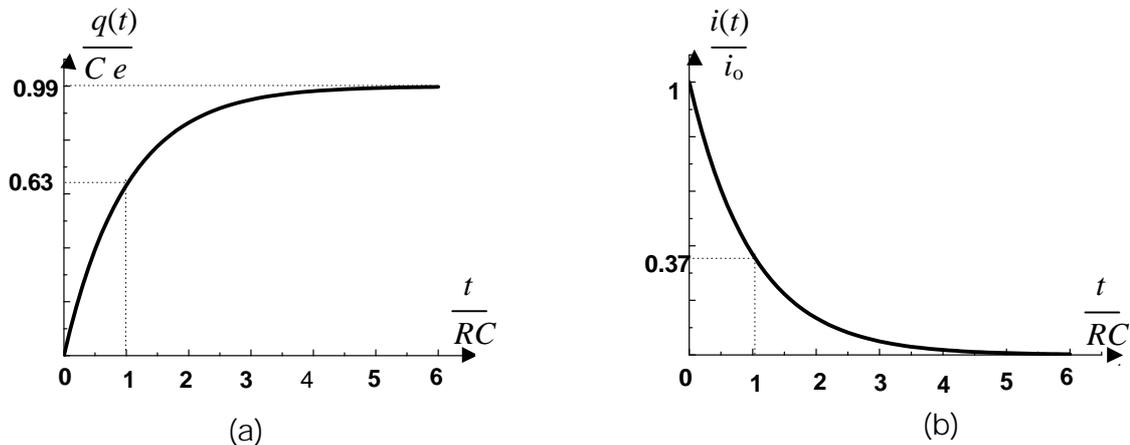
D'où l'expression de la quantité de charge $q(t)$:

$$q(t) = Ce \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right)$$

La constante de temps $\tau = RC$ représente le temps nécessaire pour que le condensateur atteigne 63% de sa charge totale. Donc, τ permet la mesure de la vitesse à laquelle le condensateur se charge.

Un condensateur ne se charge pas instantanément lorsqu'on le relie à un générateur.

- La charge q n'atteint jamais tout à fait la valeur maximale Ce . En effet, au bout d'une durée égale à 5τ , le condensateur atteindra 99% de sa charge finale.



Figures III. 18

Pratiquement, la charge finale d'un condensateur est atteinte au bout d'une durée de 5τ : c'est la durée du régime transitoire.

- A $t = 0$ s, le courant i vaut $i_0 = \frac{e}{R}$ (la d.d.p. entre les armatures du condensateur est nulle). Il diminue d'une façon exponentielle avec le temps, et au bout d'une durée égale à τ , il atteint 37% de sa valeur initiale.

Ordre de grandeur de la constante de temps τ : pour un condensateur de capacité $C = 1\mu F$ et une résistance $R = 200\Omega$ on a une constante de temps $\tau = RC = 2 \cdot 10^{-4}$ s.

En général, un condensateur se charge totalement en un temps très court.

Bilan d'énergie

Après multiplication des membres de l'équation (48) par $idt = dq$, il vient :

$$Ri^2 dt = e dq - \frac{1}{C} q dq \quad (54)$$

D'où,

$$\int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^{Ce} e dq - \int_0^{Ce} \frac{1}{C} q dq$$

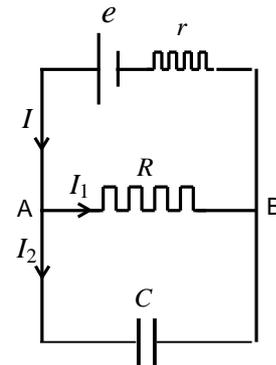
Ce qui donne :

$$\int_0^\infty Ri^2 dt = Ce^2 - \frac{1}{2} Ce^2 \begin{cases} Ce^2 & = \text{énergie fournie par le générateur} \\ \frac{1}{2} Ce^2 & = \text{énergie emmagasinée par le condensateur} \end{cases}$$

L'énergie dissipée par effet Joule dans R est donc égale à $\frac{1}{2} Ce^2$

Exercice III.6.

Soit le circuit de la figure ci-contre, constitué d'un générateur réel (e, r), d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C .



Sachant qu'à $t=0s$, le condensateur était complètement déchargé :

1°/ Ecrire l'équation différentielle qui régit la charge du condensateur. En déduire l'expression de $q(t)$.

2°/A quel instant on peut dire que le condensateur s'est totalement chargé?

3°/Calculer les courants qui circulent dans ce circuit en régime permanent

A.N : $E = 5 \text{ V}$, $r = 50 \Omega$, $R = 5 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \mu \text{ F}$

Solution III. 6.

1°/ On applique la première loi de Kirchhoff au nœud A : $I = I_1 + I_2$ (a)

La différence de potentiel, entre les points A et B, est :

$$V_{AB} = e - rI \quad (b), \quad V_{AB} = RI_1 \quad (c) \quad \text{et} \quad V_{AB} = \frac{1}{C}q \quad (d)$$

$$\text{Or} \quad I_2 = \frac{dq}{dt} \quad (e), \quad (c) \Rightarrow I_1 = \frac{V_{AB}}{R} \quad \text{avec} \quad (d) \quad I_1 = \frac{1}{RC}q \quad (f)$$

A partir de (a), (e) et (f), il vient :

$$I = \frac{1}{RC}q + \frac{dq}{dt} \quad (g)$$

$$(b) \Rightarrow I = \frac{e - V_{AB}}{r} \quad \text{et avec} \quad (d) \quad I = \frac{e}{r} - \frac{q}{rC} \quad (h)$$

A partir de (g) et (h) on obtient :

$$\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) \frac{1}{C} q = \frac{e}{r} \quad \text{ou bien} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau} q = \frac{e}{r} \quad (j)$$

où : $\tau = \frac{rR}{r+R} C = 49,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ est le temps de relaxation.

La solution générale de l'équation (j) est :

$$q(t) = \frac{e}{r} \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad \text{avec} \quad q_0 = \frac{e}{r} \tau = 4.95 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2°/ Calculons la valeur de la charge pour différentes valeurs de t :

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	5τ
q/q_0	0.63	0.86	0.95	0.98	0.993	0.997	0.999

A l'instant $t = 5\tau$, le condensateur peut être considéré complètement chargé

3°/ En régime permanent, on a :

$$I_2 = 0 \text{ mA} \quad \text{et} \quad I = I_1 = \frac{e}{r+R} = 0.99 \text{ mA}$$

7.2. Etude de la décharge du condensateur .

Le condensateur ayant atteint sa charge finale $C e$, plaçons l'interrupteur K (Figure III.17.a) en position 2.

Il en résulte un courant i en provenance de la plaque du condensateur chargée positivement. Il se dirige vers l'autre plaque en traversant la résistance R (figure III.19).

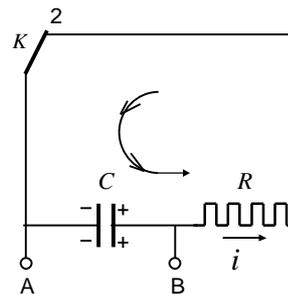


Figure III.19

Afin d'établir l'équation de la décharge du condensateur, on écrit la loi de la maille du circuit de la figure III.19, en choisissant comme sens positif de parcours de la maille, le sens réel du courant. On obtient alors,

$$V_c = Ri(t) \text{ avec } \begin{cases} V_c = \frac{q}{C} = \text{d.d.p entre les armatures du condensateur} \\ i(t) = -\frac{dq}{dt} > 0 \text{ (on a une diminution de la charge, } (dq < 0)) \end{cases}$$

L'équation ci-dessus devient :

$$\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt} \tag{55}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, sans second membre.

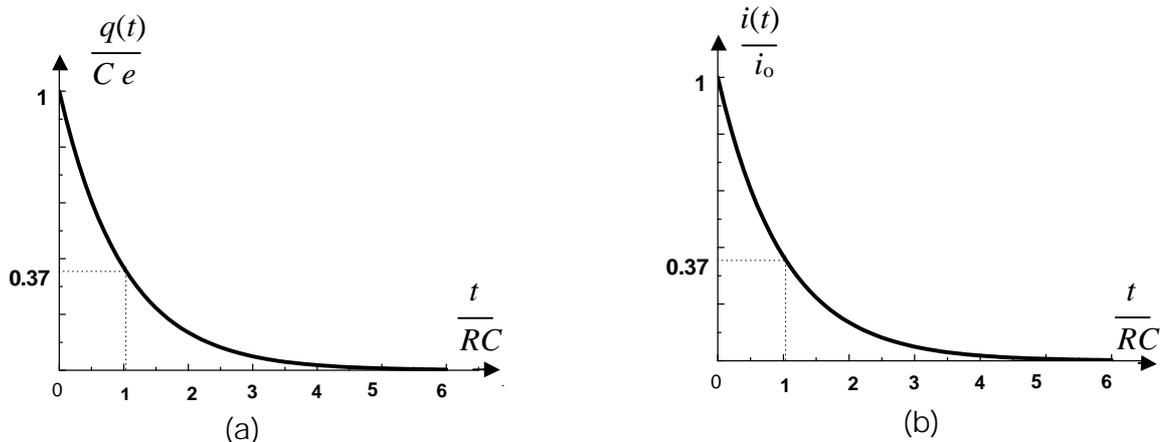
En tenant compte des conditions initiales ($t = 0s, q = C e$), l'équation (55) aura pour solution :

$$q(t) = C e \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{56}$$

Le courant de décharge est directement déduit à partir de l'équation (56). Il s'écrit :

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{e}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{57}$$

Les évolutions de $q(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps sont représentées par les graphes de la figure III.20.



Figures III.20

Il est à noter que dans ce cas, le condensateur perd au bout d'une durée égale à τ , 63% de sa charge initiale.

Exercices : Chapitre III

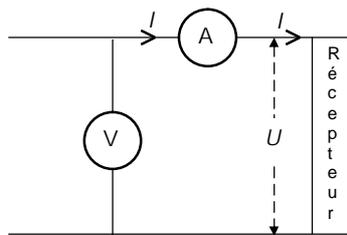
Exercice III.7. Calcul d'une résistance.

Calculer l'expression de la résistance d'un conducteur, homogène de conductivité σ , dont les faces sont des sphères concentriques, de rayons r_1 et r_2 , soumises à une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$.

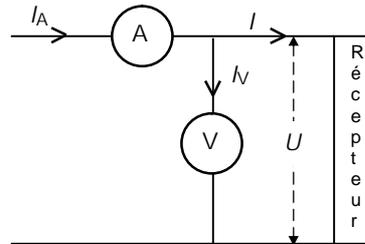
Exercice III. 8. Montage amont, montage aval.

1°) Mesure de puissance : Pour mesurer la puissance électrique P consommée par un récepteur, il suffit d'utiliser un ampèremètre et un voltmètre. On obtient la puissance mesurée P_m en multipliant les indications I_A et V de ces deux appareils. Dans ce problème on utilise un ampèremètre de résistance interne $R_A = 0,5 \Omega$ et un voltmètre de résistance $R_V = 50 \text{ k}\Omega$. Calculer la puissance P et l'erreur systématique¹⁰ que l'on commet lorsque le voltmètre est placé en amont de l'ampèremètre et du récepteur ; les indications des deux appareils sont : $V = 250,25 \text{ V}$ et $I = 500 \text{ mA}$.

Même question lorsqu'il est placé en aval ; on lit, à présent, $V = 250 \text{ V}$ et $I = 505 \text{ mA}$.



Montage amont



Montage aval

U est la tension aux bornes du récepteur.

2°) Mesure d'une résistance : pour mesurer une résistance électrique, on peut utiliser la méthode précédente avec un ampèremètre et un voltmètre. Le récepteur est une résistance pure R . Calculer R et l'erreur systématique que l'on commet dans le montage amont puis dans le montage aval. (Utiliser les mêmes valeurs numériques que dans la 1^{ère} question).

Exercice III. 9. Shunt d'un ampèremètre.

Un ampèremètre est un appareil de mesure dont la résistance R_A de l'élément moteur ne peut supporter que de faibles intensités I_A de l'ordre de quelques milliampères. Pour mesurer des intensités I plus importantes, on ne fait passer dans l'élément moteur qu'une faible fraction I_A du courant I . L'autre partie I_S est dérivée vers une résistance R_S placée en parallèle aux bornes de R_A . R_S est appelée shunt.

1°) Le facteur multiplicateur n d'un shunt est le nombre par lequel il faut multiplier I_A pour avoir le courant à mesurer I . Montrer que :

$$n = 1 + \frac{R_A}{R_S}$$

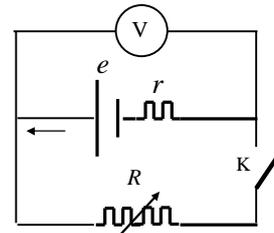
2°) L'indication d'un ampèremètre shunté indique $I_A = 35 \text{ mA}$, le facteur multiplicateur du shunt est $n = 100$, calculer le courant I et la résistance R_S du shunt si $R_A = 4 \Omega$.

¹⁰ Une erreur systématique est due à une cause bien déterminée et se produit dans un même sens.

Une erreur aléatoire est due à une cause mal définie. Ces erreurs varient en fonction du temps et se répartissent de part et d'autre d'une valeur moyenne.

Exercice III. 10. Résistance interne d'une pile.

Pour mesurer la résistance interne r d'une pile de f.e.m e , on utilise le dispositif de la figure ci-dessous où K désigne un interrupteur, R une résistance variable fixée à 6Ω , et V un voltmètre de résistance interne r_V .



Lorsque K est ouvert, le voltmètre indique $V_1 = 4,5$ volts et lorsqu'il est fermé la tension indiquée est $V_2 = 3$ volts

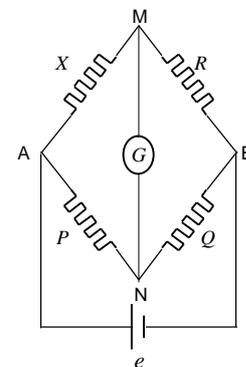
1°) Exprimer la valeur de la résistance interne r en fonction de R , V_1 et V_2 lorsque r_V est supposée infinie.

2°) Evaluer l'erreur $\Delta r/r$ sachant que $\Delta R/R = 1\%$ et que l'erreur ΔV qui résulte de la précision du voltmètre est la même le long de l'échelle des graduations. Sur le calibre utilisé (7,5 volts), l'erreur maximale garantie par le constructeur est $\Delta V = 0,02$ volt.

3°) Calculer l'erreur systématique due à la présence, dans le circuit, du voltmètre, sachant que sa résistance interne $r_V = 1.500 \Omega$.

Exercice III. 11. Pont de Wheatstone.

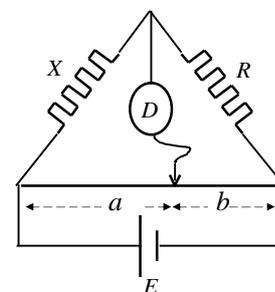
Le pont de Wheatstone, représenté sur la figure ci-contre, est constitué par quatre résistances formant un quadrilatère sur les diagonales desquelles on a placé d'une part un galvanomètre G et d'autre part une source de courant continu e . X est la résistance à mesurer, R une résistance étalon, P et Q deux résistances variables.



A l'équilibre, le galvanomètre indique un courant nul ($i = 0$) Exprimer, à l'équilibre, la résistance inconnue X en fonction de R , P et Q .

Exercice III. 12. Pont à fil. Erreurs liées.

Pour mesurer une résistance inconnue X on utilise, comme le montre la figure ci-contre, un pont de Wheatstone à fil calibré, de longueur L .



1°) Exprimer la résistance X en fonction des résistances a , b , et R .

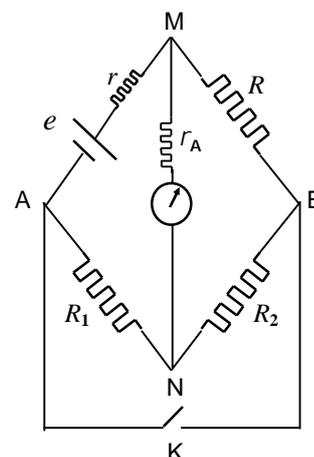
2°) Calculer l'erreur $\varepsilon = \Delta X/X$. On ne tient pas compte de l'erreur d'indétermination du zéro

3°) Quelle est la position du curseur qui correspond à la valeur minimale de l'erreur ε ?

A.N. $L = 60$ cm, $a = (23 \pm 0, 1)$ cm, $R = (1 \pm 0,01) \Omega$.

Exercice III. 13. Pont de Mance.

Dans le but de mesurer la résistance interne r d'une pile, de force électromotrice e , on utilise le pont de Mance représenté sur la figure ci-contre. R est une résistance étalon, R_1 et R_2 deux résistances réglables.



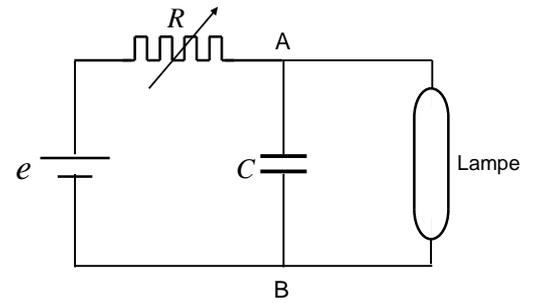
1°) Déterminer l'intensité du courant qui circule dans le milliampèremètre, inséré dans la branche AB , lorsque l'interrupteur K est

- a) ouvert
- b) fermé.

2°) Quelle relation doit exister entre les quatre résistances r , R_1 , R_2 et R , pour que le courant soit le même dans les deux cas. En déduire l'expression de la résistance interne r de la pile.

Exercice III. 14. **Oscillations de relaxation.**

L'oscillateur, représenté sur la figure ci-contre, comporte un générateur de courant continu de f.e.m e qui alimente un condensateur de capacité C à travers une résistance variable R . Une lampe à néon est branchée aux bornes du condensateur entre lesquelles la tension est $u(t)$. Cette lampe ne fonctionne qu'à partir d'une tension d'amorçage U_A et s'éteint à la tension de désamorçage U_D .



La lampe se comporte comme une faible résistance r lorsqu'elle s'allume et comme une résistance infinie lorsqu'elle est éteinte.

1°) La lampe est éteinte : $u(t) < U_A$. Exprimer la tension $u(t)$ en fonction de t , e et de la constante de temps $\tau = RC$.

2°) La lampe est allumée : $U_D < u(t) < U_A$. Exprimer $u(t)$ en fonction de t , e , r et C .

3°) Tracer la courbe représentative de la fonction $u(t)$.

4°) Montrer que, si l'on néglige la durée de la décharge du condensateur, la période de cet oscillateur est :

$$T = RC \operatorname{Log} \left(\frac{e - U_D}{e - U_A} \right)$$

5°) On veut réaliser avec le dispositif précédent, où $e = 110 \text{ V}$, $C = 0,8 \mu\text{F}$, $U_A = 90 \text{ V}$ et $U_D = 40 \text{ V}$,

a) un feu clignotant : on règle alors la résistance de façon à avoir $R = 500 \text{ k}\Omega$. Quelle est la fréquence des éclairs lumineux ?

b) un stroboscope¹¹ : quelle doit-elle la valeur de R si on veut vérifier la vitesse de rotation d'un moteur dont la plaque signalétique indique 3000 tours par minute

¹¹ Un stroboscope est une source de lumière qui envoie des éclairs à fréquence réglable. Pour mesurer la vitesse de rotation de l'arbre d'un moteur, on effectue la mesure lorsque la période des éclairs est égale à celle de la période de rotation de l'arbre. A ce moment un trait tracé sur l'arbre paraît immobile.

Chapitre IV

MAGNÉTOSTATIQUE

Nous avons étudié, au premier chapitre, l'interaction électrique qui intervient entre deux corps électrisés. Nous allons considérer, à présent, une autre interaction, l'interaction magnétique, qui fait intervenir le champ magnétique. La magnétostatique est la partie du magnétisme qui ne fait intervenir que des phénomènes indépendants du temps.

1. INTRODUCTION.

1. 1. Propriétés des aimants.

Dès l'antiquité les grecs avaient remarqué qu'une pierre de Magnésie¹, la magnétite, avait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer : d'où le mot magnétisme. Comme pour l'électricité (Ch I § 1.9), la contribution des grecs à l'étude du magnétisme fut purement linguistique.

Puis on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités : les *pôles*. Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, pôle nord et pôle sud, sont différents.

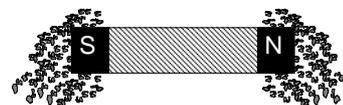
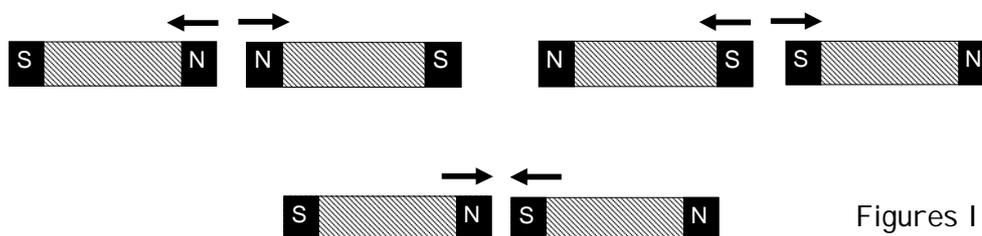


Figure IV.1

L'expérience montre que :

Deux pôles de même nom se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.



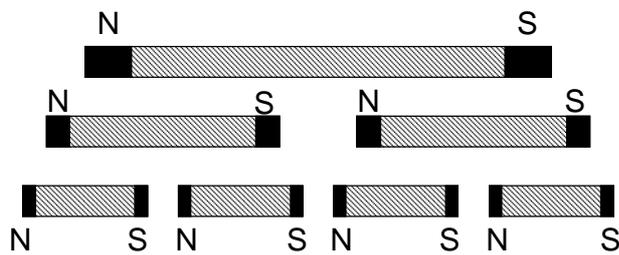
Figures IV.2

Au début du moyen âge, les chinois utilisèrent les propriétés de certains corps magnétiques et inventèrent les *premières boussoles*. Ce fut la première application du magnétisme.

¹ Magnésie : région de la Grèce antique en Asie Mineure (actuellement en Turquie)

L'expérience de l'aimant brisé montre que :

Il est impossible de séparer le pôle nord du pôle sud d'un aimant.



Figures IV.3

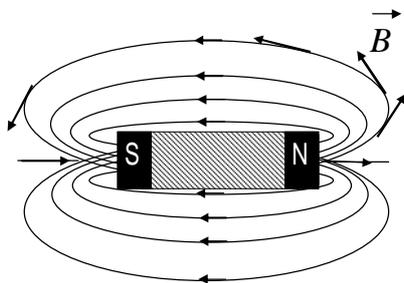
En effet si on casse un aimant en deux parties, on obtient deux autres petits aimants ayant chacun un pôle nord et un pôle sud. Si on répète cette opération, on obtient, à chaque fois, des aimants de plus en plus petits dotés chacun d'un pôle nord et d'un pôle sud.

1.2. Champ magnétique.

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un *champ magnétique* de la même manière qu'un champ gravitationnel existe au voisinage de la terre et un champ électrique autour d'une charge électrique. De même il existe, comme nous allons le voir, au voisinage d'un circuit électrique un champ magnétique.

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force.

Comme en électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique² noté \vec{B} . Ce vecteur est tangent aux lignes de champ.



Figures IV.4

Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud.

Dans le système M.K.S.A rationalisé, le champ magnétique est mesuré en *tesla* (T)³, en hommage au savant serbe Nikola Tesla (1856-1943), inventeur de l'alternateur.

Historiquement le concept de champ est d'abord introduit en magnétisme. Faraday, en répandant de la limaille de fer au voisinage d'un aimant, constate que les grains de fer s'orientent et forment une figure, puis ce concept est étendu à l'électricité (voir ch I).

² Il y a une différence entre le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} (voir le § 4.1.)

³ Voir l'annexe 4.

1.3. Force de Coulomb.

En 1885, Coulomb trouve, à l'aide de sa balance de torsion, une loi, analogue à celle de l'électrostatique⁴ qui donne la force d'interaction entre deux aimants selon le modèle newtonien. Il introduit alors le concept de masse magnétique. Mais cette théorie, étudiée jusqu'au milieu du vingtième siècle, a été abandonnée.

1.4. L'expérience d'Oersted et ses conséquences.

A la fin du dix huitième siècle, outre l'interaction gravitationnelle, on connaissait l'interaction électrique et l'interaction magnétique (action entre deux aimants). En 1820, Oersted découvre l'action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée. Cette découverte, rendue possible grâce à l'invention en 1800 de la pile électrique par Volta, va permettre aux savants du dix neuvième siècle, de développer une nouvelle science : l'électromagnétisme.

Dès 1820, Biot et Savart énoncent la loi qui donne la force, créée par un fil parcouru par un courant, qui agit sur le pôle d'un aimant⁵. La formule empirique de Biot a été démontrée par Laplace. A la même époque, Ampère trouve la force exercée par un aimant sur un courant (loi de Laplace). En outre, Ampère élabore une théorie qui explique le magnétisme par l'existence de courants électriques circulaires dans la matière aimantée. On comprend alors la raison pour laquelle il est impossible de séparer les deux pôles d'un aimant. Puis il démontre toutes les lois connues, celles de Coulomb, Biot et Laplace, à partir de l'interaction entre deux courants électriques. En 1905, Paul Langevin propose une théorie qui attribue le magnétisme aux mouvements des électrons qui gravitent dans l'atome sur des orbites fermées et qui correspondent aux courants circulaires imaginés par Ampère.

Au lieu de suivre l'ordre historique, et partir des lois de Biot et de Laplace, nous allons commencer par étudier l'action d'un champ magnétique sur une charge électrique en mouvement. Cette force, découverte par Lorentz, à la fin du dix neuvième siècle va nous permettre de retrouver la force de Laplace. Puis nous donnerons, sans démonstration, la loi de Biot à partir de laquelle on calcule les champs magnétiques créés par différents circuits électriques.

2. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR LE MOUVEMENT D'UNE CHARGE ELECTRIQUE.

2.1. Force de Lorentz.

A la fin du XIX^e siècle, le physicien hollandais Hendrik Lorentz donne l'expression de la force \vec{F} qui s'exerce sur une charge ponctuelle q , se déplaçant à la vitesse \vec{V} dans des champs électrique et magnétique \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (1)$$

En présence du seul champ magnétique \vec{B} ($\vec{E} = 0$), la force de Lorentz devient :

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2)$$

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en l'absence du champ électrique \vec{E} , une charge q animée d'une vitesse \vec{V} , est soumise à l'action d'une force $\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$.

⁴ Voir Ch. I § 2.1.

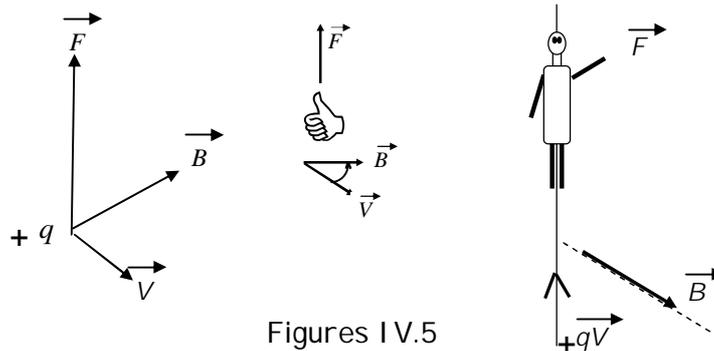
⁵ "Action de chaque élément μ du fil sur chaque molécule m de magnétisme austral ou boréal" Biot : Précis élémentaire de physique. 2^{ème} édition 1823 : Tome II p 122

Cette nouvelle définition du champ magnétique est obtenue à partir de la force de Lorentz. Cette force

- a pour module:

$$F = q V B \left| \sin(\vec{V}, \vec{B}) \right|$$

- sa direction est la perpendiculaire au plan formé par \vec{V} et \vec{B} ,
- Son sens est tel que, dans le cas d'une charge positive, les vecteurs \vec{V} , \vec{B} et \vec{F} forment un trièdre direct (règle de la main droite). Lorsque la charge est négative la force change de sens.



Figures IV.5

Le sens de cette force est également donné par la règle du bonhomme d'Ampère :

Le bonhomme d'Ampère, traversé des pieds vers la tête par la charge (+q) animée d'une vitesse V, voit fuir les lignes de champ, et a la force à sa gauche

2.2. Application : Mouvement d'une particule dans un champ magnétique.

Une particule, de masse m portant une charge électrique q , se déplace dans un champ magnétique uniforme \vec{B} avec une vitesse constante \vec{V} perpendiculaire à \vec{B} . Elle est donc soumise à une force dont l'expression, donnée en (2), est:

$$\vec{F} = q (\vec{V} \wedge \vec{B})$$

Cette force est perpendiculaire à \vec{V} et \vec{B} , et son module est:

$$F = qV B \quad (3)$$

Elle reste perpendiculaire à \vec{V} au cours du mouvement. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle. L'accélération étant centripète, le mouvement est circulaire et uniforme. La relation fondamentale de la dynamique permet d'exprimer le module de la force sous la forme:

$$F = m \frac{V^2}{R} \quad (4)$$

R est le rayon de la trajectoire circulaire. Avec (3) et (4), il vient :

$$m \frac{V^2}{R} = qV B$$

A partir de cette expression, on obtient :

- Le rayon du cercle décrit par la particule :

$$R = \frac{mV}{qB} \quad (5)$$

On note que plus le champ magnétique est intense, plus le rayon de la trajectoire est petit.

- Le module de la vitesse angulaire du mouvement $\omega = \frac{V}{R}$, qui s'écrit

$$\omega = \frac{q}{m} B, \quad (6)$$

ne dépend que du rapport q/m et de l'intensité du champ magnétique B .

Sens de la vitesse angulaire :

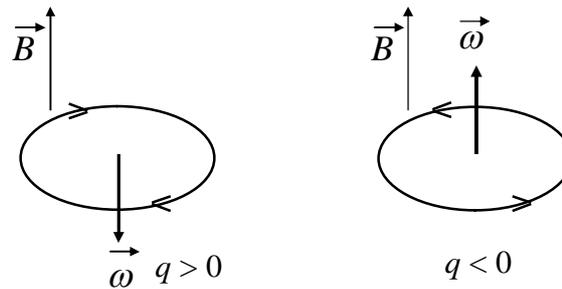
Dans un mouvement circulaire uniforme, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{\omega} \wedge \vec{V})$$

Avec (2) on a : $m(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$ soit $\vec{\omega} \wedge \vec{V} = -\frac{q}{m} \vec{B} \wedge \vec{V}$

d'où :

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} \quad (7)$$



Figures IV.6

Si la charge de la particule est positive ($q > 0$) $\vec{\omega}$ et \vec{B} sont de sens contraires.

Sinon ($q < 0$) $\vec{\omega}$ et \vec{B} ont le même sens.

Cas où la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au champ.

Dans ce cas, on décompose la vitesse en deux composantes :

$$\vec{V} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp}$$

\vec{V}_{\parallel} est parallèle à \vec{B} : cette composante n'est pas affectée par \vec{B} , la particule prend un mouvement rectiligne et uniforme.

\vec{V}_{\perp} est perpendiculaire à \vec{B} : le mouvement de la particule est, comme nous venons de le voir, circulaire et uniforme.

Le mouvement résultant est un mouvement hélicoïdal. La trajectoire est une hélice.

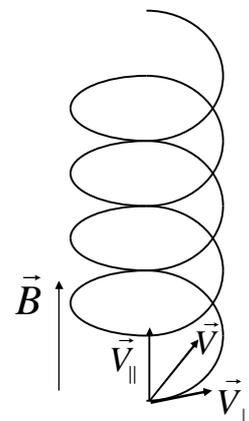


Figure IV.7

3. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR UN COURANT ELECTRIQUE.

3.1. Force de Laplace.

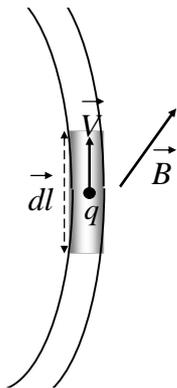
Lorsqu' un fil conducteur, parcouru par un courant I , est placé dans un champ magnétique \vec{B} , chaque élément $d\vec{l}$ du fil subit une force :

$$\vec{dF} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Cette force est perpendiculaire au plan formé par le champ \vec{B} et l'élément de courant considéré. Son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère⁶. Comme au § 2.1 :

Le bonhomme d'Ampère, parcouru par le courant I , des pieds vers la tête, a la force à sa gauche lorsqu'il regarde les lignes de champ.

Nous allons démontrer la loi de Laplace à partir de la force de Lorentz trouvée soixante dix ans après.



Considérons un élément de volume conducteur filiforme de longueur dl , de section S et parcouru par un courant I . Il est traversé à chaque instant par le même nombre N de charges et par conséquent par une même quantité infinitésimale de charges

$$dQ = Nq$$

Chaque charge $(+q)$ subit de la part du champ magnétique \vec{B} une force

$$q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

et les N charges subissent une force :

$$\vec{dF} = Nq \vec{v} \wedge \vec{B} = dQ \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (9)$$

D'autre part $dQ = Nq = \rho dl S$ et $dQ \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} dl S = I d\vec{l}$

Où ρ est la densité volumique de charges. L'expression (9) devient :

$$\vec{dF} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (10)$$

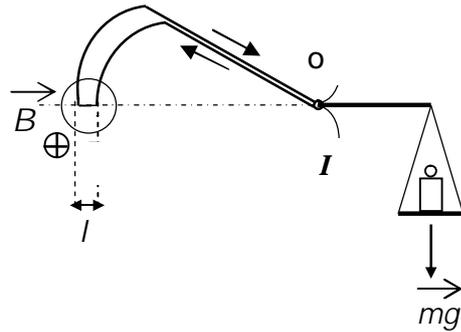
C'est l'expression de la loi de Laplace.

Exercice IV.1. Balance de Cotton

On veut mesurer l'intensité du champ magnétique B , dans l'entrefer d'un électro aimant, à l'aide de la balance de Cotton, représentée sur la figure ci-dessous. L'un des bras de la balance est constitué par un circuit électrique alimenté par un courant continu I . Il comporte deux conducteurs linéaires parallèles, deux conducteurs qui sont des secteurs circulaires centrés sur l'axe O de la balance et un conducteur linéaire de longueur l qui est horizontal lorsque la balance est à l'équilibre.

⁶ La force de Laplace est parfaitement définie à partir du produit vectoriel de la formule (10). Mais à l'époque d'Ampère on ne connaissait pas le calcul vectoriel. Ce dernier ne sera introduit qu'à la fin du 19^{ème} siècle par Gibbs et Heaviside. Il en est de même de la formule de Biot qui donne le champ magnétique.

- 1°) Dans quel sens doit-on faire circuler le courant, \vec{B} étant orienté vers l'arrière de la figure.
 2°) Calculer B sachant que : les bras de la balance ont même longueur L .
 $l = 2 \text{ cm}$, $I = 5,25 \text{ A}$, $m = 3,50 \text{ g}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Solution IV.1. 1°) Le courant doit circuler dans le sens indiqué par les flèches.
 2°) L'action sur les deux conducteurs rectilignes parallèles est nulle. Le moment des forces agissant sur les secteurs circulaires est nul car ces forces sont dirigées vers O.

A l'équilibre le moment, par rapport à l'axe de la balance, de la force de Laplace qui agit sur l , est égal et opposé à celui du poids. Les bras de la balance ayant même longueur, on a :

$$B I l = m g \quad \text{d'où} \quad B = \frac{m g}{I l} = 0,32 \text{ T}$$

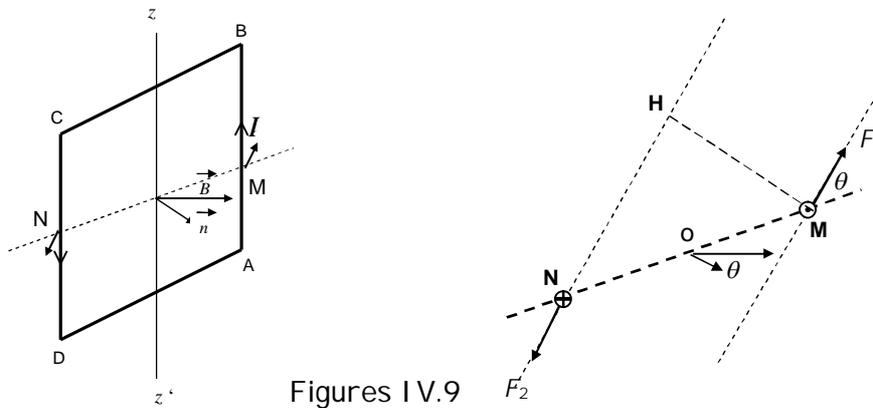
3. 2. Action d'un champ sur un circuit fermé. Moment magnétique.

On considère, pour simplifier, un circuit rectangulaire, de longueur $AB = l$ et de largeur $BC = a$, parcouru par un courant I . Ce circuit C , mobile autour d'un axe fixe zz' , est placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} , la normale à la spire C fait un angle θ avec \vec{B} .

Le côté AB est soumis, en M , à l'action d'une force de module :

$$F_1 = F = B I l$$

dont la direction est le sens sont donnés par la règle du bonhomme d'Ampère



Figures IV.9

De même CD est soumis, en N , à une force \vec{F}_2 égale et opposée à \vec{F}_1 . La résultante des forces qui agissent sur BC est nulle, il en est de même de AD .

Ainsi le circuit est soumis à un couple formé de \vec{F}_1 & \vec{F}_2 et dont le module est égal à :

$$\Gamma = F M H$$

Or

$$M H = M N \sin \theta = a \sin \theta$$

D'où: $\Gamma = I l a B \sin \theta$ On pose : $\vec{M} = I S \vec{n}$ avec $S = a l$

C'est le moment magnétique du circuit rectangulaire considéré.

Le couple, qui agit sur ce circuit, s'écrit

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (11)$$

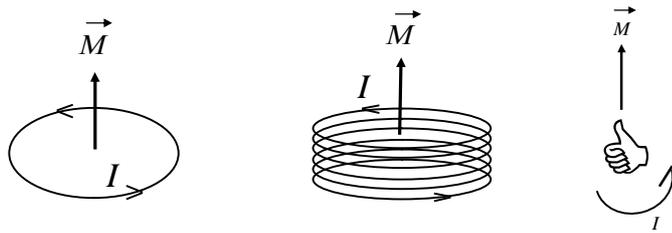
Ce résultat est général.

Un circuit, comportant N spires de surface S , parcouru par un courant I , possède un moment magnétique :

$$\vec{M} = N I S \vec{n} \quad (12)$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire porté par la normale aux spires.

Le moment magnétique est mesuré en ampère mètre carré (A.m²)



Figures IV.10

Placé dans un champ magnétique \vec{B} , le circuit est soumis à un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Moment magnétique d'un aimant.

De même une aiguille aimantée, ou un barreau aimanté sont caractérisés par leur moment magnétique \vec{M} .

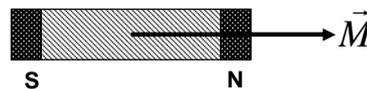


Figure IV.11

Placé dans un champ magnétique \vec{B} , l'aimant est soumis à un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

3.3. Energie d'un circuit placé dans un champ magnétique.

On montre⁷ que l'énergie potentielle d'un circuit parcouru par un courant I , de moment magnétique

$$\vec{M} = I S \vec{n}$$

placé dans un champ magnétique \vec{B} est :

$$E_p = - \vec{M} \cdot \vec{B} \quad (13)$$

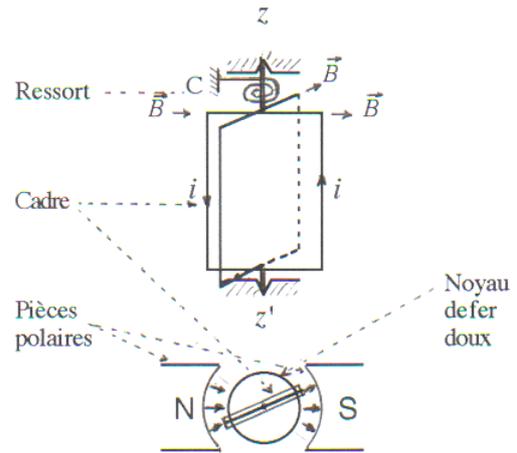
De même l'énergie d'un aimant de moment \vec{M} est :

$$E_p = - \vec{M} \cdot \vec{B}$$

⁷ Considérer, à titre d'exercice, le cas d'un cadre rectangulaire parcouru par un courant (Voir § 3.2)

Exercice IV.2. Un élément moteur magnéto-électrique comporte un cadre mobile, constitué de N spires rectangulaires de longueur l , et de largeur $2a$.

Ce cadre tourne autour d'un axe zz' . Il est parcouru par un courant i et il est plongé dans un champ magnétique \vec{B} radial créé par un aimant permanent dont la forme est indiquée sur la figure ci-contre.



1°) Calculer le couple moteur Γ_m , qui agit sur le cadre.

2°) Ce couple moteur est équilibré par un couple de rappel Γ_r dû à un ressort de constante C . Montrer que le courant i est proportionnel à la rotation du cadre α .

A.N. $B = 0,3 \text{ T}$; $a = 0,5 \text{ cm}$; $l = 2 \text{ cm}$; $i = 10 \text{ mA}$; $C = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ N.m/rad}$; $N = 200$.

Solution IV.2. 1°) Le moment, par rapport à l'axe de rotation, des forces de Laplace qui agissent sur les côtés horizontaux du cadre, est nul. Le champ étant radial, quelque soit la position du cadre, les forces, qui agissent sur chaque côté vertical, sont perpendiculaires au plan du cadre et ont même module :

$$F_1 = F_2 = Bil \quad \text{et sont opposées} \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Elles forment un couple dont le moment par rapport à $z'z$, pour les N spires, est :

$$\Gamma_m = N Bil(2a) = NBSi$$

où S est la surface d'une spire.

2°) A l'équilibre ce couple moteur est égal et opposé au couple de rappel $\Gamma_r = -C\alpha$ exercé par le ressort. D'où

$$\alpha = \frac{NBS}{C} i = 0,52 \text{ rad} \quad \text{soit} \quad \alpha \approx 30^\circ$$

Exercice IV.3. On veut mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_0 à l'aide d'un pendule formé d'un barreau magnétique de moment magnétique M et de masse m .

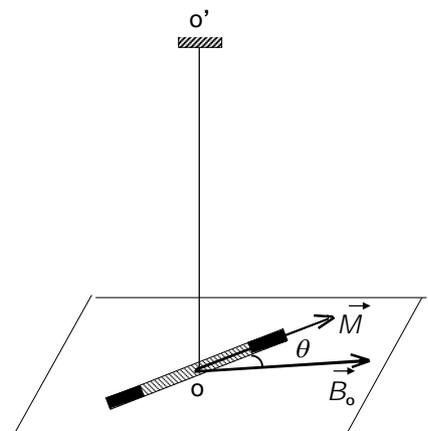
Ce dernier (figure ci-contre), suspendu en son milieu O à un fil sans torsion, est mobile, dans le plan horizontal, autour d'un axe vertical OO' . L'aimant a la forme d'un parallélépipède rectangle. On fait tourner ce pendule d'un angle θ_M et on l'abandonne à lui-même.

1°) Sachant qu'aucun couple de torsion n'agit sur le système, écrire l'équation du mouvement dans le cas où les frottements sont négligeables. En déduire la période d'oscillation T du pendule dans le cas des faibles amplitudes. ($\sin \theta \approx \theta$).

A.N. $T = 8,2 \text{ s}$, $M = 2 \text{ A.m}^2$, $J = 0,64 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

2°) Retrouver la période T à partir d'une étude dimensionnelle.

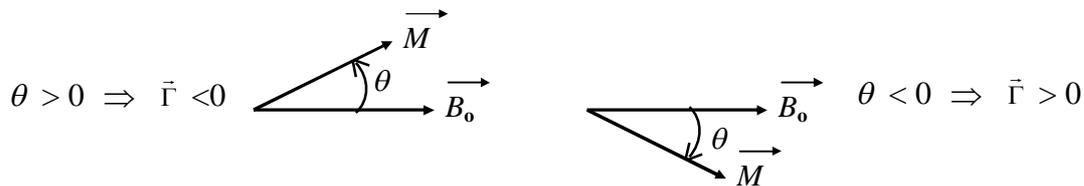
J désigne le moment d'inertie du pendule par rapport à OO'



Solution IV. 3. Les frottements et le couple de torsion étant nuls, le couple d'inertie est équilibré par le couple magnétique :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = - M B_0 \sin \theta$$

Le couple s'oppose toujours au déplacement. En effet :



L'équation du mouvement s'écrit :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - M B_0 \sin \theta \quad \text{si} \quad \sin \theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{M B_0}{J} \theta = 0$$

C'est l'équation d'un pendule oscillant autour de son axe : $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$

d'où $\omega^2 = \frac{M B_0}{J}$ soit $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M B_0}} \Rightarrow B_0 = 2.10^{-5}$ tesla

2°) Calcul dimensionnel :

La période T dépend de J, M et B . soit : $T = J^x M^y B^z$

Cette expression doit être dimensionnellement homogène, les deux membres ont donc pour dimension un temps. En remplaçant chaque grandeur par sa dimension, on obtient :

$$T = (M.L^2)^x (I.L^2)^y (M.T^{-2}.I^{-1})^z = M^{(x+z)}.L^{(2x+2y)}.T^{(-2z)}.I^{(y-z)}$$

D'où :

$$\begin{cases} 0 = x + z \\ 0 = x + y \\ 1 = -2z \\ 0 = y - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = +1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -1/2 \end{cases} \rightarrow T = k \sqrt{\frac{J}{M B_0}}$$

Le calcul dimensionnel ne peut pas donner la valeur du coefficient sans dimension k

4. CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN COURANT.

4.1. Loi de Biot et Savart.

Les physiciens français Biot et Savart ont trouvé l'expression du champ magnétique obtenu lors de l'expérience d'Oersted.

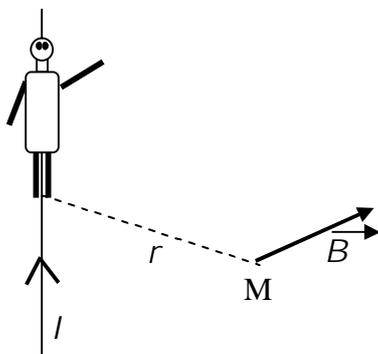


Figure IV. 12.

Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie, parcouru par un courant I , crée, en un point M de l'espace situé à une distance r du fil, un champ magnétique dont :

- la direction est telle que les lignes de champ soient des cercles axés sur le fil.
- le sens est donné par la règle du "bonhomme d'Ampère": celui-ci, lorsqu'il est parcouru par I , des pieds vers la tête, voit en M le champ à sa gauche.
- le module est:

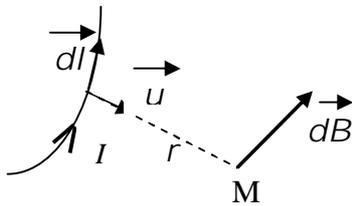
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (14)$$

où μ_0 est la *perméabilité magnétique* du vide.

Dans le système MKSA, $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$ henry par mètre: H/m (Annexe 4)

Dans le cas d'un circuit fermé de forme quelconque, chaque élément de courant

$I dl$, crée en M un champ élémentaire :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (15)$$

C'est l'expression de la loi de Biot & Savart dans le cas général.

Le vecteur \vec{u} est orienté, comme le montre la figure, de la source vers le point M.

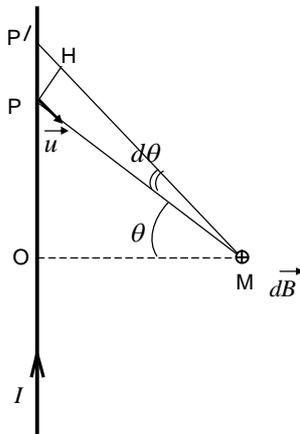
N.B. Cette loi sera démontrée en 2^{ème} et 3^{ème} années de licence.

Figure IV.13

Exercice IV. 4. Retrouver l'expression (14) du champ créé par un fil rectiligne de longueur infinie. A.N : $I = 5$ A et $OM = a = 50$ cm

Solution IV. 4. Le champ magnétique $d\vec{B}$, créé au point M, par un élément $PP' = dl$ du fil considéré, est donné par l'expression (15)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$



où $r = PM$

Ce champ est perpendiculaire en M au plan formé par \vec{dl} et \vec{u} . Son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère (voir la figure ci-contre). Son intensité est:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cos \theta}{r^2}$$

d'après la figure :

$$r = \frac{a}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad PH = r d\theta$$

$$\Rightarrow dl = \frac{r d\theta}{\cos \theta} \quad \text{d'où}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cos \theta d\theta \quad \text{et} \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 2 \mu T$$

Remarque : Il existe une différence notable entre la nature vectorielle du champ électrique \vec{E} et celle du champ magnétique \vec{B} . \vec{E} est un vecteur polaire (un vrai vecteur), il est dirigé suivant la droite qui joint la charge source au point M origine du champ. Par contre \vec{B} est un vecteur axial ou pseudo vecteur, qui est défini à partir d'un produit vectoriel (loi de Biot).

Pour les différencier certains auteurs utilisent, pour un vecteur axial, la notation :



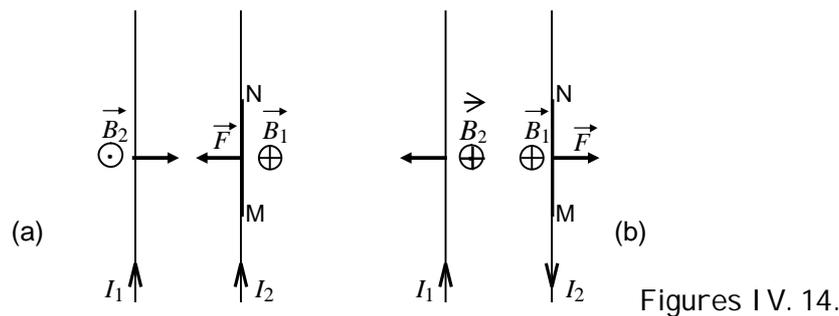
La théorie de la relativité, qui sera étudiée en L3, montre que ces deux grandeurs, le champ électrique et le champ magnétique, de l'espace tridimensionnel, ne sont en fait que deux parties d'une seule et même grandeur physique, de l'espace à quatre dimensions : "le tenseur électromagnétique". On parle alors de champ électromagnétique.

4.2. Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles : Définition de l'ampère.

Considérons deux fils conducteurs rectilignes, parallèles, de longueur infinie, séparés par une distance d et parcourus par des courants I_1 et I_2 . Calculons la force qu'exerce le premier fil sur une longueur $MN = l$ du second fil.

1°) Les deux courants I_1 et I_2 ont le même sens (figure IV.14.a): calculons le champ magnétique \vec{B}_1 , créé au milieu O de MN par le premier fil. Ce champ est perpendiculaire au plan des deux fils et orienté comme le montre la figure (règle du bonhomme d'Ampère). D'après la loi de Biot, il a pour module

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1$$



Figures IV. 14.

Ce champ exerce, sur la longueur $MN = l$, une force \vec{F} dirigée et orientée comme l'indique la figure. Son module est en vertu de la loi de Laplace:

$F = B_1 I_2 l$ soit en remplaçant B_1 par sa valeur :

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 l \quad (16)$$

Si on fait le même raisonnement pour calculer la force exercée par le second fil sur une même longueur l du premier, on trouve une force égale et opposée.

La figure montre que l'interaction entre les deux fils, parcourus par des courants de même sens, se traduit par une attraction.

2°) Les deux courants I_1 et I_2 sont de sens contraires (figure IV.14.b). Le même raisonnement montre que, dans ce cas, l'interaction se traduit par une répulsion.

Remarque : Ampère avait trouvé une formule générale qui donne la force d'interaction entre deux éléments $I_1 d\vec{l}_1$ et $I_2 d\vec{l}_2$. A partir de cette formule, il a pu retrouver toutes les lois de l'électromagnétisme

Définition de l'ampère : L'unité de l'intensité électrique, l'*ampère*, est définie à partir de cette interaction.

Considérons le cas où les deux courants ont le même sens et la même intensité $I_1 = I_2 = I$; les distances l et d sont égales à l'unité de longueur du système MKSA $l = d = 1$ mètre. Dans ce système, on pose $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (unité MKSA). La force qui agit sur MN est :

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} I^2 = 2 \cdot 10^{-7} I^2 \text{ newton} \quad (17)$$

Le courant I a pour valeur l'unité d'intensité MKSA si $F = 2.10^{-7}$ newton. Dans le système d'unités MKSA l'unité de l'intensité est l'ampère.

L'ampère est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force $F = 2.10^{-7}$ Newton par mètre de longueur.

Il est difficile de mesurer l'Ampère absolu à partir de cette méthode, d'où l'utilisation d'électrodynamomètres absolus. L'électrodynamomètre de Pellat fut l'un des premiers appareils construits (exercice IV.12)

4.3. Champ créé par une spire circulaire en un point de son axe.

Un élément $d\vec{l}$ d'une spire, parcourue par un courant I , produit en un point M de l'axe de la spire, un champ magnétique $d\vec{B}$. Il est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et \vec{u} , son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère et son module est

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

En raison de la symétrie du problème, toutes les composantes perpendiculaires à l'axe s'éliminent, et les composantes suivant oz

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin \theta$$

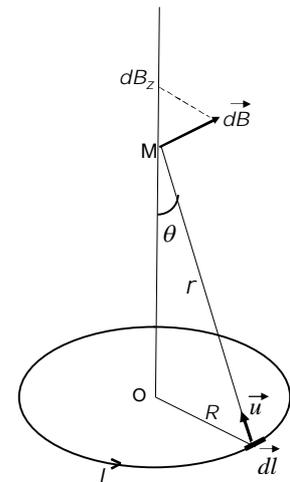


Figure IV. 15

s'ajoutent. Le champ résultant est porté par l'axe de la spire et a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} I \int_0^{2\pi R} dl \quad \text{soit} \quad B = \frac{\mu_0}{2} \frac{\sin \theta}{r^2} I R$$

R étant le rayon de la spire et sachant que $\sin \theta = \frac{R}{r}$ on a :

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{r^3} I \quad \text{soit} \quad B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} I \quad (18)$$

Au centre de la spire, le champ a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0}{2R} I \quad (19)$$

4.4. Dipôle magnétique.

On peut écrire l'expression (18) du champ sur l'axe de la spire sous la forme :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} I \quad \text{c'est-à-dire} \quad B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

où $M = \pi R^2 I$ est le module du moment magnétique de la spire.

Si le rayon R de la spire est très petit, il peut être négligé devant z , on a alors :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{z^3} \quad (20)$$

On retrouve une expression analogue à celle du champ électrique créé par un dipôle sur son axe (*exercice I.4*)

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

C'est la raison pour laquelle on dit qu'une spire, de très faible rayon, parcourue par un courant, constitue un *dipôle magnétique*.

Si on calcule le champ magnétique créé par un tel dipôle, on trouve⁸ un vecteur \vec{B} dont les composantes radiale et tangentielle sont :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{r^3} \cos\theta \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{r^3} \sin\theta \quad (21)$$

Nous avons trouvé dans le cas du dipôle électrique des expressions analogues (ch I § 7.2)

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \cos\theta \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin\theta$$

4.5. Notions élémentaires sur l'aimantation de la matière.

Nous avons expliqué, au premier chapitre, la polarisation électrique de la matière par l'action d'un champ électrique extérieur sur les moments dipolaires des atomes et des molécules qui constituent le milieu. Or, une petite spire, parcourue par un courant I constitue un dipôle magnétique. On pourrait alors, grâce à un raisonnement par analogie, expliquer l'aimantation de la matière par l'existence de moments magnétiques et par leurs interactions avec un champ magnétique extérieur. Nous avons vu au paragraphe 1.4. que, historiquement, Langevin avait expliqué le magnétisme par l'action du champ magnétique sur le mouvement orbital des électrons dans l'atome, mouvement qui correspond aux courants circulaires de la théorie d'Ampère. Cependant, la physique classique ne peut pas donner une explication complète du magnétisme ; il faut alors recourir à la physique quantique. En plus des moments orbitaux, on doit tenir compte des moments de *spin* de l'électron. Or le spin est un concept purement quantique. Le magnétisme sera étudié en troisième année de Licence (S6)

Le diamagnétisme : C'est un phénomène analogue à la polarisation induite, l'action du champ se traduit par l'apparition d'un moment magnétique induit. Ce moment est proportionnel au champ et *s'oppose à lui*, ce qui contraste avec la polarisation électrique.

Le paramagnétisme : Les constituants du milieu (atomes, molécules) possèdent un moment permanent ; mais en raison de l'agitation thermique, le matériau n'est pas aimanté. L'action d'un champ magnétique se traduit par un effet d'orientation des moments et une aimantation du matériau orienté dans le même sens que le champ. Ce phénomène dépend de la température. On peut noter une analogie avec la polarisation dipolaire.

Le ferromagnétisme : Certains matériaux (fer, nickel, cobalt) gardent une aimantation lorsque le champ est supprimé ; ils constituent des aimants. Ce phénomène dépend de la température ; pour chaque matériau ferromagnétique, il existe une température, appelée "température de Curie" T_c , au dessus de laquelle il perd son aimantation et devient paramagnétique. Voici quelques valeurs de T_c :

Fe $\Rightarrow T_c = 770^\circ \text{C}$, Co $\Rightarrow T_c = 1115^\circ \text{C}$, Ni $\Rightarrow T_c = 354^\circ \text{C}$.

N.B : La perméabilité magnétique μ d'un milieu magnétique est supérieure à celle du vide ($\mu > \mu_0$)

⁸ Ce calcul peut être fait en L2 à partir des potentiels vecteurs. Voir le cours d'*Electromagnétisme* S4 [6] §3.2.5

5. THEOREME D'AMPERE.

5.1. Vecteur excitation magnétique.

Comme en électrostatique, on introduit un vecteur "excitation magnétique" \vec{H} tel que :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (22)$$

μ est la perméabilité magnétique du milieu.
Dans le vide on a:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (23)$$

N.B. Le vecteur \vec{H} a été longtemps appelé "champ magnétique" et le vecteur \vec{B} "induction magnétique". Or c'est le vecteur \vec{B} qui est à l'origine de la force qui agit sur une charge q (force de Laplace) ; c'est donc \vec{B} qui est le champ.

5.2. Circulation de l'excitation magnétique le long d'un contour fermé.

Considérons un fil conducteur rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant I . Il crée, à une distance r , un champ magnétique tangent à une ligne de champ et de module (14) :

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

L'excitation magnétique \vec{H} est parallèle à \vec{B} et son module est

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi r}$$

Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil dans des plans perpendiculaires

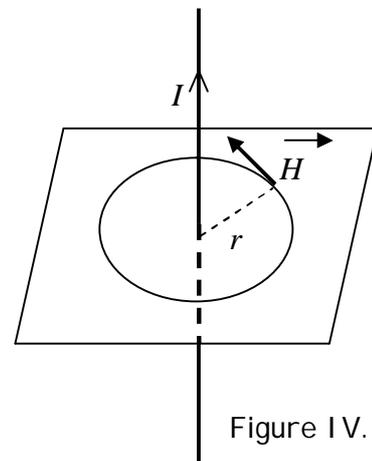


Figure IV. 16

Si on calcule la circulation du vecteur \vec{H} le long d'une ligne de champ, on trouve :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (24)$$

En effet, en remplaçant \vec{H} par sa valeur

$$\oint_C \frac{I}{2\pi r} dl = \frac{I}{2\pi r} \oint_C dl = I$$

Le rayon r du cercle est constant et l'intégrale donne le périmètre du cercle. Ce résultat, trouvé ici dans un cas particulier, est général, le contour C étant quelconque. D'où le théorème d'Ampère :

La circulation du vecteur \vec{H} le long d'un contour fermé C quelconque est égale à la somme algébrique des courants qui se trouvent à l'intérieur de C .

Soit :

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_n I_n \quad (25)$$

En introduisant la densité de courant \vec{J} , on obtient :

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (26)$$

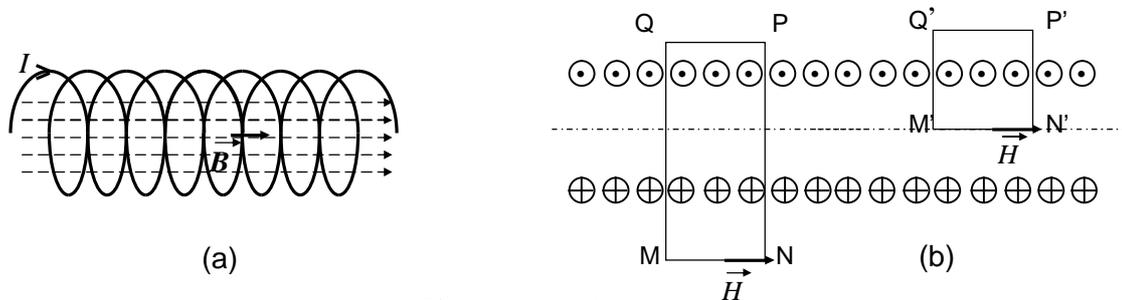
S est une surface quelconque qui s'appuie sur le contour C . C'est la formulation mathématique du théorème d'Ampère.

Remarque : Le théorème d'Ampère équivaut au théorème de Gauss trouvé en électrostatique : dans le premier cas le vecteur excitation \vec{H} est relié aux courants sources \vec{J} , et dans le deuxième, \vec{D} est relié aux charges sources ρ .

5.3. Application : Champ créé par un solénoïde de longueur infinie.

Un solénoïde est constitué d'un fil conducteur enroulé sur un cylindre de longueur L . Chaque tour du fil constitue une spire circulaire de rayon R . Un courant électrique d'intensité I , qui parcourt le fil, entraîne l'apparition, dans l'espace environnant, d'un champ magnétique \vec{B} (figure IV.17.a)

Nous allons utiliser le théorème d'Ampère pour calculer \vec{B} dans le cas d'un solénoïde de longueur infinie. En raison de la symétrie du problème, les lignes de champ sont parallèles à l'axe du solénoïde.



Figures IV. 17

Calcul de \vec{H} à l'extérieur du solénoïde : On choisit un contour rectangulaire MNPQ (figure.IV.17. b). La circulation, le long de ce contour, du vecteur \vec{H} est

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i \quad \text{soit} \quad \vec{H} \cdot \overline{MN} + \vec{H} \cdot \overline{NP} + \vec{H} \cdot \overline{PQ} + \vec{H} \cdot \overline{QM} = \sum_i I_i = 0$$

les 2^{ème} et 4^{ème} termes sont nuls car les deux vecteurs sont perpendiculaires. Par conséquent \vec{H} a la même valeur le long de MN et de PQ. A l'extérieur \vec{H} est uniforme et cela quelles que soient les positions de MN et PQ, il est donc nul comme à l'infini. Calcul de \vec{H} à l'intérieur du solénoïde : On considère, à présent, le contour M'N'P'Q' :

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I \quad \text{soit} \quad \vec{H} \cdot \overline{M'N'} + \vec{H} \cdot \overline{N'P'} + \vec{H} \cdot \overline{P'Q'} + \vec{H} \cdot \overline{Q'M'} = N_1 I$$

où N_1 est le nombre de spires à l'intérieur de ce contour.

Seul le premier terme n'est pas nul ; les 2^{ème} et 4^{ème} sont nuls comme précédemment et le 3^{ème} parce que $\vec{H} = 0$ à l'extérieur du solénoïde. Donc, à l'intérieur du solénoïde, l'excitation magnétique a pour module :

$$H = \frac{N_1}{MN} I \quad \Rightarrow \quad H = nI$$

n est le nombre de spires par unité de longueur. A l'intérieur du solénoïde l'intensité du champ magnétique est

$$B = \mu_0 n I \quad (27)$$

Le calcul de \vec{B} sur l'axe d'un solénoïde, de longueur finie, sera traité en exercice (Ex IV . 10)

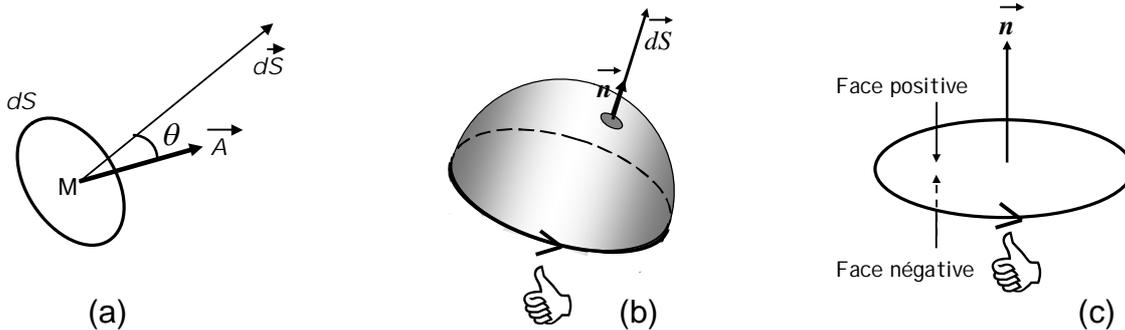
6. FLUX MAGNETIQUE.

6.1. Flux du champ magnétique à travers une surface.

Nous avons défini, au paragraphe 9.1. du premier chapitre, le concept mathématique de " flux d'un vecteur \vec{A} à travers un élément dS d'une surface S ". par la quantité scalaire⁹

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A dS \cos\theta$$

où $d\vec{S} = dS \vec{n}$ et \vec{n} un vecteur unitaire porté par la normale à dS (figure IV.18.a)



Figures IV. 18

Le flux global à travers la surface S est obtenu par intégration :

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (28)$$

Rappelons que, dans le cas d'une surface fermée, la normale est orientée de l'intérieur vers l'extérieur (Voir Ch I § 9.1.).

Lorsque la surface est ouverte (figure IV.18. b), on choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite. La figure IV.18.c représente une spire sur laquelle on a choisi une face positive et une face négative.

En électromagnétisme, on définit le flux du vecteur champ magnétique \vec{B} à travers une surface S par :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (29)$$

Le flux du vecteur champ magnétique Φ appelé " flux magnétique" a , comme nous le verrons au chapitre suivant, une très grande importance en électromagnétisme.

Dans le système MKSA, le flux magnétique est mesuré en "weber " (Wb), le champ magnétique \vec{B} en *weber/m²* (Wb/m²), ou en *tesla* (T).

⁹ Nous avons étudié le flux du vecteur excitation électrique \vec{D} (Ch. I), le flux du vecteur densité électrique \vec{j} qui représente l'intensité I du courant (Ch. III) et ici le flux magnétique Φ . De même en hydraulique le débit d'une conduite représente le flux du vecteur vitesse \vec{v} à travers une section de cette conduite..

6.2. Equation de conservation du flux magnétique.

La topographie d'un champ magnétique, qu'il soit créé par des aimants ou des courants électriques, montre que, dans tous les cas, les lignes de champ sont des courbes fermées.

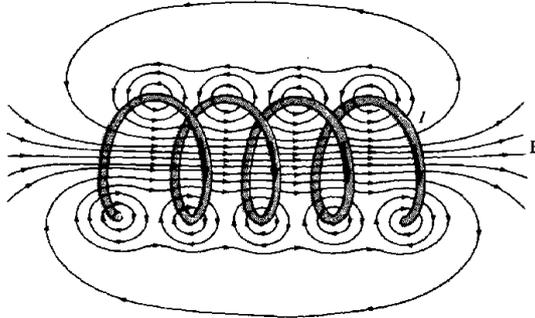


Figure IV. 19 Topographie du champ magnétique créé par un fil conducteur plié en hélice

www.epsic.ch/.../Theorie/matmag/Image370a.gif

Il en résulte que le flux du vecteur \vec{B} à travers une surface S fermée est nul. Par conséquent, le "flux magnétique" Φ est conservatif, ce qui se traduit mathématiquement par

$$\Phi = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (30)$$

C'est l'une des quatre équations de Maxwell écrite sous forme intégrale.

La loi de conservation du flux magnétique permet de montrer que :

Le flux du vecteur champ magnétique \vec{B} à travers toute surface s'appuyant sur un même contour est le même.

En effet, considérons un contour C avec le sens de parcours indiqué sur la figure IV.20 et, dans une première étape, deux surfaces S_1 et S_2 placées de part et d'autre de C et s'appuyant sur ce contour. L'ensemble formé par S_1 et S_2 constitue une surface fermée S . En orientant cette surface vers l'extérieur, la loi de conservation du flux donne :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad (31)$$

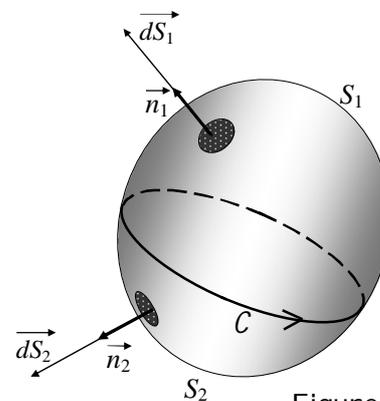


Figure IV. 20

Φ , Φ_1 , et Φ_2 désignent respectivement les flux qui traversent les surfaces S , S_1 et S_2 .

L'expression (31) montre que :

$$\Phi_1 = - \Phi_2$$

Le signe (-) provient de la convention d'orientation de la normale. Le flux est le même dans les deux cas.

Considérons à présent une troisième surface S'_1 qui s'appuie sur C et qui constitue avec S_2 une surface fermée S' , le même raisonnement aboutirait à l'égalité :

$$\Phi'_1 = - \Phi_2 \quad \text{Donc :} \quad \Phi'_1 = \Phi_1$$

6.3. Expression du travail des forces en fonction du flux coupé.

Considérons d'abord le cas particulier du circuit représenté sur la figure IV.21 : Une barre conductrice MN se déplace sur des rails parallèles conducteurs. L'ensemble est alimenté par une source de courant continu qui débite à travers le circuit, ainsi formé, un courant I . Ce circuit est placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à la barre MN et faisant un angle θ avec la normale au plan du circuit.

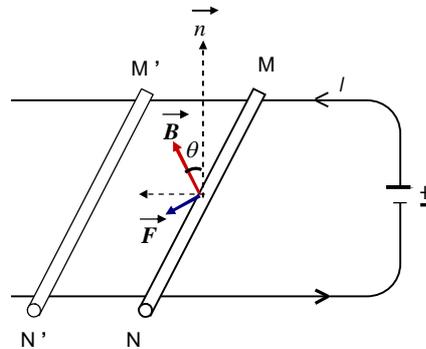


Figure IV. 21

Le conducteur MN, est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F} = I \overline{MN} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| = I |\overline{MN}| |\vec{B}| \quad \text{soit} \quad F = IMNB \quad (32)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire \overline{dM} de MN, le travail de la force \vec{F} est

$$dW = \vec{F} \cdot \overline{dM} \quad \text{soit} \quad dW = F dM \cos \theta \quad (33)$$

En remplaçant dans (33) F par sa valeur trouvée en (32), il vient :

$$dW = IMN dM B \cos \theta \quad \text{soit} \quad dW = I dS B \cos \theta$$

dS est la surface balayée par le conducteur MN au cours de ce déplacement.

Si on fait intervenir le flux coupé par le conducteur :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad d\Phi = B dS \cos \theta$$

On a :

$$dW = I d\Phi \quad (34)$$

\vec{n} est un vecteur unitaire porté par la normale à la surface balayée.

Ce résultat, trouvé dans un cas particulier, est général.

Considérons un circuit électrique, parcouru par un courant continu I et placé dans un champ magnétique \vec{B} . Chaque élément $d\vec{l}$ du circuit est soumis à une force de Laplace :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (35)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire \vec{dM} de l'élément \vec{dl} , le travail de la force \vec{F} est

$$dW = d\vec{F} \cdot \vec{dM}$$

Soit avec (35) :

$$dW = (I \vec{dl} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dM}$$

En utilisant les propriétés du produit mixte, il vient :

$$dW = I (\vec{dM} \wedge \vec{dl}) \cdot \vec{B}$$

Or le produit vectoriel $(\vec{dM} \wedge \vec{dl}) = \vec{dS}$ représente l'aire du parallélogramme balayé par \vec{dl} .

Donc

$$dW = I \vec{dS} \cdot \vec{B} \quad \text{soit} \quad dW = I d\Phi$$

Ainsi :

Lorsqu'un élément de courant se déplace dans un champ magnétique, le travail de la force, qui s'exerce sur lui, est égal au produit du courant par le flux coupé.

6.4. Expression du travail en fonction de la variation du flux à travers un circuit.

On retrouve la même expression dans le cas d'un circuit électrique fermé, de forme quelconque, parcouru par un courant I .

$$dW = I d\Phi$$

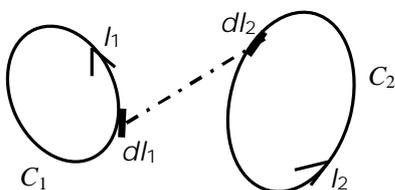
$d\Phi$ désigne la variation du flux magnétique. Cette variation du flux peut être due

- soit à une variation de la surface du circuit,
- soit à une variation du champ,
- soit à une variation de l'angle θ .

6.5. Induction mutuelle de deux circuits.

Considérons deux circuits C_1 et C_2 parcourus respectivement par les

courants I_1 et I_2 . Le flux magnétique Φ_1 envoyé par C_1 à travers C_2 est :



$$\Phi_1 = M I_1 \quad (36)$$

De même le flux magnétique Φ_2 envoyé par C_2 à travers C_1 est :

$$\Phi_2 = M I_2 \quad (37)$$

Figure IV. 22

M est le *coefficient d'induction mutuelle* ou *l'inductance mutuelle*

6.6. L'inductance d'un circuit électrique.

Considérons un circuit électrique fermé parcouru par un courant I . Ce courant crée dans le voisinage un champ magnétique \vec{B} proportionnel à I . Le flux de ce

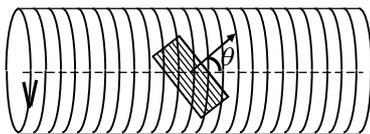
champ à travers le circuit, appelé flux propre, est proportionnel à \vec{B} , donc à I . On peut alors écrire :

$$\Phi = L I \quad (38)$$

L est " l'inductance " du circuit électrique.

M et L sont mesurés, dans le système MKSA, en *henry* (H).

Exercice IV.5. On considère un solénoïde, dont la longueur l est très grande par rapport



au rayon R des spires de façon à l'assimiler à un solénoïde infini. Il comporte N spires de surface S et il est parcouru par un courant I . Une petite bobine de section S' , comportant N' spires et parcourue par un courant I , est placée comme l'indique la figure. Son axe fait un angle θ avec celui du solénoïde

1°) Calculer le coefficient d'induction mutuelle M de ces deux bobines.

2°) On enlève la petite bobine et on ne considère que la première. Calculer son coefficient de self induction L .

A. $N : l = 25 \text{ cm}$, $R = 2 \text{ cm}$, $N = 500$, $S' = 3,15 \text{ cm}^2$, $N' = 50$, $\theta = 60^\circ$

Solution IV.5. 1°) Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde a pour intensité :

$$B = \mu_0 \frac{N I}{l}$$

Le flux de ce champ à travers la bobine est :

$$\Phi = N' B S' \cos \theta = \mu_0 \frac{N I}{l} N' S' \cos \theta = M I \quad \Rightarrow \quad M = \mu_0 \frac{N}{l} N' S' \cos \theta$$

A.N : $M = 1,96 \cdot 10^{-5} \text{ H}$

2°) Le flux magnétique envoyé par le solénoïde à travers ses propres spires est :

$$\Phi = N B S = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} S \quad \Rightarrow \quad L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

Ainsi :

Le coefficient de self induction ou auto induction d'une bobine de grande longueur l comportant N spires de surface S est :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad (39)$$

6.7. Calcul des forces appliquées à un circuit électrique.

On peut calculer la résultante des forces appliquées à un circuit électrique fermé parcouru par un courant I . Nous avons trouvé, en (34), que le travail dW de la force électromagnétique \vec{F} au cours d'un déplacement élémentaire est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{M} = I d\Phi$$

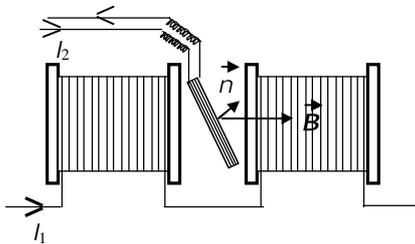
où $d\Phi$ est la variation du flux magnétique au cours de ce déplacement. On peut alors déterminer, comme en électrostatique, les composantes de \vec{F} . En coordonnées cartésiennes on a :

$$F_x = I \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ; \quad F_y = I \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ; \quad F_z = I \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (40)$$

Dans le cas d'un système en rotation autour d'un axe $\vec{\Delta}$, le moment des forces par rapport à cet axe est :

$$M_{\Delta} = I \frac{d\Phi}{d\theta} \quad (41)$$

Exercice IV.6. Un élément moteur électrodynamique comporte une bobine fixe, représentée sur la figure en deux parties, d'inductance L_1 , parcourue par un courant I_1 et une bobine, d'inductance L_2 , mobile autour d'un axe Δ , parcourue par un courant I_2 .



L'axe Δ est perpendiculaire en O au plan de la figure. Le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines est M .

1°) Calculer le couple moteur Γ_m qu'exerce la bobine fixe sur la bobine mobile.

2°) Le couple moteur est équilibré par un couple de rappel Γ_r dû à un ressort de constante C .

Calculer, à l'équilibre, l'angle de rotation θ de l'équipage mobile.

Solution IV. 6. 1°) Le couple moteur est d'après (41) $\Gamma_m = M_{\Delta} = I_2 \frac{d\Phi}{d\theta}$

Le flux envoyé par la bobine fixe à travers la bobine mobile est donné par (36) : $\Phi = M I_1$

D'où :

$$\Gamma_m = \frac{dM}{d\theta} I_1 I_2$$

En effet, au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$, seul le coefficient d'induction mutuelle M varie, les selfs L_1 et L_2 restent constantes.

2°) A l'équilibre, ce couple moteur est équilibré par le couple de rappel dû au ressort :

$$\Gamma_r = C \theta$$

d'où

$$\theta = \frac{1}{C} \frac{dM}{d\theta} I_1 I_2$$

N.B. Cet élément moteur est utilisé dans les wattmètres, pour les mesures de puissances. La bobine fixe est placée en série, comme un ampèremètre, avec le récepteur et la bobine mobile en dérivation comme un voltmètre (**Exercice VI.14**).

Annexe 2

Le champ magnétique terrestre.

Dès l'antiquité, les chinois avaient remarqué l'existence d'un champ magnétique au voisinage de la Terre et ont construit, au V^{ème} siècle, les premières boussoles à aiguille aimantée¹⁰.

Le champ magnétique terrestre est équivalent à un champ qui serait créé par un immense barreau aimanté dont le milieu serait situé près du centre de la terre

Une aiguille aimantée (boussole) placée au voisinage de la terre s'oriente approximativement vers le pôle nord géographique. Les lignes du champ terrestre sortent du pôle nord magnétique dans l'hémisphère sud et reviennent au pôle sud de l'aimant situé dans l'hémisphère nord. Ainsi, en réalité, c'est le pôle sud magnétique qui se trouve, comme le montre la figure 1, près du pôle nord géographique et non l'inverse. Cette erreur, introduite au début de l'histoire du magnétisme, n'a pas été corrigée.

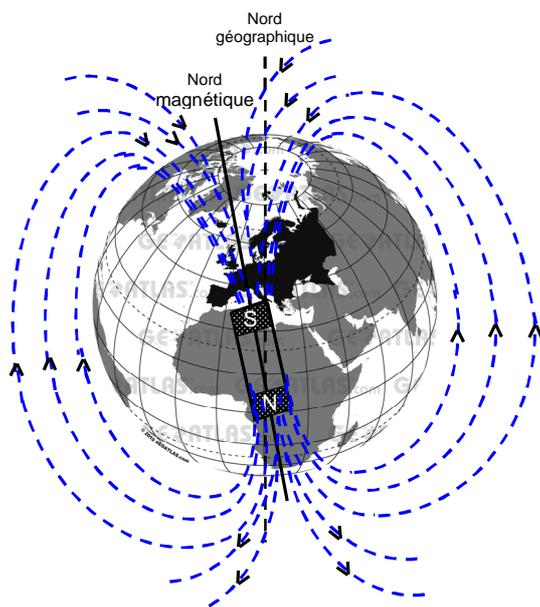


Figure 1.

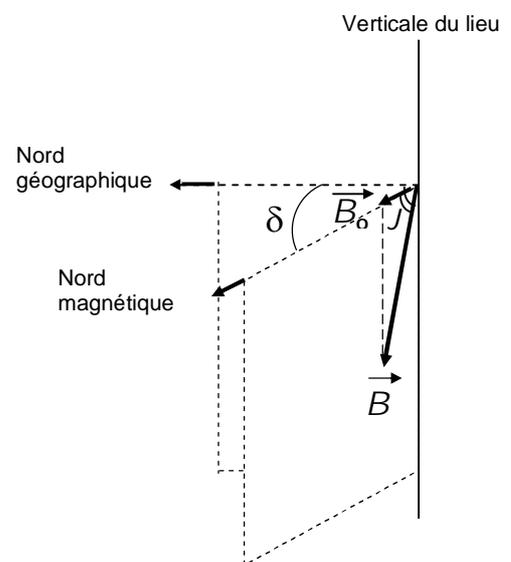


Figure 2.

La valeur du champ magnétique terrestre \vec{B} en un lieu donné est déterminé à partir des mesures de sa composante horizontale \vec{B}_0 , la déclinaison δ et l'inclinaison J (figure 2).

La composante horizontale B_0 est la projection du champ magnétique terrestre \vec{B} sur un plan perpendiculaire à la verticale du lieu considéré.

La déclinaison magnétique δ est l'angle formé par les plans méridiens géographique et magnétique. C'est l'erreur que l'on commet en repérant le nord géographique à l'aide d'une boussole.

L'inclinaison magnétique J est l'angle formé par \vec{B} et \vec{B}_0

Ces trois grandeurs, \vec{B}_0 , δ et J varient en fonction du lieu considéré, et, en un même lieu, elles évoluent en fonction du temps. Des mesures effectuées à Tamanrasset¹¹ ont donné :

$$\begin{array}{lll} \delta = -2^\circ, & J = 27^\circ 22', & B = 37\,345 \text{ nT en } 1994 \\ \delta = -1^\circ, & J = 27^\circ 15', & B = 37\,560 \text{ nT en } 2006 \end{array}$$

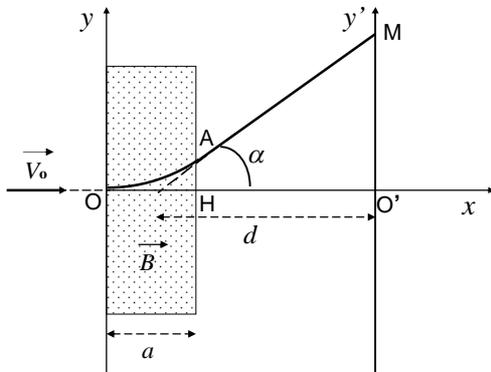
L'existence du champ magnétique terrestre assure la protection de la vie sur Terre en déviant les particules à très hautes énergies.

¹⁰ Michel Soutif : Histoire de la physique, pages 124 à 128, Ed. Focus 2003

¹¹ Observations magnétiques Bulletin N° 25

Exercices : Chapitre IV

Exercice IV. 7. Déflexion magnétique.



Un électron, de masse m portant une charge électrique $-e$, animée d'une vitesse constante V_0 parallèle à l'axe \vec{ox} (figure ci-contre), entre dans un champ magnétique B parallèle à oz et qui reste uniforme dans une zone rectangulaire de largeur a . En dehors de cette zone le champ est nul.

1°) Quel est le sens du champ magnétique dans la figure ci-contre.

2°) Déterminer la trajectoire de la particule dans le champ magnétique ($0 < x < a$), calculer son rayon R

3°) A la sortie du champ la particule poursuit son trajet et aboutit, en M, sur l'écran d'un oscilloscope cathodique. Calculer la déviation α de la trajectoire de la particule et la position, $y' = O'M$, du spot sur l'écran

N.B. Les ordres de grandeur des paramètres du problème permettent de remplacer, dans les calculs, la longueur de l'arc OA par la distance a .

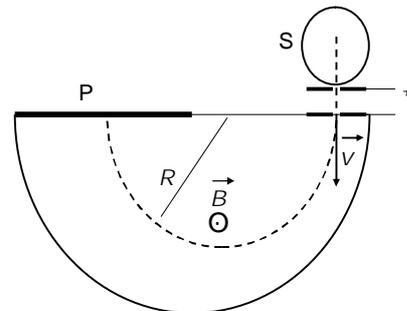
Les vitesses considérées sont faibles vis-à-vis de celle de la lumière

A.N., $V_0 = 3 \cdot 10^6$ m/s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,
 $B = 10^{-3}$ T, $a = 5$ mm, $d = 5$ cm.

Exercice IV. 8. Spectromètre de Dempster.

Le spectromètre de Dempster, représenté sur la figure ci-contre, comporte une source d'ions S. Ces ions transitent, à travers deux fentes fines, dans la région I où ils sont accélérés par une différence de potentiel V . Dans le cas considéré ici des ions $^{79}\text{Br}^-$ sont accélérés par une d.d.p $V = 2 \cdot 10^3$ Volts. Ils pénètrent, avec une vitesse \vec{V} dans la région II où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à la vitesse (voir figure).

Après avoir décrit une trajectoire, représentée en pointillés sur la figure, ils tombent sur une plaque photographique P où ils laissent une trace.



1°) Quelle est la nature du mouvement des ions dans les régions I et II. En déduire leur vitesse à la sortie de la région I, sachant que la vitesse initiale est nulle.

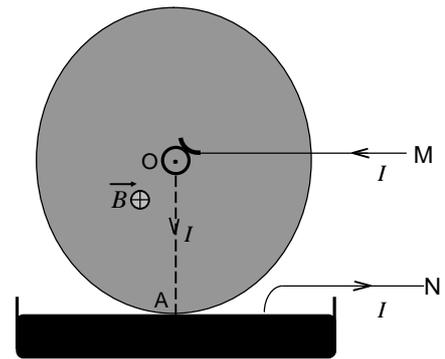
2°) Quelle intensité faut-il donner à \vec{B} pour que ces ions décrivent une trajectoire circulaire de rayon $R = 57.24$ cm.

3°) Quelle est la variation ΔR du rayon de la trajectoire circulaire lorsque les ions $^{79}\text{Br}^-$ sont remplacés par des ions $^{81}\text{Br}^-$.

On donne : $B = 0.1$ Tesla, $m_{79} = 1.3104 \cdot 10^{-25}$ kg et $m_{81} = 1.3436 \cdot 10^{-25}$ kg

Exercice IV. 9. Roue de Barlow

Un disque métallique circulaire, de rayon R , peut tourner librement autour de son axe perpendiculaire en O au plan du disque. Celui-ci est placé dans un champ magnétique uniforme parallèle à l'axe et orienté comme l'indique la figure. L'extrémité inférieure A du disque est en contact avec la surface libre d'un bain de mercure contenu dans un récipient. L'ensemble est parcouru par un courant continu I . Celui-ci arrive en M , traverse le disque, grâce à un frotteur qui assure le contact avec l'axe de rotation, passe à travers le mercure, puis il revient à la source en N .



On suppose que, dans le disque, le courant électrique I circule en ligne droite entre O et A ¹².

- 1°) Quel est le sens de rotation du disque ?
 - 2°) Calculer le moment, par rapport à l'axe, de la force de Laplace qui s'exerce sur le disque.
 - 3°) Quelle est la puissance du moteur, ainsi constitué, sachant que le disque effectue N tours par minute.
- A.N. $R = 10 \text{ cm}$, $I = 5 \text{ A}$, $B = 0,5 \text{ T}$, $N = 120 \text{ tours/mn}$

Exercice IV. 10. Solénoïde de longueur finie.

On considère un solénoïde de longueur finie L et comportant N spires de rayon R et parcourues par un courant I .

- 1°) Calculer le champ magnétique \vec{B} en un point M de l'axe $\overrightarrow{x'x}$ du solénoïde en fonction du nombre n de spires par unité de longueur, de l'intensité du courant I et des angles θ_1 et θ_2 sous lesquels on voit, depuis le point M , les deux spires terminales du solénoïde.
- 2°) Retrouver la valeur du champ magnétique en M dans le cas d'un solénoïde de longueur infinie.

Exprimer le champ magnétique \vec{B}_o en fonction de μ_0 , n , I , L et R lorsque le point M se trouve en O au milieu du solénoïde

- 3°) Pour quelle valeur de R/L a-t-on une précision de 1% lorsqu'on assimile la valeur \vec{B}_o du champ en O à celle $\vec{B}_{o\infty}$ obtenue dans le cas d'un solénoïde de longueur infinie.

4°) Le solénoïde considéré comporte $N = 300$ spires, de rayon $R = 1 \text{ cm}$, parcourues par un courant $I = 2 \text{ A}$. Sa longueur est $L = 16 \text{ cm}$. Calculer la valeur du champ en O , milieu du solénoïde et origine de l'axe $\overrightarrow{x'x}$.

Tracer la courbe $B(x)$ qui représente la variation du champ le long de l'axe $\overrightarrow{x'x}$.

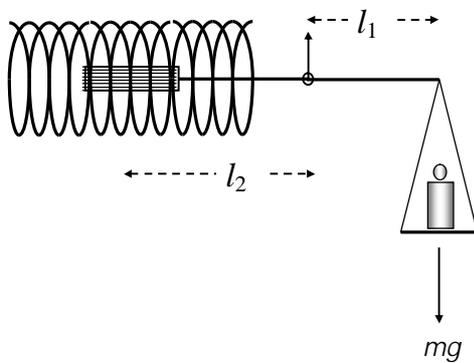
Exercice IV. 11. Spire carrée.

- 1°) Calculer le champ créé par un fil rectiligne de longueur L finie, parcouru par un courant I , en un point M situé à une distance D du fil.
- 2°) En déduire le champ magnétique sur l'axe d'une spire carrée, de côté $L = 2a$, parcourue par un courant I . Quelle est la valeur de ce champ au centre de la spire ?

¹² Pour le calcul exact voir Perez page 243. Il montre que le résultat est indépendant de la topographie des lignes de courant.

Exercice IV.12. Electro-dynamomètre de Pellat.

La balance électrodynamique (électrodynamomètre de Pellat), représentée sur la figure ci-dessous, sert à la mesure de l'ampère absolu. L'un des bras de la balance est solidaire d'une petite bobine placée à l'intérieur d'un solénoïde. Ce solénoïde, dont l'axe est horizontal, com-



-porte N spires de surface S parcourues par un courant I ; sa longueur L est très grande par rapport au diamètre des spires. La petite bobine, constituée de N' spires de surface S' , est parcourue par le même courant I . Son axe est, lorsque la balance est équilibrée, perpendiculaire à celui du solénoïde.

Quelle masse doit-on placer sur le plateau de la balance pour mesurer, à l'équilibre, un courant de 1 ampère ?

AN : $N = 10\,000$ spires , $N' = 100$ spires ,
 $S = 10\text{ cm}^2$, $l = 20\text{ cm}$

Chapitre V

L'INDUCTION ELECTROMAGNÉTIQUE

Nous n'avons considéré, jusqu'à présent, que des régimes stationnaires : en électrostatique et dans le cas des courants continus. La variation, en fonction du temps, des charges sources entraîne un phénomène de propagation des champs, il en résulte des effets de capacité entre conducteurs et une modification du théorème d'Ampère¹. Lorsque cette variation est lente, c'est-à-dire lorsque les dimensions des circuits électriques sont très faibles par rapport aux longueurs d'onde qui interviennent dans la propagation², on peut considérer que le courant électrique est, à un instant donné, le même le long de tout le circuit. En outre, les effets de capacité sont localisés à la surface des armatures des condensateurs : c'est le cas des "régimes quasi stationnaires" que nous allons considérer dans les deux chapitres qui suivent.

1. LES PHENOMENES D'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE.

Les phénomènes d'induction électromagnétique ont été découverts en 1831 simultanément par Faraday et Henry. Cette découverte a été à l'origine de l'invention des génératrices à courants continus et à courants alternatifs et, par conséquent, de la production de l'énergie électrique.

1. 1. Mise en évidence des phénomènes d'induction.

Ce phénomène d'induction est mis en évidence à partir de la réalisation de quelques expériences simples :

Expérience 1 :

On prend une bobine, formée par un fil conducteur déformable, placée dans un champ magnétique constant et reliée à un galvanomètre à zéro central (Figure V.1).

On constate que la déformation du fil entraîne l'apparition d'un courant dans le galvanomètre. Ce courant s'annule dès que cesse la déformation et dépend de la vitesse avec laquelle on effectue la déformation.

On redonne au fil sa forme initiale, un courant circule dans le sens inverse, tant que dure cette opération.

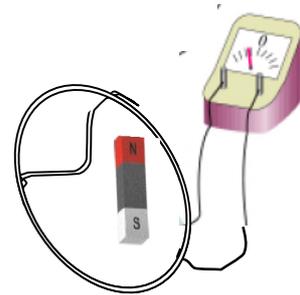


Figure V.1

¹ Le théorème de Maxwell Ampère, qui intervient en régimes variables, est étudié en S4. Quant aux lignes à constantes réparties, elles sont au programme du S5.

² Les courants alternatifs industriels sont produits à la fréquence $f = 50$ Hz, les longueurs d'onde correspondantes sont égales à $\lambda = c / f = 3.10^8 / 50 = 6000$ km. Les dimensions des circuits électriques étant nettement inférieures à cette valeur, le phénomène de propagation peut être négligé. Aux Etats Unis, les fréquences industrielles sont égales à 60 Hz.

Expérience 2 :

La figure V.2 représente une bobine indéformable reliée à un galvanomètre. Si on approche un aimant, le galvanomètre dévie et met en évidence la circulation d'un courant dans le circuit. Ce courant a un sens tel que la bobine présente une face Nord N' au pôle nord N de l'aimant. Ainsi les forces électromagnétiques, créées par le courant induit, s'opposent au mouvement de l'aimant. Dès que le mouvement cesse, le courant induit s'annule.

Si on éloigne l'aimant le courant circule dans le sens inverse.

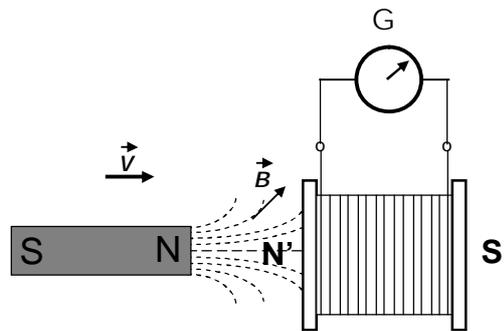


Figure V.2

Cette expérience peut être réalisée en remplaçant l'aimant par une bobine parcourue par un courant.

Expérience 3 :

On reprend l'expérience précédente avec deux bobines montées comme le montre la figure V.3. La première est reliée au galvanomètre et la seconde est placée en série avec un générateur, un rhéostat et un interrupteur. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, un courant apparaît dans le galvanomètre, puis s'annule. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur le courant circule dans le sens contraire.

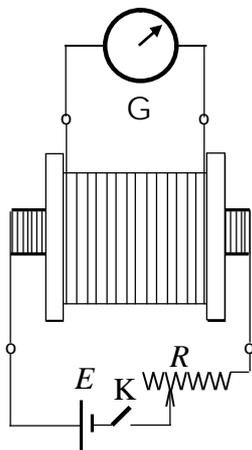


Figure V.3

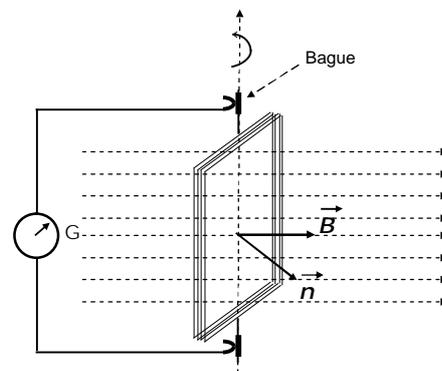


Figure V.4

Expérience 4 :

Un cadre rectangulaire, constitué de N spires conductrices, peut tourner librement autour d'un axe verticale dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} (figure V.4). Ses deux extrémités sont reliées à des bagues solidaires de l'axe de rotation. Sur ces bagues viennent frotter deux électrodes (balais) qui constituent les extrémités d'un circuit comportant un galvanomètre G . La rotation du cadre entraîne l'apparition d'un courant dans le galvanomètre. Le sens du courant induit est tel que les forces qu'il crée s'opposent à la rotation du cadre.

1. 2. Lois de l'induction.

Toutes ces expériences ont mis en évidence l'apparition d'un courant dans un circuit qui ne comporte aucun générateur. Ces courants résultent de la naissance d'une force électromotrice induite e . Selon le cas, on remarque que le sens et la grandeur du courant dépendent de la variation, en fonction du temps,

- de la surface du circuit (expérience 1).
- du champ magnétique dans lequel est plongé le circuit (expériences 2 & 3).
- de l'orientation du circuit par rapport au champ magnétique (expérience 4).

Par conséquent :

1°) Chaque fois que le flux magnétique Φ , qui traverse un circuit, varie, une force électromotrice e prend naissance dans le circuit. Sa durée Δt est égale à celle de la variation du flux $\Delta\Phi$.

2°) Le sens du courant induit est tel que les forces électromagnétiques, qui en résultent, s'opposent à la cause qui a créé ce courant. C'est la loi de Lenz.

3°) La force électromotrice induite, e , est égale et opposée à la vitesse de variation du flux magnétique à travers la surface du circuit et s'écrit :

$$e = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (1)$$

La f.é.m instantanée est :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

Exercice V.1. On considère le dispositif décrit dans l'expérience 4 et représenté sur la figure V.4. Le cadre, de longueur $L = 12$ cm et de largeur $l = 6$ cm, comporte $N = 250$ spires. Le champ magnétique, constant et uniforme, a pour intensité $B = 0,1$ tesla. Le cadre est initialement perpendiculaire au champ ($\theta = (\vec{n}, \vec{B}) = 0$), puis on lui impose une brusque rotation durant $\Delta t = 0,2$ s, θ passe alors de 0 à π .

1°) Calculer la valeur moyenne de la force électromotrice induite.

2°) La résistance du circuit est $R = 10 \Omega$, calculer la quantité d'électricité transportée, à travers ce circuit, pendant la durée de la variation du flux.

Solution V.1. 1°) Lorsque θ varie de 0 à π , le flux magnétique varie de Φ_M à $-\Phi_M$

$$\Delta\Phi = -2\Phi_M = -2NSB = -0,36 \text{ Wb}$$

Il en résulte une force électromotrice induite, dont la valeur moyenne est :

$$e_m = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1,8 \text{ V}$$

2°) La quantité d'électricité transportée pendant un temps dt est :

$$dq = i(t) dt \quad \text{où} \quad i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad dq = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = - \frac{1}{R} d\Phi$$

D'où :

$$\Delta q = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{2\Phi_M}{R} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ Cb}$$

La quantité d'électricité transportée ne dépend pas de la durée de la variation du flux.

2. LOI DE LENZ-FARADAY.

Nous avons déjà vu, au chapitre IV, qu'un courant électrique peut engendrer un champ magnétique. D'un autre côté, les expériences, que nous venons de décrire, montrent qu'un champ magnétique peut induire, sous certaines conditions, un courant dans un circuit électrique. La loi de Faraday donne le module de la force électromotrice induite e et la loi de Lenz précise son signe.

Nous allons, dans ce qui suit, démontrer la loi de Lenz-Faraday dans un cas particulier.

2. 1. Cas d'un circuit fermé placé dans un champ constant et uniforme.

On considère un circuit fermé, formé d'une barre métallique MN qui se déplace sur un rail conducteur en U (figure V.5), placé dans un champ magnétique constant uniforme et perpendiculaire au plan du circuit. Il est possible de retrouver la loi de Lenz-Faraday à partir de cet exemple.

La tige conductrice MN se déplace, dans le champ \vec{B} à la vitesse \vec{v} . Il en résulte un déplacement de charges électriques, le long de la tige, à la vitesse \vec{v}_q . La vitesse d'une charge q par rapport au champ est :

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}_q \quad (3)$$

Elle est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q (\vec{V} \times \vec{B}) = q ((\vec{v} + \vec{v}_q) \times \vec{B}) \quad (4)$$

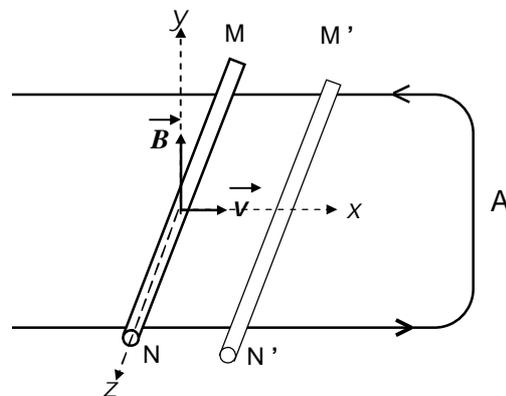


Figure V.5

Lors d'un déplacement \vec{dz} de la charge q à travers la tige, le travail de la force \vec{F} est :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dz} = q ((\vec{v} + \vec{v}_q) \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} \quad (5)$$

Or \vec{v}_q est parallèle à \vec{dz} par conséquent :

$$dW = q (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} \quad (6)$$

Ce travail équivaut à celui qui est produit par une force électromotrice élémentaire "de" telle que :

$$dW = q de \quad (7)$$

Avec (6) et (7) on obtient :

$$de = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} \quad (8)$$

\vec{v} est la vitesse de déplacement de la tige MN.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (9)$$

dx est le déplacement élémentaire de la tige le long des rails. L'équation (8) devient :

$$de = \frac{1}{dt} [(\vec{dx} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz}] \quad \text{soit} \quad de = - \frac{1}{dt} [(\vec{dx} \times \vec{dz}) \cdot \vec{B}]$$

La force électromotrice qui prend naissance aux extrémités de la tige mobile est

$$e = - \frac{1}{dt} [(\vec{dx} \times \vec{l}) \cdot \vec{B}] \quad (10)$$

En introduisant le flux coupé par la tige au cours de son déplacement :

$$d\Phi = (\vec{dx} \times \vec{l}) \cdot \vec{B},$$

il vient :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (11)$$

La loi de Lenz- Faraday est démontrée, ici, dans un cas particulier, mais elle est valable dans tous les cas.

2. 2. Champ électromoteur.

L'expression (4) de la force qui met les charges en mouvement:

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{peut s'écrire} \quad \vec{F} = q \vec{E}_m \quad (12)$$

Où

$$\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B} \quad (13)$$

est le *champ électromoteur*.

Comme dans le cas des générateurs, étudiés au chapitre III, on introduit un champ électromoteur qui est à l'origine de la force électromotrice.

Calculons la circulation du champ électromoteur le long d'un contour fermé. On prend comme contour C le circuit de la figure V.5, constitué de la tige MN et du conducteur en U.

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \int_M^N (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} + \int_{NAM} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

La dernière intégrale est nulle car la vitesse est nulle et avec (8), on peut écrire :

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \int_M^N de = e$$

La circulation du champ électromoteur le long de C est égale à e : elle n'est pas nulle, donc le champ électromoteur ne dérive pas d'un potentiel.

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} \quad (14)$$

D'autre part, on sait que le champ électrostatique \vec{E}_s dérive d'un potentiel, soit

$$\oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0 \quad (15)$$

Si on considère le champ électrique total :

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$$

on a, avec (14) et (15)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = e \quad (16)$$

2. 3. Loi de Lenz-Faraday en fonction de la vitesse.

On peut également obtenir l'expression de la f.é.m. induite en faisant apparaître la vitesse de déplacement de la tige :

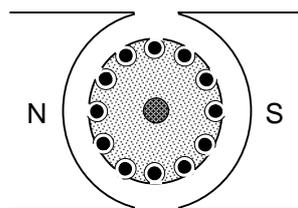
$$e = \frac{IBdx}{dt} = IB \frac{dx}{dt} = Blv \quad (17)$$

Le signe de la force électromotrice e est donné par la loi de Lenz. La figure V.5 montre que le sens du courant est tel que la force F qu'il crée s'oppose au mouvement.

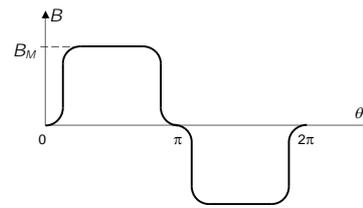
Exercice V. 2. Une dynamo est une machine électrique dont le principe est basé sur l'induction électromagnétique et dont le rôle est de produire des courants continus. Elle comporte :

- un inducteur fixe, le stator, qui crée un champ magnétique B
- un induit, le rotor, qui tourne autour de son axe à raison de n tours par minute.

Le rotor est constitué d'un cylindre en fer doux qui porte sur sa périphérie des encoches où sont logées des barres en cuivre (figure a).



(a)



(b)

Le déplacement de ces barres dans le champ magnétique entraîne, dans chacune d'elles, l'apparition d'une force électromotrice induite e . La variation de l'intensité du champ magnétique dans l'entrefer est représentée sur la figure b. Ces barres alimentent un récepteur électrique par l'intermédiaire d'un collecteur placé sur l'arbre de la machine.

Sachant que la longueur de chaque barre est $L = 25$ cm, le diamètre du rotor est $d = 20$ cm et sa vitesse de rotation $n = 3000$ tours/mn, calculer la f.é.m e , qui prend naissance dans chaque barre, dans la région où $B = B_M = 1$ tesla.

Solution V. 2. : La vitesse de la barre est : $v = 2\pi \frac{n}{60} \frac{d}{2} = 31,4$ m/s

et la f.é.m induite : $e = B L v = 7,85$ volts

2. 4. Equation de Maxwell-Faraday³.

Dans l'exemple précédent (§.2.1) C est un circuit électrique dont la surface varie et qui est placé dans un champ constant. Ce circuit, constitué de conducteurs, existe physiquement.

D'après la loi de Lenz- Faraday (11) on a :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{soit} \quad e = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Avec (16) il vient :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad (18)$$

Considérons, à présent, une région de l'espace où règnent des champs variables \vec{E} et \vec{B} . On choisit un contour quelconque C et une surface arbitraire S s'appuyant sur ce contour. C n'est plus, dans ce cas, un circuit électrique, c'est une courbe fermée imaginaire. Comme S ne dépend pas ici du temps, l'équation (18) s'écrit alors :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \quad (19)$$

C'est l'équation de Maxwell-Faraday.

3. MUTUELLE INDUCTION ET SELF INDUCTION.

Nous avons défini au chapitre IV § 6.5 l'induction mutuelle M entre deux circuits électriques C_1 et C_2 parcourus respectivement par des courants i_1 et i_2 . Considérons le dispositif représenté sur la figure V.6. Les deux circuits étant immobiles, le galvanomètre indique $i_2=0$. Fermons l'interrupteur K , un courant i_1 va circuler dans le circuit C_1 , celui-ci envoie, à travers C_2 , un flux magnétique :

$$\Phi = M i_1$$

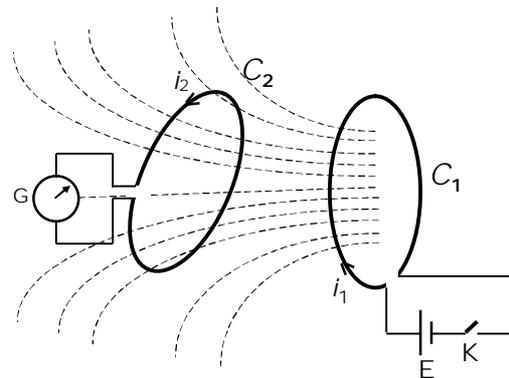


Figure V.6

Au cours du temps dt que dure cette fermeture, le courant i_1 passe de 0 à i_{1M} . Il en résulte, à travers C_2 , une variation du flux $d\Phi$ et l'apparition d'une force électromotrice induite :

$$e_2 = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (M i_1) \quad (20)$$

Comme les deux circuits sont immobiles, M ne dépend pas du temps ; d'où

$$e_2 = - M \frac{di_1}{dt} \quad (21)$$

³ Ce paragraphe n'est pas au programme du module, l'équation de Maxwell Faraday sera établie en S4 [6].

De même, si on fait varier i_2 dans C_2 , on constate, dans C_1 , la naissance d'une f.é.m. induite :

$$e_1 = - M \frac{di_2}{dt} \quad (22)$$

Le coefficient d'induction mutuelle M est le même dans ces deux expressions.

Considérons, à présent, une bobine, montée comme le montre la figure V.7. Comme précédemment, lors de la fermeture ou de l'ouverture de l'interrupteur K, la bobine est traversée par un flux proportionnel à i :

$$\Phi = L i$$

La variation du courant i entraîne l'apparition d'une f.é.m. induite :

$$e = - L \frac{di}{dt} \quad (23)$$

L est l'*inductance* ou le *coefficient de self induction* de la bobine (voir Ch IV § 6.6)

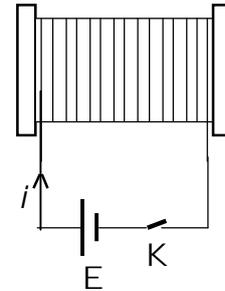
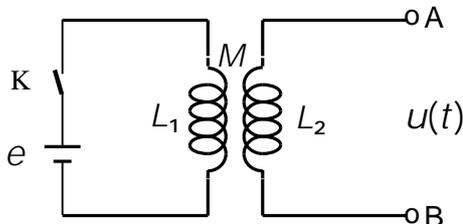


Figure V.7

Exercice V. 3. Induction mutuelle.

La figure ci-dessous représente un dispositif constitué de deux circuits électriques couplés par induction mutuelle. Le premier (circuit primaire) est alimenté par une source de force électromotrice continue e et comporte une bobine d'inductance L_1 . Le secondaire se compose d'une bobine d'inductance L_2 et peut être fermé sur une résistance R placée entre A et B. Le coefficient d'induction mutuelle est M .



- 1°) Ecrire les équations des courants lorsque le secondaire est fermé sur une résistance R .
- 2°) Le secondaire, étant ouvert, on ferme l'interrupteur K. Quelle est la valeur maximale de la f.é.m. induite dans la deuxième bobine ?

A.N : $e = 8V$, $L_1 = 0,02 H$, $M = 0,001 H$.

Solution V. 3. 1°) La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$e = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$Ri_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

2°) Lorsque le circuit est ouvert, $i_2 = 0$ et les équations précédentes deviennent

$$\left. \begin{array}{l} e = L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2 = e_2 = M \frac{di_1}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow e_2 = \frac{M}{L_1} e = 0,4 V$$

4. APPLICATIONS DES PHENOMENES D'INDUCTION.

4.1. Générateur de courant alternatif.

Une bobine, comportant N spires, tourne autour d'un axe $z'z$ vertical, à la vitesse angulaire ω constante, dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant. Le champ est perpendiculaire à $z'z$ (figure V.8). A l'instant t , la normale \vec{n} à la bobine fait avec \vec{B} un angle $\theta = \omega t$

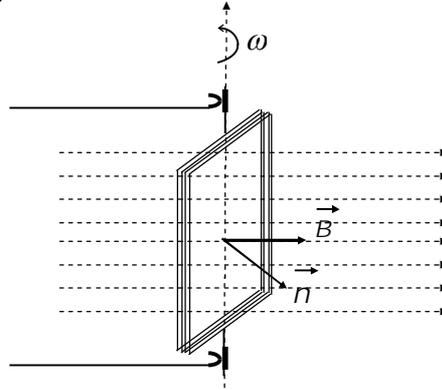


Figure V.8

Le flux magnétique embrassé à cet instant par la bobine est :

$$\Phi(t) = \Phi_M \cos \omega t \quad \text{où} \quad \Phi_M = N S B$$

Il en résulte dans la bobine une f.é.m induite :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_M \sin(\omega t) = E_M \sin(\omega t) \quad (24)$$

C'est le principe de l'alternateur monophasé.

Exercice V. 4. On considère le dispositif décrit dans le paragraphe précédent et représenté sur la figure V.8. Le cadre a une longueur $L = 12$ cm, une largeur $l = 6$ cm, et comporte $N = 250$ spires. Le champ magnétique a pour intensité $B = 0,1$ tesla. Le cadre tourne en effectuant $n = 3000$ tours par minute.

1°) Calculer la force électromotrice induite dans le cadre.

2°) Le cadre est, à présent, fermé, par l'intermédiaire d'un système "bagues balais" décrit plus haut, sur une résistance pure R . Il en résulte un courant électrique dont la valeur instantanée est i . Sachant que le cadre a une résistance r et une self L , trouver, à partir de la loi d'Ohm, la relation entre i , t , R , r et L

On néglige par la suite r et L , calculer le courant i sachant que $R = 100\Omega$.

3°) Trouver l'expression du couple électromagnétique qui s'exerce sur le cadre. Calculer sa valeur moyenne sur une période.

4°) Ce couple est opposé au couple moteur, calculer la puissance moyenne qu'il faut fournir pour maintenir le mouvement du cadre.

Solution V. 4. L'expression de la f.é.m induite a été trouvée en (24)

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = E_M \sin(\omega t)$$

avec $E_M = 2\pi f \cdot N B S$ où $f = 3000 : 60 = 50$ tours par seconde, soit une période :

$$T = 1/f = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s} \quad \text{d'où} \quad E_M = 56,52 \text{ volts}$$

2°) La loi d'Ohm permet d'écrire $e - L \frac{di}{dt} - r i = R i$ où $u(t) = R i$

est la d.d.p aux bornes de R . Si $L \neq 0$ et $r \neq 0$ l'équation précédente devient :

$$e(t) = u(t) = R i$$

$$u(t) = U_M \sin(\omega t) \Rightarrow i(t) = \frac{u}{R} = \frac{E_M}{R} \sin(\omega t) \Rightarrow I_M = \frac{E_M}{R} = 0,56 A$$

3°) Le couple électromagnétique qui s'exerce sur le cadre a pour expression:

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad \text{où} \quad \vec{M} = N i S \vec{n} \quad \text{est le moment magnétique du cadre.}$$

La valeur de son module à l'instant t est : $\Gamma = N i S B \sin \theta = N S B I_M \sin^2 \omega t$

et sa valeur moyenne est :

$$\Gamma_m = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma dt = N S B I_M \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} N S B I_M = 0,05 \text{ Nm.}$$

4°) Expression de la puissance instantanée qu'il faut fournir au cadre

$$p(t) = u(t) i(t) = U_M I_M \sin^2 \omega t$$

Valeur moyenne de la puissance.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} U_M I_M = 15,8 \text{ watts}$$

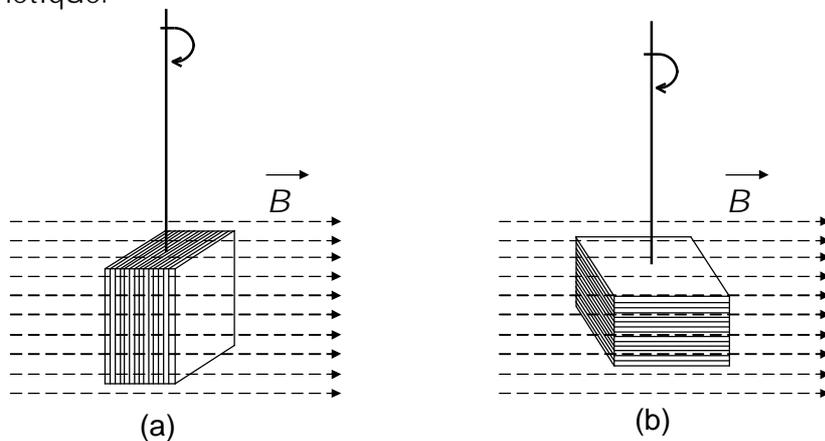
4.2. Courants de Foucault.

Des courants électriques induits, appelés "*courants de Foucault*", prennent naissance dans une masse conductrice

- lorsque cette masse se déplace dans un champ magnétique uniforme et constant,

- ou bien si la masse, étant immobile, le champ varie (voir Exercice VI.12).

Dans le premier cas, ces courants créent des forces qui, en vertu de la loi de Lenz, s'opposent au mouvement. Ce phénomène a pour application le freinage électromagnétique.



Figures V.9

Les courants de Foucault, en circulant dans la masse métallique, dissipent de l'énergie par effet Joule. Cette dissipation d'énergie entraîne un échauffement du métal.

Dans les machines électriques (les transformateurs par exemple), on diminue les pertes par courants de Foucault par l'emploi de circuits magnétiques feuilletés. Les feuilles métalliques (tôles en fer doux) sont séparées les unes des autres par un vernis isolant. Les figures V.9, mettent en évidence l'effet du feuilletage. Une masse tourne dans un champ invariant : si la masse est pleine le freinage est intense. Si la masse est feuilletée et les feuilles perpendiculaires aux lignes de champ, le

freinage diminue légèrement, mais si elles sont parallèles le freinage est nettement atténué.

Par contre les courants de Foucault sont avantageux pour la réalisation de fours à induction.

5. CIRCUIT "R.L".

Le circuit, représenté sur la figure V.10, est constitué d'une résistance R en série avec une bobine d'inductance L . Un inverseur K permet

- Soit de relier R et L à une source de courant continu de force électromotrice e ,
- Soit de les mettre en court circuit.

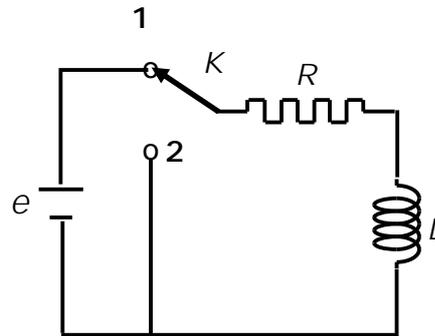


Figure V.10

5.1. Etablissement du courant.

Lorsqu'on met le commutateur sur la position 1, le courant qui traverse la résistance R commence à augmenter. En l'absence de la bobine, le courant atteint rapidement sa valeur d'équilibre $I = \frac{e}{R}$. Toutefois, en présence de la bobine, une

f.é.m d'auto-induction apparaît dans le circuit et, conformément à la loi de Lenz, cette f.é.m s'oppose à l'augmentation du courant. De ce fait, le courant ne s'établit pas instantanément. L'application de la loi des mailles au circuit de la figure V.10 permet d'écrire :

$$Ri + L \frac{di}{dt} - e = 0 \quad (25)$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e}{L} \quad (26)$$

C'est une équation différentielle de premier ordre, du même type que celle déjà obtenue lors de l'étude du circuit RC . La solution de cette équation (voir Ch III), compte tenu de la condition initiale $t = 0, i = 0$, est donnée par :

$$i = \frac{e}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right] \quad (27)$$

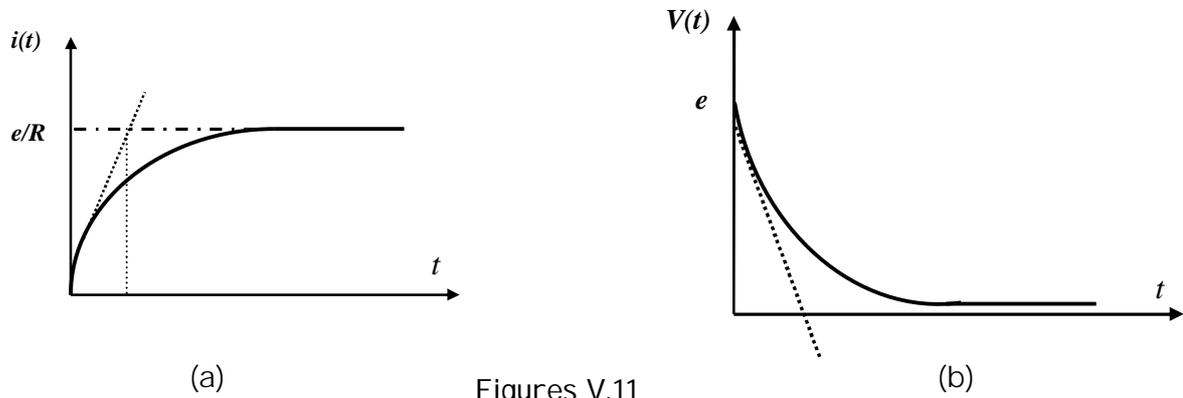
où $\tau_L = L/R$ est la constante de temps du circuit. Elle permet d'évaluer la durée pratique du régime transitoire et mesure le temps au bout duquel la valeur du courant circulant dans le circuit est égal à $1/e$ fois sa valeur finale.

L'expression de la tension aux bornes de la bobine s'obtient par dérivation, soit :

$$V = L \frac{di}{dt} = e \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (28)$$

Cette tension est maximale à la fermeture de l'interrupteur. Pendant l'établissement du courant, elle décroît avec le temps et lorsque le courant est établi, la bobine se comporte comme un fil de résistance négligeable.

Les graphes représentant l'évolution, au cours du temps, du courant et de la différence de potentiel aux bornes de la bobine sont donnés ci-dessous.



Figures V.11

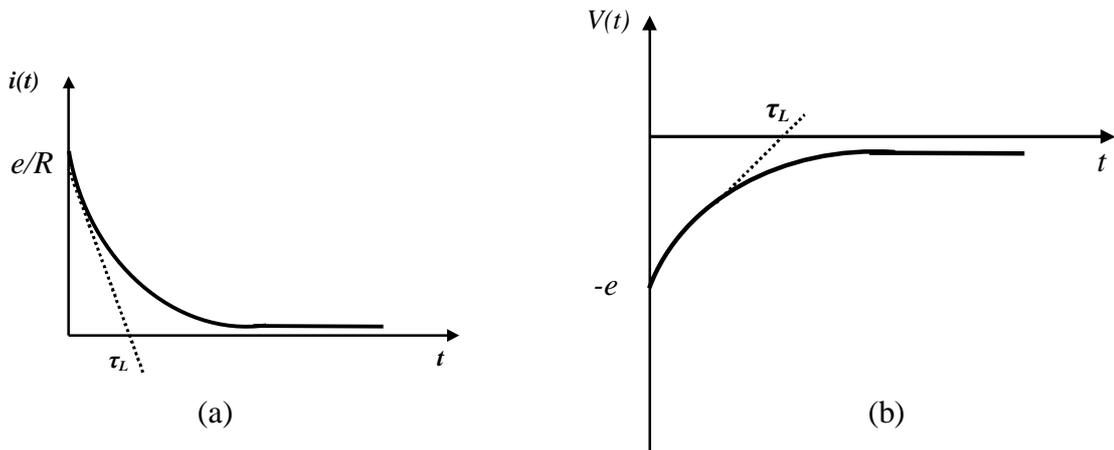
Ces figures mettent en évidence un régime transitoire et un régime permanent. Lorsque le régime permanent est atteint, on a :

$$i = I = \frac{e}{R} \quad \text{et} \quad V = 0 \tag{29}$$

5.2. Rupture du courant.

Lorsqu'on met l'inverseur en position 2, on court-circuite R et L . La loi des mailles, appliquée au circuit obtenu, permet d'écrire :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \tag{30}$$



Figures V.12

L'équation qui régit alors le courant circulant dans ce circuit est donnée par :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \tag{31}$$

C'est une équation différentielle de premier ordre dont la solution est donnée par :

$$i = \frac{e}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (32)$$

La différence de potentiel aux bornes de la bobine est alors donnée par :

$$V = L \frac{di}{dt} = -e \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (33)$$

Les allures du courant et de la différence de potentiel sont représentées, au cours du temps, sur les figures V.12.

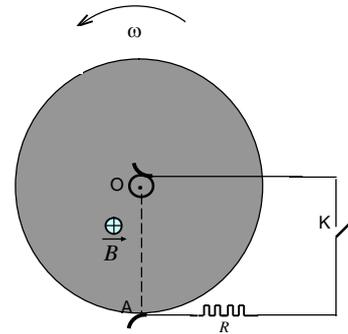
Exercice V.5.

Un disque de cuivre tourne, sans frottements, autour de son axe dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0,5 \text{ T}$ et parallèle à l'axe du disque. Lancé à la vitesse de rotation $N = 3000$ tours par minute, il est brusquement fermé sur une résistance $R = 0,1 \ \Omega$. Etablir l'équation du mouvement. En déduire le temps au bout duquel la vitesse de rotation atteint le centième de sa valeur initiale.

Les caractéristiques du disque sont :

Diamètre $d = 30 \text{ cm}$, épaisseur $a = 1 \text{ mm}$, masse volumique $\rho_M = 8,96 \text{ gr/cm}^3$

On néglige la résistance électrique du disque et les frottements mécaniques.



Solution V.5. Le flux coupé, en dt , par chaque rayon du disque qui se trouve en OA est :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$$

où dS est la variation de la surface balayée au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \text{d'où la f.é.m induite : } e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} r^2 B \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} r^2 B \omega$$

$$\omega = 2\pi n \text{ est la vitesse angulaire à l'instant } t \Rightarrow e = -\pi r^2 B n$$

n est le nombre de tours par seconde.

Au moment de la fermeture de l'interrupteur, la f.é.m est : $e_0 = 1.76 \text{ V}$.

Au cours du mouvement la diminution de l'énergie cinétique acquise par le disque sera, pendant dt , entièrement dissipée par effet joule dans R :

$$-d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = R I^2 dt = \frac{e^2}{R} dt \quad \Rightarrow \quad -J \omega d\omega = \frac{1}{4R} \omega^2 r^4 B^2 dt$$

où $J = \frac{1}{2} m r^2$ est le moment d'inertie du disque.

$$\text{En posant } \alpha = \frac{1}{4RJ} r^4 B^2 \quad \text{on a : } \frac{d\omega}{\omega} = -\alpha dt \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_0 \exp(-\alpha t) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\text{A.N : } \quad \alpha = 4,44 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad t = 104 \text{ s} = 1 \text{ mn } 44 \text{ s}$$

5.3. Bilan énergétique

Considérons le bilan des énergies depuis la fermeture du circuit jusqu'à l'établissement du courant. En multipliant l'équation de la maille, donnée en 25, par $i dt$, nous obtenons :

$$d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 dt = e i dt$$

$e i dt$ représente l'énergie fournie par le générateur entre les instants t et $t + dt$.

$Ri^2 dt$ est l'énergie dissipée dans la résistance R entre t et $t + dt$.

$d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ correspond à l'énergie emmagasinée dans la bobine.

Durant l'établissement du courant dans le circuit, le générateur fournit l'énergie

$$W_G = \int_0^\infty e i dt = LI^2 \quad (34)$$

Une partie de cette énergie est stockée dans la bobine, soit

$$W_L = \int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{1}{2}LI^2 \quad (35)$$

Le reste est dissipé par effet Joule dans la résistance, soit :

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2}LI^2 \quad (36)$$

Au cours de la rupture du courant, la bobine restitue entièrement l'énergie qu'elle a emmagasinée lors de l'établissement du courant, sous forme de chaleur dans la résistance R . Cette énergie a été stockée par la bobine sous forme magnétique et la restitue sous forme d'énergie électrique.

5.4. Localisation de l'énergie : Densité d'énergie magnétique.

Considérons le cas d'une bobine dont le coefficient de self induction est (voir Ch IV, formule 39)

$$L = \mu_o \frac{N^2}{l} S$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans cette bobine est d'après (35):

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

Or le champ magnétique à l'intérieur de la bobine (solénoïde de longueur infinie) est (voir Ch IV, formule 27) :

$$B = \mu_o \frac{N}{l} I \quad \text{d'où :} \quad W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} Sl$$

La densité d'énergie magnétique localisée dans le champ magnétique (région de l'espace située à l'intérieure de la bobine) est :

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \quad \text{ou bien} \quad W = \frac{1}{2} \mu_o H^2 \quad (37)$$

N.B : 1°) Cette formule, établie dans le cas particulier du solénoïde, est générale.

2°) Noter l'analogie entre la densité d'énergie localisée dans un champ magnétique et celle qui est localisée dans un champ électrique (voir Ch II, § 4.5).

Exercices : Chapitre V

Exercice V.6. Un cadre métallique rectangulaire de côtés l et L , est en mouvement de translation, rectiligne et uniforme, de vitesse $\vec{V} = v\vec{i}$ dans le plan zox . Ce cadre est soumis à l'action d'un champ magnétique vertical stationnaire et non uniforme, dont la variation linéaire, en fonction de x , est représentée sur la figure (a).

1°) Déterminer l'expression de la f.é.m induite e_0 dans le cadre, pour un déplacement de ce dernier de $x=0$ à $x=D-l$.

2°) Reprendre la même question dans le cas d'un déplacement de $x=D-l$ à $x=D$.

AN : $B_0 = 0,1\text{ T}$, $l = 0,5\text{ m}$, $L = 0,4\text{ m}$, $D = 5\text{ m}$, $v = 0,5\text{ m/s}$

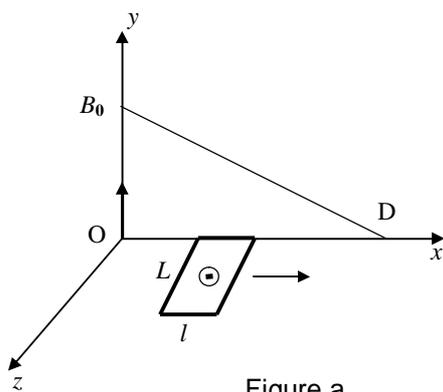


Figure a

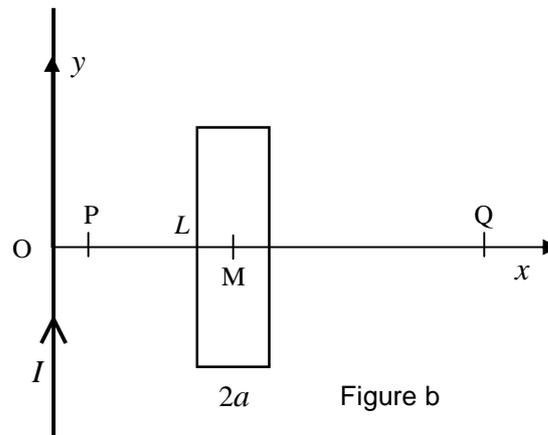


Figure b

Exercice V.7. Un fil conducteur, rectiligne, de longueur supposée infinie, parallèle à l'axe oy , est parcouru par un courant continu d'intensité I (figure b).

1°) Calculer, en un point M d'abscisse x , le champ magnétique créé par ce courant.

2°) Un cadre métallique comportant N spires rectangulaires de côtés L , parallèles à oy , et $l = 2a$, parallèles à ox , est en mouvement de translation, rectiligne et uniforme, de vitesse v parallèle à ox . Déterminer la f.é.m e induite dans le cadre, lorsque le centre M du cadre est en x . Tracer la courbe représentative de la fonction $e(x)$ lorsque M est en mouvement du point P au point Q .

AN : $I = 5\text{ A}$, $L = 20\text{ cm}$, $a = 5\text{ cm}$, $N = 100$, $v = 1,5\text{ m/s}$, $OP = 0,25\text{ m}$, $OQ = 5\text{ m}$

Exercice V.8. On reprend l'exercice IV.2 de la page 101. Le cadre mobile, constitué de N spires rectangulaires de longueur l , et de largeur $2a$, est à présent fermé sur lui-même. Il peut tourner, autour de l'axe zz' , dans un champ magnétique B radial.

1°) Calculer le flux coupé par les $2N$ fils de longueur l , au cours d'une rotation élémentaire $d\alpha$ du cadre. En déduire la f.e.m. induite e dans le cadre.

2°) On néglige le coefficient de self induction L du cadre. Calculer le courant induit i qui circule dans le cadre sachant que la résistance électrique de dernier est R .

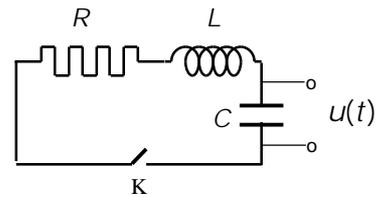
3°) Calculer le couple de freinage électromagnétique qui s'exerce sur le cadre au cours d'une rotation élémentaire $d\alpha$ de ce dernier.

4°) Un couple de rappel Γ_r dû à un ressort de constante C s'exerce sur le cadre. On appelle J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe zz' , et on néglige les frottements mécaniques (freinage visqueux). Ecrire l'équation du mouvement du cadre.

Exercice V.9. **Circuit R,L,C en régime libre.**

Le circuit électrique, représenté sur la figure ci-dessous, comporte une résistance R , une bobine de self induction L et un condensateur de capacité C placé en série avec un interrupteur K .

L'interrupteur K étant ouvert, on charge le condensateur jusqu'à la valeur q_0 , puis on ferme K. Un courant électrique $i(t)$ circule dans le circuit pendant un certain temps puis s'annule.



1°) Ecrire l'équation qui relie $i(t)$ aux caractéristiques R, L, C du circuit.

2°) En déduire l'équation différentielle qui donne la charge $q(t)$ et la différence de potentiel $u(t)$ aux bornes du condensateur.

3°) On pose : $\alpha = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

α est le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre du circuit
Résoudre cette équation dans les trois cas suivants :

a) $\alpha < \omega_0$ b) $\alpha > \omega_0$ c) $\alpha = \omega_0$

4°) Tracer la courbe représentative de la fonction $q(t)/q_0$ dans le cas suivant :

$$R = 0,7 \, \Omega, \quad L = 0,5 \, \text{mH}, \quad \text{et} \quad C = 200 \, \mu\text{F}.$$

C'est une sinusoïde amortie de pseudo période T . Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ? Quelle erreur commet-on en confondant T et la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$?

Calculer la charge du condensateur au bout de $t = T_0$

5°) L et C gardant les mêmes valeurs, quelle doit être la valeur de la résistance R pour avoir $\alpha = \omega_0$. Tracer la courbe $q(t)/q_0$. Calculer la charge du condensateur au bout de $t = T_0$ et $t = 1,5 T_0$

6°) Dans le cas où $R = 6 \, \Omega$, L et C gardant les mêmes valeurs, calculer la charge du condensateur au bout de $t = T_0$

Tableau V.1. Equations de Maxwell en régimes quasi stationnaires

Dans ce cours, nous avons mis en évidence les quatre équations de Maxwell que nous présentons, ci-dessous, sous forme intégrale

Théorème de Gauss	$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$	Valable dans tous les cas
Conservation du flux	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	Valable dans tous les cas
Equation Maxwell Ampère	$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$	Valable en régimes quasi stationnaires
Equation Maxwell Faraday	$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$	Valable dans tous les cas

Chapitre VI

LES COURANTS ALTERNATIFS

Après avoir traité dans le chapitre III les circuits en régime continu, nous abordons maintenant, l'étude des circuits alimentés par des tensions alternatives sinusoïdales.

1. LES COURANTS ALTERNATIFS.

1.1 Définitions.

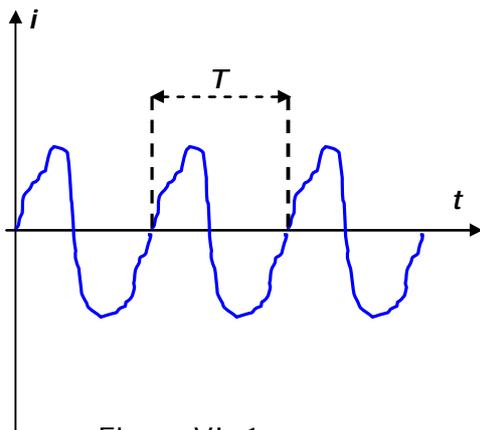


Figure VI. 1

Un courant est alternatif s'il change de sens au cours du temps t ; en outre, il est périodique si son intensité i reprend la même valeur à des intervalles de temps égaux à T . On a alors :

$$i = f(t) = f(t + nT) \quad (1)$$

n est un nombre entier.

T est la période et son inverse f est la fréquence :

$$f = \frac{1}{T} \quad (2)$$

La période est mesurée en secondes et la fréquence en hertz (Hz).

1.2. Les courants sinusoïdaux.

Un courant alternatif est sinusoïdal, lorsque son intensité est une fonction sinusoïdale du temps :

$$i = I_M \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad i = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$

i est la valeur instantanée du courant,
 I_M sa valeur maximale ou amplitude,
 ω la pulsation ou fréquence angulaire
et φ la phase :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

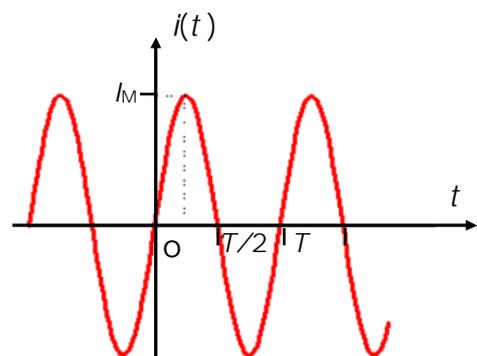


Figure VI. 2

¹ Un changement de l'origine des phases de $\pi/2$ donne l'une ou l'autre des deux expressions.

Intensité efficace.

La valeur efficace d'un courant alternatif est définie comme la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période. Elle s'écrit :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (4)$$

Dans le cas d'un courant alternatif sinusoïdal, on obtient:

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

La valeur instantanée d'un tel courant s'écrit alors :

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Le courant efficace I équivaut à un courant continu qui dissiperait la même puissance dans une même résistance. (**Exercice VI.6**)

1.3 Production des courants sinusoïdaux.

Selon l'application à laquelle ils sont destinés, les courants sinusoïdaux peuvent être produits de plusieurs manières². Lorsque la puissance consommée par la charge est importante, on utilise des générateurs dont le principe, décrit ci-dessous, fait appel aux lois de l'induction électromagnétique.

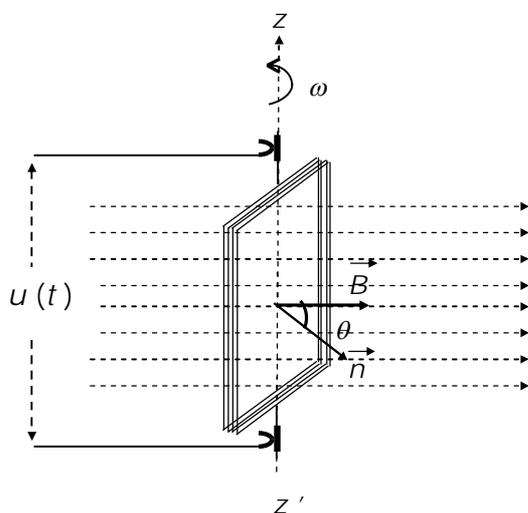


Figure VI. 3

Le principe de production de tensions sinusoïdales monophasées a été étudié au chapitre V, § 4.1.

Soit une bobine à N spires tournant, autour de l'axe $z'z'$ à la vitesse angulaire constante ω , dans un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à $z'z'$.

Nous avons trouvé que la f.é.m. induite dans la bobine est :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_M \sin(\omega t) = E_M \sin(\omega t)$$

Il en résulte, aux bornes de la bobine une différence de potentiel, ou tension sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω .

On obtient le même résultat si le cadre est fixe et si le champ tourne à la vitesse angulaire ω . C'est le principe de l'alternateur monophasé.

² En électronique, les courants sinusoïdaux sont produits par des circuits oscillants électroniques (générateurs de fonctions). Les puissances, mises en jeu dans ce cas, sont faibles.

On choisit une origine des phases qui permet d'écrire :

$$u(t) = U_M \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

U est la valeur efficace de la tension $u(t)$.

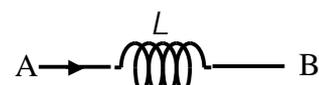
Lorsque le générateur est relié à une charge, il débite en régime permanent, un courant sinusoïdal de même pulsation ω et déphasé d'un angle φ par rapport à $u(t)$.

2. LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF SINUSOÏDAL.

Les lois d'Ohm s'appliquent au courant alternatif sinusoïdal. Elles s'expriment, à chaque instant³, dans le cas d'éléments simples, comme suit :



$$u_A - u_B = R i$$



$$u_A - u_B = L \frac{di}{dt}$$



$$u_A - u_B = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

La mise en série des trois éléments R , L et C est représentée par le circuit de la figure ci-dessous :

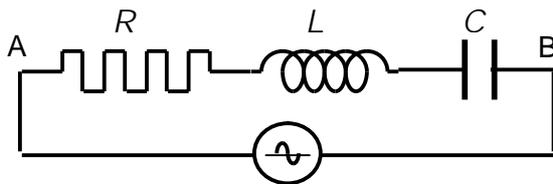


Figure VI. 4

On applique, aux bornes de A et B du circuit une tension : $u(t) = U_M \cos(\omega t)$,

on a :

$$u(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (6)$$

C'est l'équation de l'oscillateur électrique amorti en régime forcé sinusoïdal⁴. La solution générale de cette équation est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. La première n'intervient que durant le régime transitoire, la seconde :

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

constitue la solution du régime permanent.

φ est le déphasage du courant par rapport à la tension.

Il s'agit à présent de déterminer la valeur maximale I_M (ou la valeur efficace I) du courant et son déphasage φ à partir de la tension :

$$u(t) = U_M \cos(\omega t) \quad (8)$$

³ En régime quasi stationnaire, le courant a la même valeur, à chaque instant, le long de tout le circuit (Voir Ch. V. Note 2)

⁴ Le régime sinusoïdal forcé sera traité en S3

Nous allons pour cela, utiliser deux méthodes

- une méthode symbolique : la " notation complexe "
- une méthode vectorielle : la " représentation de Fresnel "

2.1. La notation complexe.

Un récepteur, soumis à une tension alternative sinusoïdale de la forme

$$u(t) = U_M \cos(\omega t)$$

est parcouru par un courant $i(t)$ déphasé de φ par rapport à la tension :

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$

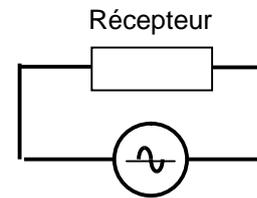


Figure VI . 5

$i(t)$ et $u(t)$ étant des grandeurs sinusoïdales, elles peuvent être considérées comme les parties réelles des fonctions complexes suivantes :

$$\bar{u}(t) = U_M \exp(j \omega t) \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = I_M \exp[j(\omega t + \varphi)]$$

$$\text{ou} \quad \bar{u}(t) = \bar{U}_M \exp(j \omega t) \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = \bar{I}_M \exp(j \omega t) \quad (9)$$

avec,

$$j^2 = -1$$

\bar{U}_M et \bar{I}_M sont respectivement les amplitudes complexes de la tension et du courant :

$$\bar{U}_M = U_M \exp(j 0) \quad \bar{I}_M = I_M \exp(j \varphi)$$

En considérant les valeurs efficaces, on obtient :

$$\bar{U} = U \exp(j 0) \quad \text{et} \quad \bar{I} = I \exp(j \varphi) \quad (10)$$

Ces expressions contiennent les valeurs efficaces U et I de $u(t)$ et $i(t)$ et leurs déphasages 0 et φ par rapport à une origine des phases.

Considérons le circuit R, L, C de la figure 4 ; il est régi par l'équation (6) :

$$u(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

En remplaçant $u(t)$ et $i(t)$ par leurs expressions données en (9), il vient :

$$U \sqrt{2} \exp(j \omega t) = \left[R + j L \omega - \frac{j}{C \omega} \right] I \sqrt{2} \exp(j \omega t) \exp(+j \varphi)$$

Soit en introduisant les valeurs complexes de la tension et du courant :

$$\bar{U} = \left[R + j \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right) \right] \bar{I} \quad (11)$$

La notation complexe a permis de transformer une équation intégro-différentielle (6) en une équation algébrique linéaire (11).

Impédance complexe.

L'équation (11) peut être présentée sous la forme :

$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (12)$$

\bar{Z} est, par définition, l'*impédance complexe* du circuit électrique. L'équation (12) est l'expression de la loi d'Ohm en notation complexe.

A partir de (10) et (12), on a :

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} \exp(-j\varphi) = Z \exp(-j\varphi)$$

Le module de l'impédance complexe

$$Z = |\bar{Z}| \quad (13)$$

est l'*impédance* du circuit considéré et φ le *déphasage*, entre le courant et la tension, introduit par l'impédance Z .

L'impédance complexe d'un circuit électrique s'écrit, sous forme cartésienne:

$$\bar{Z} = R + jX \quad (14)$$

où R est sa *résistance* et X sa *réactance*, ou bien sous forme polaire:

$$\bar{Z} = Z \exp(j\alpha) .$$

Avec la loi d'Ohm donnée en (12), et à partir des résultats précédents, on a:

$$U \exp(j0) = Z \exp(j\alpha) I \exp(j\varphi) \Rightarrow \alpha = -\varphi$$

D'où l'expression, sous forme polaire, de l'impédance complexe \bar{Z} :

$$\bar{Z} = Z \exp(-j\varphi) \quad (15)$$

avec $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\varphi = -\arctan\left(\frac{X}{R}\right)$

L'inverse de l'impédance est appelé *admittance* et est noté \bar{Y} .

Application à des cas simples

Résistance :

$$\bar{Z} = R \Rightarrow \bar{Z} = R \exp(+j0) \Rightarrow Z = R \text{ et } \varphi = 0 \quad (16)$$

Self pure :

$$\bar{Z} = jL\omega \Rightarrow \bar{Z} = L\omega \exp\left(+j\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Z = L\omega \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (17)$$

Condensateur pur :

$$\bar{Z} = -j\frac{1}{C\omega} \Rightarrow \bar{Z} = \frac{1}{C\omega} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Z = \frac{1}{C\omega} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

N.B : Ces valeurs de φ , portées dans les expressions (10), montrent que le courant est :

- en phase avec la tension dans le cas d'une résistance R ,
- en retard de $\pi/2$ sur la tension dans le cas d'une self
- et en avance de $\pi/2$ dans le cas d'une capacité.

2.2. La représentation de Fresnel.

Principe de la méthode de Fresnel.

La méthode de Fresnel permet d'effectuer la somme de deux ou plusieurs grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω . Son principe est le suivant :

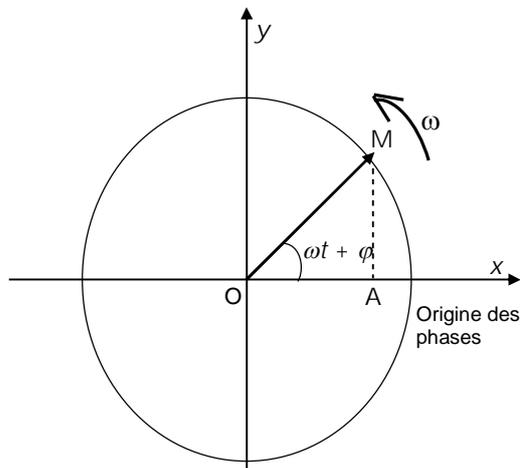


Figure VI. 6.a

Considérons un vecteur \overrightarrow{OM} , de module A , qui tourne autour d'un point fixe O à la vitesse constante ω . A l'instant $t = 0$, il fait un angle φ avec l'axe \overrightarrow{Ox} (figure VI.6.a).

A l'instant t , il fait un angle $(\omega t + \varphi)$ avec l'axe \overrightarrow{Ox} . La projection OA de ce vecteur sur \overrightarrow{Ox} est :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Ainsi, lorsque le vecteur \overrightarrow{OM} tourne autour de O , sa projection x sur l'axe effectue un mouvement vibratoire sinusoïdal d'élongation

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Composition de deux vibrations sinusoïdales.

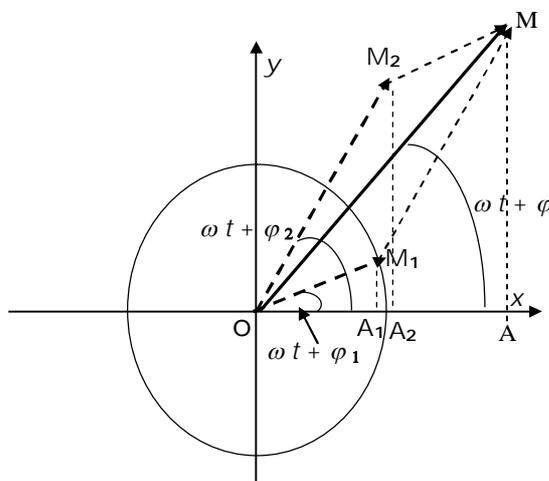


Figure VI. 6.b

Considérons deux mouvements vibratoires parallèles de même fréquence angulaire ω :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

A un instant t , ces vibrations peuvent être représentées respectivement, par les vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$. Ces derniers représentent les projections sur \overrightarrow{Ox} des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ tournant à la même vitesse ω .

On sait que la projection sur un axe de la somme de plusieurs vecteurs a comme valeur, la somme algébrique des projections de ces vecteurs sur cet axe, soit :

$$X = X_1 + X_2 \quad (19)$$

où, x est la projection du vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \quad (20)$$

OM est la diagonale du parallélogramme OM_1MM_2 . Ce dernier tourne à la vitesse ω sans se déformer. La figure VI.6.b montre une représentation de ces vecteurs à un instant t .

Ainsi, la construction de Fresnel permet de remplacer le calcul de la somme de plusieurs fonctions trigonométriques (équation 19) de même pulsation ω par une construction géométrique (équation 20) plus simple.

Règle de Fresnel.

Le vecteur de Fresnel associé à la somme de plusieurs vibrations, s'obtient en faisant la somme vectorielle des vecteurs de Fresnel associés à chacune des vibrations.

Exercice VI. 1. : Effectuer par la méthode de Fresnel, la somme des grandeurs sinusoïdales :

$$x_1 = 3 \sin \omega t \quad x_2 = 4 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

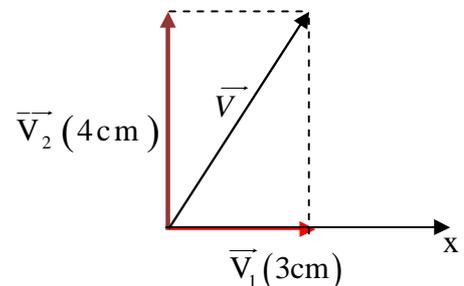
Solution VI.1.

$$x_1 \rightarrow \vec{V}_1 : \|\vec{V}_1\| = 3 \text{ cm}, \quad \varphi_1 = (\overrightarrow{Ox}, \vec{V}_1) = 0$$

$$x_2 \rightarrow \vec{V}_2 : \|\vec{V}_2\| = 4 \text{ cm}, \quad \varphi_2 = (\overrightarrow{Ox}, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$x \rightarrow \vec{V} : \|\vec{V}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 5 \text{ cm}, \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{x_2}{x_1} = 1.33 \Rightarrow \varphi = 53^\circ (0.3\pi)$$

$$\text{D'où,} \quad x = x_1 + x_2 = 5 \sin(\omega t + 0.3\pi) \quad \Rightarrow \quad x = 5 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + 0,15 \right)$$



Impédance et déphasage.

Dans la construction de Fresnel, le choix de l'origine des phases est arbitraire. De ce fait, on choisit la phase de l'intensité du courant comme origine et on écrit:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t) \quad (21)$$

La d.d.p aux bornes d'un circuit parcouru par un tel courant devient alors :

$$u(t) = U_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (22)$$

φ représente le déphasage entre l'intensité du courant et la tension ; il peut être positif ou négatif.

Circuit formé d'une résistance pure

La résistance R du circuit, de la figure VI.7.a, est traversée par un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

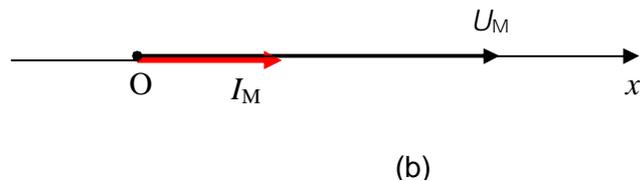
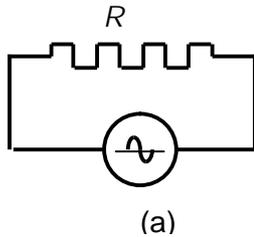
La d.d.p à ses bornes s'écrit d'après la loi d'Ohm : $u(t) = R i(t)$

Soit : $U_M \cos(\omega t + \varphi) = R \cdot I_M \cos(\omega t)$

En identifiant les deux membres de cette équation (21), on obtient :

$$U_M = R I_M \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad (23)$$

L'impédance du circuit étudié est égale à sa résistance R .



Figures VI. 7

Dans la représentation de Fresnel, le courant et la tension sont en phase

Circuit formé d'une self pure.

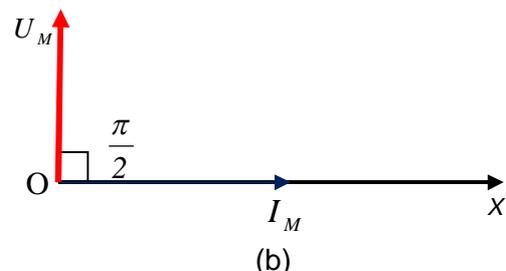
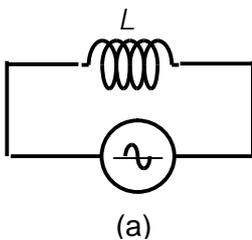
La bobine de self inductance L du circuit représenté sur la figure VI.8.a, est parcourue par un courant $i(t) = I_M \cos(\omega t)$: il en résulte une d.d.p aux bornes de

la self :

$$u(t) = L \frac{di}{dt}$$

D'où, $U_M \cos(\omega t + \varphi) = -L\omega \cdot I_M \sin(\omega t) = L\omega \cdot I_M \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

soit : $U_M = L\omega I_M$ et $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ (24)



Figures VI. 8

En considérant les valeurs efficaces, on obtient :

$$U = L\omega I = Z I \quad \text{soit} \quad Z = L\omega \quad (25)$$

Z est l'impédance de la self.

Dans la représentation de Fresnel (figure.VI.8.b), le courant dans la self est en retard de $\pi/2$ par rapport à la d.d.p à ses bornes ; (ou la d.d.p aux bornes de la self est en avance de $\pi/2$ sur le courant qui la parcourt).

Circuit formé d'un condensateur pur.

Le circuit, de la figure VI.9.a, est parcouru par un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

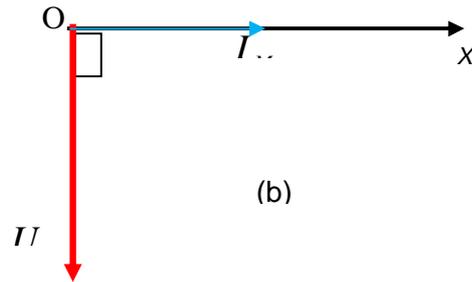
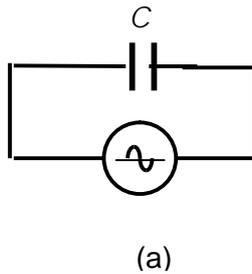
La d.d.p aux bornes du condensateur de capacité C est donnée par la loi d'Ohm :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\text{D'où : } U_M \cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_M}{C\omega} \sin(\omega t) = \frac{I_M}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (26)$$

A partir de l'équation (26), on obtient :

$$U_M = \frac{1}{C\omega} I_M \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (27)$$



Figures VI. 9

En considérant les valeurs efficaces, on a :

$$U = \frac{1}{C\omega} I = Z I \quad \text{soit} \quad Z = \frac{1}{C\omega} \quad (28)$$

Z représente l'impédance du condensateur de capacité C .

Dans le diagramme de Fresnel (Figure VI.9.b), la d.d.p aux bornes du condensateur est en retard de $\pi/2$ sur le courant. Ou inversement, le courant présente une avance de $\pi/2$ sur la d.d.p.

N.B : Les signes des déphasages φ des expressions (24) et (27) ont changé par rapport à ceux des φ des expressions (17) et (18), l'origine des phases n'étant plus la même. Cependant quelque soit le choix de cette origine, le courant est toujours:

- en phase avec la tension dans le cas d'une résistance R ,
- en retard de $\pi/2$ sur la tension dans le cas d'une self
- et en avance de $\pi/2$ dans le cas d'une capacité.

Etude du circuit R, L, C série.

Un courant d'intensité $i(t) = I_M \cos(\omega t)$ circule dans le circuit de la figure VI.10.a. La d.d.p aux bornes du circuit est donnée par la loi d'Ohm :

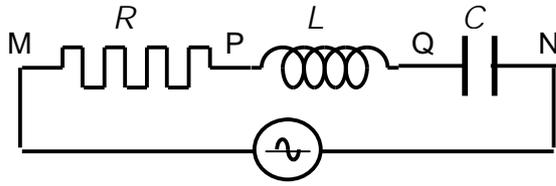
$$u(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{avec} \quad i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

Sachant que :

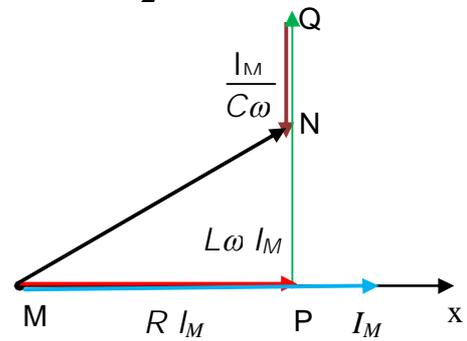
$$u_M - u_p = R i = R I_M \cos(\omega t)$$

$$u_P - u_Q = L \frac{di}{dt} = L\omega I_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$u_Q - u_N = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_M}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



(a)



(b)

Figures VI. 10

L'expression de $u(t)$ devient :

$$u(t) = U_M \cos(\omega t) = R I_M \cos(\omega t) + L\omega I_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{I_M}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (29)$$

En utilisant les résultats trouvés ci-dessus, on trace le diagramme de Fresnel (Figure VI.10.b) correspondant à l'équation (29).

La d.d.p $u(t)$ aux bornes du circuit est représentée par le vecteur \overline{MN} . Son module, qui représente la valeur maximale U_M de cette d.d.p, et le déphasage φ peuvent être calculés à partir du triangle MPN rectangle en P.

$$U_M = \sqrt{R^2 + \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]^2} I_M \text{ et } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad (30)$$

Si on pose
$$U_M = Z I_M$$

L'impédance du circuit s'écrit alors :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]^2} \quad (31)$$

Remarques : 1°) Dans la méthode de Fresnel, les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales, tension $u(t)$, courant $i(t)$, flux $\Phi(t)$, etc. sont représentées par des vecteurs \vec{U} , \vec{I} , $\vec{\Phi}$...etc.. On peut leur appliquer les règles de l'addition vectorielle. Par exemple, en ce qui concerne les courants, la loi des nœuds de Kirchhoff (voir exercice VI. 13 : Méthode des trois ampèremètres).

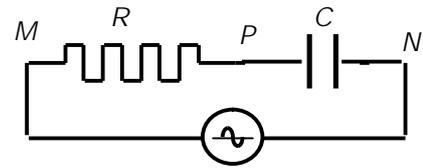
2°) Certains auteurs écrivent la loi d'Ohm sous la forme :

$$\vec{U} = Z \vec{I}$$

\vec{U} et \vec{I} sont des vecteurs mais Z est un opérateur : On multiplie \vec{I} par Z et on fait subir au vecteur ainsi obtenu une rotation d'un angle φ pour obtenir \vec{U} .

Exercice VI .2. Circuit RC

Le circuit de la figure ci-contre, constitué d'une résistance R et d'un condensateur C placés en série, est parcouru par un courant sinusoidal de la forme $i(t) = I_M \cos(\omega t)$.



En utilisant la représentation de Fresnel, déterminer l'impédance équivalente du circuit ainsi que le déphasage entre la d.d.p $u(t)$ et le courant qui le parcourt.

A.N. $\omega = 5 \cdot 10^3$ rd/s, $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 0,22 \mu\text{F}$

Solution VI .2. : La d.d.p aux bornes du circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri + \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{avec} \quad i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

Sachant que :

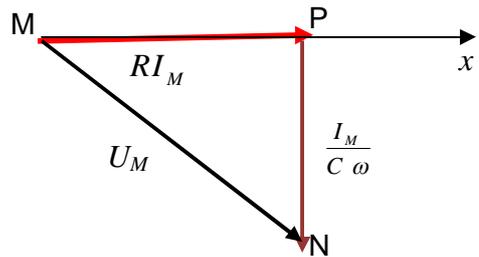
$$V_M - V_P = Ri = RI_M \cos(\omega t)$$

$$V_P - V_N = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_M}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

et que : $\frac{U_M}{I_M} = Z$

on obtient à partir du triangle MPN rectangle en P :

$$Z = \frac{U_M}{I_M} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{RC\omega}$$



A.N : on trouve $Z = 1.35 \text{ k}\Omega$, et $\varphi = 0.74 \text{ rad} (42^\circ)$

3. ASSOCIATION DES IMPEDANCES.

Les lois, relatives aux associations des résistances en courants continus énoncées au chapitre III, restent valables en courants sinusoidaux lorsqu'on utilise les impédances complexes.

3.1. Impédances montées en série.

La figure ci-contre montre que :

$$\bar{U} = \bar{U}_{AB} = \bar{U}_{AM} + \bar{U}_{MN} + \bar{U}_{NB}$$

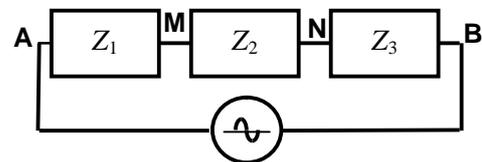


Figure VI . 11

Toutes les impédances sont traversées par le même courant i .

$$\bar{U} = \bar{Z} \bar{I} = \bar{Z}_1 \bar{I} + \bar{Z}_2 \bar{I} + \bar{Z}_3 \bar{I} = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \bar{I}$$

Dans le cas de n impédances, on obtient :

$$\bar{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i \tag{32}$$

3.2. Impédances montées en parallèle.

La figure ci-contre montre que :

$$\bar{U} = \bar{Z} \bar{I} = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 = \bar{Z}_2 \bar{I}_2 = \bar{Z}_3 \bar{I}_3$$

L'équation du nœud en A donne ;

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

D'où,
$$\bar{I} = \bar{U} \left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right]$$

Dans le cas de n impédances, on obtient

$$\bar{I} = \bar{U} \left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \right] = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i} \quad (33)$$

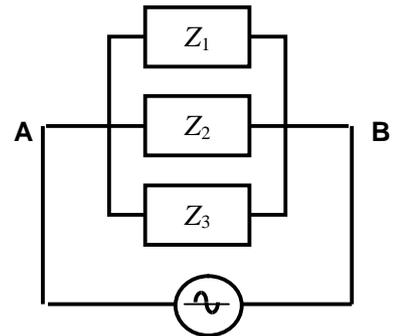
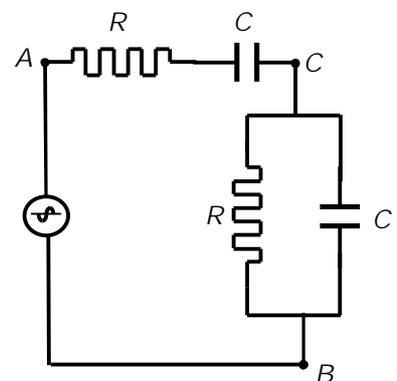


Figure VI. 12

Exercice IV.3

Déterminer l'impédance Z_{AB} équivalente au circuit alimenté par la tension $u(t)$ et représenté sur la figure ci-contre.

A.N : $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $f = 5 \text{ kHz}$



Solution IV.3.

$$Z_{AB} = Z_{AC} + Z_{CB}$$

avec: $Z_{AC} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jC\omega R}{jC\omega}$ et $Z_{CB} = \frac{R}{1 + jC\omega R}$

D'où : $Z_{AB} = \frac{1 + jC\omega R}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jC\omega R}$

Soit :
$$\bar{Z}_{AB} = \frac{-jC\omega(1 + jC\omega R)}{(C\omega)^2} + \frac{R(1 - jC\omega R)}{1 + (RC\omega)^2}$$

Finalement, on trouve après calculs :
$$\bar{Z}_{AB} = R \left(1 + \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} \right) - j \left(\frac{1}{C\omega} + \frac{R^2 C \omega}{1 + (RC\omega)^2} \right)$$

A.N. $Z_{AB} = (1 + j0,4)10^3 \text{ }\Omega$ Z polaire : $Z = 1,03 \cdot 10^3 \text{ }\Omega$ et $\varphi = 22^\circ$

3.3. Etude du circuit R, L, C série : Résonance.

Le circuit de la figure ci-contre constitué d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine de self inductance L montés en série, est alimenté par une tension sinusoïdale de la forme : $u(t) = U_M \cos(\omega t)$

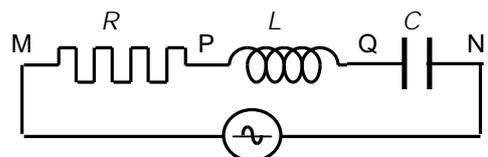


Figure VI. 13

Les trois impédances : $\bar{Z}_1 = R$, $\bar{Z}_2 = j L \omega$ et $\bar{Z}_3 = -\frac{j}{C \omega}$ étant montées en série, la formule (32) donne :

$$\bar{Z} = R + j L \omega - \frac{j}{C \omega} \quad \text{soit} \quad \bar{Z} = R + j \left[L \omega - \frac{1}{C \omega} \right] \quad (34)$$

ou sous forme polaire

$$\bar{Z} = Z e^{-j \varphi} \quad \text{avec,} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left[L \omega - \frac{1}{C \omega} \right]^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C \omega} - L \omega \right) \quad (35)$$

Où φ représente le déphasage entre la tension

$$u(t) = U_M \cos(\omega t) \quad \text{et le courant} \quad i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi).$$

Il est intéressant d'étudier les variations de l'impédance Z ou celles de l'intensité efficace $I = U/Z$ en fonction de la pulsation ω . Les figures VI.14 illustrent les évolutions de ces grandeurs en fonction de ω .

A partir des graphes des figures VI.14, on note que :

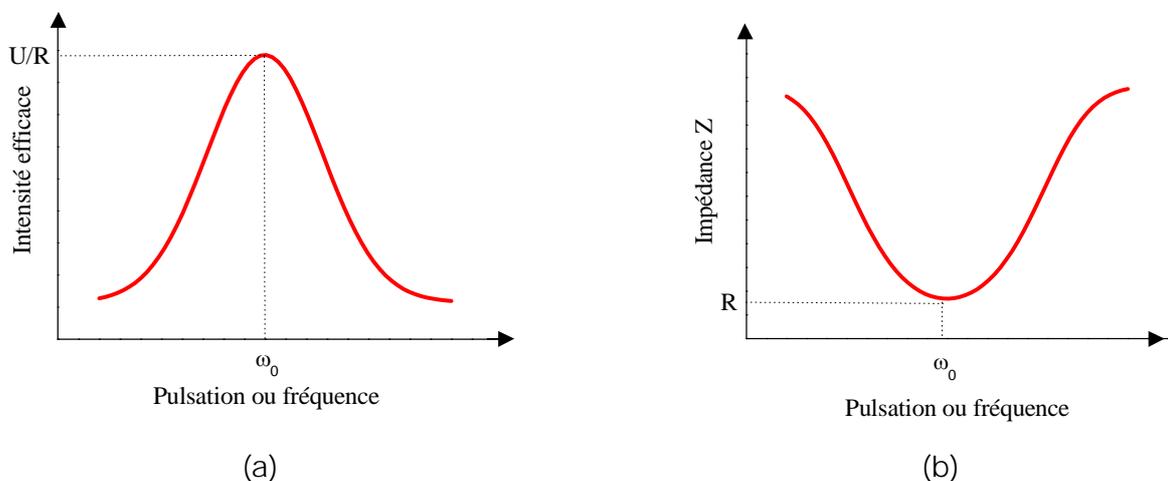
$$\text{lorsque} \quad \left[L \omega - \frac{1}{C \omega} \right]^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad LC \omega^2 = 1 \quad (36)$$

l'impédance Z est minimale et vaut R ; l'intensité I est maximale et vaut U/R .

$$\text{La pulsation } \omega \text{ a pour valeur:} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (37)$$

ω_0 ne dépend que des caractéristiques L et C du circuit électrique qui constitue un oscillateur électrique. C'est la raison pour laquelle ω_0 est appelée *pulsation propre* de l'oscillateur et f_0 sa *fréquence propre*.

Lorsque la fréquence de l'excitation $u(t)$ se rapproche de la fréquence propre de l'oscillateur, ce dernier entre en résonance.



Figures VI. 14

A la résonance, plusieurs phénomènes sont observés, à savoir :

- Les tensions V_L et V_C aux bornes de la bobine et du condensateur sont algébriquement opposées et la d.d.p aux bornes du circuit résulte uniquement de la présence de la résistance.
- Les tensions V_L et V_C peuvent à la résonance, valoir plusieurs centaines de fois la tension appliquée : on dit alors qu'il y a un phénomène de *surtension*.
- La formule (35) montre que le déphasage entre le courant et la tension d'excitation est nul.

Exercice VI. 4. On considère un circuit R, L, C monté en série (figure VI.13) et soumis à une d.d.p

$$u(t) = U \sqrt{2} \sin(\omega t).$$

On donne : $U = 2$ volts, $L = 0,4$ mH, $C = 400$ pF, $R = 5 \Omega$.

1°) Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit, sa fréquence propre f_0 et la valeur maximale du courant I_0 qui parcourt le circuit à la résonance.

2°) Trouver les valeurs des tensions U_{oL} et U_{oC} , mesurées à la résonance, aux bornes de la self et de la capacité. En déduire le *coefficient de surtension* ou *facteur de qualité* du circuit :

$$Q = \frac{U_{oL}}{U}$$

Solution VI. 4. 1°) La pulsation propre du circuit est calculée à partir de l'expression (37)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad I_0 = \frac{U}{R} \quad (a)$$

A.N : $\omega_0 = 2,5 \cdot 10^6$ rad/s, $f_0 = 400$ kHz, $I_0 = 0,4$ A

2°) Calcul des tensions U_{oL} et U_{oC} et du coefficient de qualité Q :

$$U_{oL} = L \omega_0 I_0 \text{ soit avec (a) } U_{oL} = L \omega_0 \frac{U}{R} = 400 \text{ volts} \quad \Rightarrow$$

$$Q = \frac{U_{oL}}{U} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{L \omega_0}{R} = 200$$

A la résonance la tension aux bornes de la self U_{oL} est multipliée par un facteur $Q = 200$: il en résulte une surtension. Il en est de même de la tension aux bornes du condensateur : $U_{oC} = 400$ volts. La courbe, qui représente la variation du courant en fonction de la fréquence (figure VI.14. a), est d'autant plus aigüe que le facteur de qualité Q est grand

3.4. Bobine (R, L) et condensateur (C) en parallèle: Antirésonance.

On considère le circuit constitué d'une bobine de self inductance L de résistance R et d'un condensateur sans pertes, de capacité C montés comme le montre la figure VI.15. L'impédance du circuit est :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega \quad (38)$$

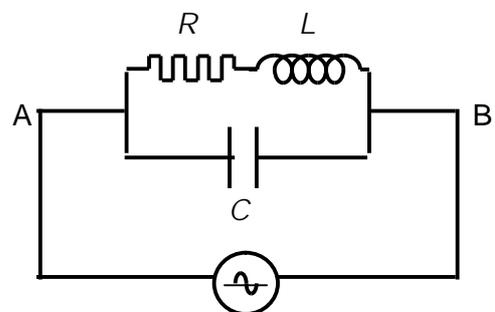


Figure VI. 15

(Voir exercice VI.8)

Afin de simplifier l'étude du circuit précédent, nous allons négliger la résistance R devant $L\omega$. Dans ce cas, l'impédance du circuit devient :

$$\bar{Z} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} \quad (39)$$

\bar{Z} est une réactance pure et le circuit se comporte comme :

- une self si $\omega < \omega_0$
- une capacité si $\omega > \omega_0$

Lorsque $\omega = \omega_0$, l'impédance devient infinie et l'intensité du courant

$$I = \frac{U}{Z}$$

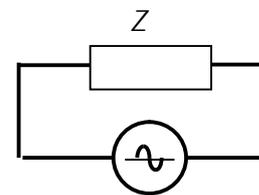
s'annule, d'où le nom de "*circuit bouchon*" donné à ce montage. Le phénomène ainsi observé est appelé "*antirésonance*".

Dans une construction de Fresnel, les courants qui circulent respectivement dans la self et le condensateur sont égaux et opposés : leur somme est nulle. Leurs intensités sont plus importantes que l'intensité totale du circuit : on dit alors qu'il y a un phénomène de *surintensité*.

4. PUISSANCE ELECTRIQUE EN COURANT SINUSOÏDAL.

4.1. Valeur instantanée de la puissance électrique.

Soit une impédance Z , soumise à une tension électrique sinusoïdale : $u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t)$ et parcourue par un courant électrique d'intensité $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi)$



La puissance électrique instantanée fournie à Z s'écrit alors:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 U I \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (40)$$

Soit :

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi) \quad (41)$$

L'expression (41) montre que $p(t)$ est la somme d'un terme constant et d'un terme variable à fréquence double de la fréquence de la tension d'excitation. La puissance varie au cours du temps.

4.2. Valeur moyenne de la puissance électrique.

La valeur moyenne, sur une période, de la puissance :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (42)$$

donne avec (41),
$$P = \frac{I}{T} UI \cos \varphi \int_0^T dt + \frac{I}{T} UI \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \quad (43)$$

La valeur moyenne du second terme étant nulle, on a :

$$P = U I \cos \varphi \quad (44)$$

P correspond à la puissance électrique consommée par Z .

4. 3. Puissance active.

Elle désigne la puissance effective liée à l'énergie électrique qui peut être convertie par le récepteur sous une autre forme d'énergie (mécanique, calorifique etc.). Elle est mesurée en watt (W) et son expression en courant sinusoïdal est donnée par l'équation (44), soit :

$$P = U I \cos \varphi$$

Le terme $\cos \varphi$ est appelé "*facteur de puissance*" du récepteur. Il mesure l'efficacité d'un système à produire de la puissance active.

Dans le cas

- d'une self ou d'un condensateur, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0$.
- d'une résistance $\varphi = 0 \Rightarrow P = U I$

4.4. Puissance réactive.

Elle est liée, comme le montrent les exemples qui suivent, à l'énergie emmagasinée durant un quart de période, dans les selfs et les condensateurs du récepteur, puis entièrement restituée au réseau au cours de l'autre quart.

C'est une énergie qui n'est donc pas consommée par la charge, elle est définie par :

$$Q = U I \sin \varphi \quad (45)$$

Elle est mesurée en *Var* (volt-ampère-réactif).

Cette puissance est qualifiée ainsi parce que l'absorption et la restitution de l'énergie sont dues à la réaction d'une self ou d'un condensateur aux variations du courant.

Puissance réactive dans le cas d'une self pure : Dans ce cas à une tension

$$u(t) = U_M \cos(\omega t)$$

correspond un courant d'intensité

$$i(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La puissance instantanée qui est fournie à la self s'écrit alors :

$$p(t) = UI \sin(2\omega t)$$

Les évolutions en fonction du temps de $u(t)$, $i(t)$ et $p(t)$ sont illustrées par les graphes de la figure VI.16.

Pendant le premier quart de période, la self emmagasine une énergie magnétique:

$$W = \int_0^{T/4} u i dt = \int_0^{I_M} i L \frac{di}{dt} dt = \frac{L I_M^2}{2} = L I^2$$

Cette énergie est entièrement restituée au réseau au cours du quart de période suivant comme le montre bien la figure VI.16.

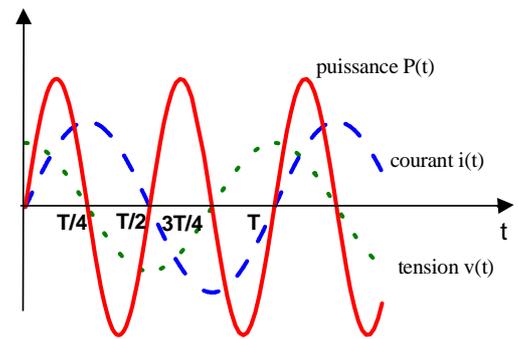


Figure VI.16

La puissance moyenne sur une demi-période est donc nulle.

L'échange d'énergie entre la self et le réseau fait circuler dans le circuit un courant réactif I tel que :

$$Q = U I \sin \varphi$$

Un comportement similaire est observé dans le cas d'un condensateur, sauf que l'énergie emmagasinée par ce dernier est une énergie électrostatique.

Puissance active dans le cas d'une résistance pure .

Considérons un circuit qui comporte une résistance pure R alimentée par une tension

$$u(t) = U_M \cos(\omega t)$$

Elle sera alors parcourue par un courant d'intensité

$$i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

La puissance instantanée qui lui est fournie s'écrit alors :

$$p(t) = UI \cos^2(\omega t) = \frac{UI}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

La puissance moyenne est :

$$P = \frac{UI}{T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt = UI$$

A partir de la figure VI.17, on note que l'énergie reçue par la résistance est entièrement consommée et transformée en chaleur. Il n'y a pas comme dans les cas précédents, d'oscillations de l'énergie entre le réseau et la charge. Le courant qui circule dans le circuit est appelé courant actif.

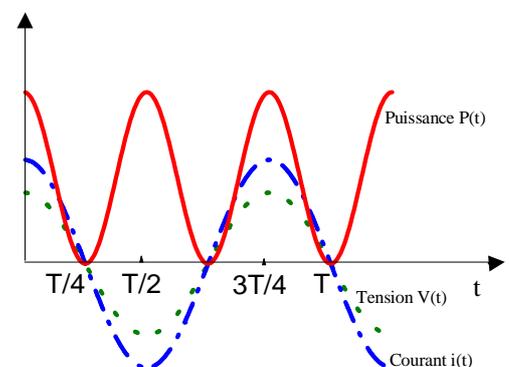


Figure VI.17

4. 5. Puissance apparente.

La puissance apparente est, par définition, égale au produit de la tension par le courant.

$$S = UI$$

C'est la puissance maximale que peut atteindre la puissance active.

Le rapport de la puissance active P sur la puissance apparente notée S définit le facteur de puissance. On écrit alors :

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi \quad (46)$$

S est mesurée en " volt-ampère " (VA)

Les puissances active, réactive et apparente sont reliées entre elles par les expressions suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi \\ Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S^2 = P^2 + Q^2 \\ \cos \varphi = \frac{P}{S} \end{array} \right. \quad (47)$$

5. PUISSANCE EN NOTATION COMPLEXE.

En notation complexe, la tension d'alimentation $u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t)$ et le courant $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi)$ qui parcourt le circuit peuvent s'écrire respectivement:

$$\bar{u}(t) = \sqrt{2} U \exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = \sqrt{2} I \exp[j(\omega t + \varphi)] \quad (48)$$

Calculons le produit $\bar{u} \cdot \bar{i}^*$ où \bar{i}^* est l'expression conjuguée de $\bar{i}(t)$.

$$\bar{u} \cdot \bar{i}^* = 2UI \exp(j\omega t) \cdot \exp[-j(\omega t + \varphi)] = 2UI (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad (49)$$

La partie réelle de l'équation (49) représente deux fois la puissance moyenne ou la puissance active donnée par l'équation (44). On écrit alors que :

$$P = UI \cos \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{u} \cdot \bar{i}^*] \quad (50)$$

Si on considère les valeurs efficaces complexes, telles que :

$$\begin{array}{ll} \bar{u}(t) = \sqrt{2} \bar{U} \exp(j\omega t) & \text{avec} \quad \bar{U} = U \exp(j0) = U \\ \bar{i}(t) = \sqrt{2} \bar{I} \exp(j\omega t) & \text{avec} \quad \bar{I} = I \exp(j\varphi) \end{array} \quad (51)$$

la puissance moyenne est égale à :

$$P = \operatorname{Re} [\bar{U} \cdot \bar{I}^*]$$

5. FACTEUR DE PUISSANCE.

La puissance, consommée par une charge en courant alternatif, dépend du facteur de puissance $\cos \varphi$ introduit par la charge.

Or l'énergie électrique, produite dans des centrales électriques par un fournisseur d'électricité⁵, est transportée dans une ligne pour être fournie aux clients. Le client ne paie au fournisseur que l'énergie qui correspond à la puissance

$$P = U I \cos \varphi$$

qu'il a consommée. Cette puissance est inférieure à celle qui lui a été livrée à la sortie de la centrale électrique. La différence ΔP , qui correspond aux pertes dans la ligne, est à la charge du fournisseur.

$$\Delta P = R I^2$$

R est la résistance électrique de la ligne. Avec (44) il vient :

$$\Delta P = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} \quad (53)$$

La puissance perdue dans la ligne par effet Joule est inversement proportionnelle au facteur de puissance. Le fournisseur est d'autant plus lésé que ce facteur est faible, c'est la raison pour laquelle il pénalise le client dès que le facteur de puissance est inférieur à 0,8. Pour éviter ces pénalités, les industriels relèvent le facteur de puissance de leurs installations électriques à l'aide de condensateurs conçus à cet effet (Exercice VI. 16).

Exercice VI. 5. Un atelier reçoit au niveau, de son compteur, de l'énergie électrique à travers une ligne dont la résistance totale est R . La charge fonctionne sous une tension d'alimentation $U = 220$ volts à la fréquence $f = 50$ Hz. L'atelier consomme à pleine charge une puissance $P = 95$ kilowatts avec un $\cos \varphi = 0,85$.

1°) On suppose d'abord que l'énergie, fournie à l'atelier, est transportée, sous forme monophasée sous une tension $U = 220$ volts. Quelle doit être la résistance R_1 de la ligne pour que les pertes ΔP_1 ne dépassent, en aucun cas, la moitié de la puissance P consommée à pleine charge. Quelle est la section du fil de ligne, en déduire la masse de cuivre utilisée.

A.N. Longueur de la ligne $l = 2$ km, résistivité électrique du cuivre $\rho_{\Omega} = 18 \cdot 10^9 \Omega \cdot m$, sa masse volumique $\rho_M = 8920$ kg/m³.

2°) On considère à présent le cas où cette énergie est transportée sous une tension $U = 5.500$ volts. Calculer la résistance R_2 de la ligne si les pertes ΔP_2 ne doivent pas dépasser 5% de la puissance P . En déduire la section du fil de ligne et la masse de cuivre utilisée.

Quels sont les avantages de ces conditions par rapport à celles de la première question.

Solution VI. 5.

1°) A partir de l'expression (50) qui donne les pertes

$$\Delta P = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

on a, avec $U_1 = 220$ volts et les conditions de ce premier cas,

⁵ En Algérie, le fournisseur d'électricité est la SONELGAZ.

$$R_1 = \frac{U_1^2 \cos^2 \varphi}{P^2} \Delta P_1 \quad \text{et avec} \quad \Delta P_1 = \frac{P}{2}, \quad \text{il vient} \quad R_1 = \frac{U_1^2 \cos^2 \varphi}{2P} = 0,184 \, \Omega$$

Calcul de la section S_1 du fil de ligne et de la masse m_1 de cuivre utilisée :

$$R_1 = \rho_\Omega \frac{l}{S_1} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \rho_\Omega \frac{l}{R_1} = 1,74 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \rho_M S_1 l = 3122 \text{ kg}$$

2°) Avec $U_2 = 5500$ volts et les conditions de ce deuxième cas, on a :

$$R_2 = \frac{5}{100} \frac{U_2^2 \cos^2 \varphi}{P} = 11,5 \, \Omega, \quad S_2 = 2,78 \text{ mm}^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 49 \text{ kg}$$

On utilise 64 fois moins de cuivre, en moyenne tension 5.500 volts, pour transporter la même puissance qu'en basse tension 220 volts avec 10 fois moins de pertes.

Ces pertes sont encore réduites si le fournisseur oblige le client à augmenter le facteur de puissance de son installation.

Remarque : **Transport de l'énergie électrique :**

L'énergie électrique est produite dans des centrales électriques par des alternateurs en moyenne tension (MT), 5500 - 11000 volts.

Elle est ensuite transportée dans des lignes sous hautes ou très hautes tensions 60 kV, 220 kV. puis abaissée en MT⁶ et consommée en basses tensions (BT) 220 - 380 volts

A chaque fois que l'on veut élever ou abaisser la tension électrique, on utilise des transformateurs. Une étude très simplifiée du transformateur est proposée sous forme d'exercice (**Exercice VI. 10**)

⁶ L'USTHB achète l'énergie électrique en MT 30 000 volts puis elle est abaissée pour être utilisée en BT à 220-380 V

Annexe 3

Courants triphasés

L'énergie électrique est produite, transportée et, en grande partie, consommée sous forme triphasée, d'où l'importance des courants triphasés.

1. Les systèmes triphasés équilibrés

1.1. Définitions :

Un système de tensions (ou courants) est triphasé et équilibré s'il est composé de trois tensions (ou courants)

- sinusoïdales
- de même amplitude
- de même fréquence
- et déphasées les unes par rapport aux autres de $2\pi/3$

1.2. Production de tensions triphasées :

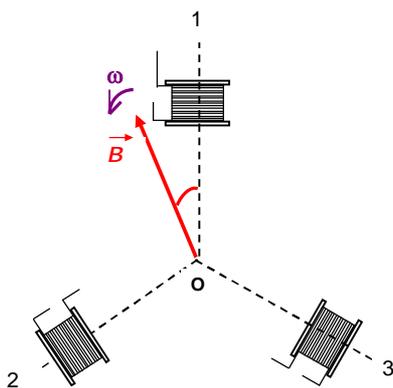


Figure 1.

Considérons :

- trois bobines identiques dont les axes sont fixes, décalés, l'un par rapport à l'autre, de $2\pi/3$ et placés comme l'indique la figure 1.
 - et un champ magnétique \vec{B} , uniforme et constant, tournant, autour de O, à la vitesse angulaire constante ω .
- Les flux magnétiques traversant chaque bobine, sont respectivement :

$$\Phi_1 = B S \cos(\omega t)$$

$$\Phi_2 = B S \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$\Phi_3 = B S \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

S est la surface totale des N spires d'une bobine.

Dans chaque bobine nait une force électromotrice induite.

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = \omega B S \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad e_1 = E \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \omega B S \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad e_2 = E \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2)$$

$$e_3 = -\frac{d\Phi_3}{dt} = \omega B S \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad e_3 = E \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Aux bornes des bobines apparaissent trois forces électromotrices sinusoïdales, de même amplitude

$$E_M = E \sqrt{2},$$

de même fréquence et déphasées de $2\pi/3$.

Elles constituent un système triphasé.

E est la valeur efficace de ces forces électromotrices.

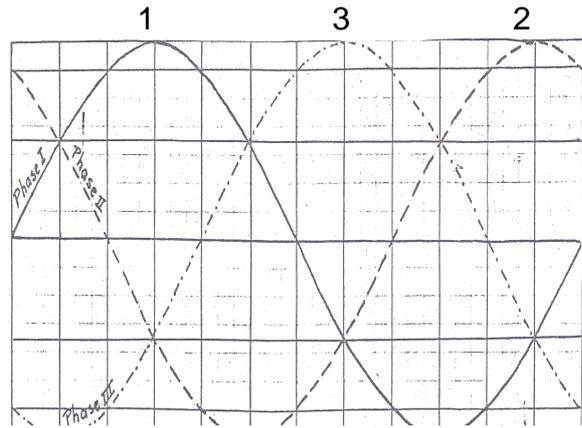


Figure 2.

On obtient le même résultat en faisant tourner, à la vitesse angulaire constante ω , un ensemble de 3 bobines solidaires, dont les axes sont décalés de $2\pi/3$, dans un champ magnétique uniforme et fixe.

Le principe de l'alternateur triphasé est basé sur ce phénomène d'induction électromagnétique. Dans un alternateur, le champ magnétique est créé par l'inducteur placé en général sur la partie tournante (le rotor) et les f.é.m. prennent naissance dans l'induit, système de bobines placées sur la partie fixe (le stator).

1.3. Courants triphasés.

Si on ferme les trois bobines sur une charge constituée de trois impédances identiques :

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$$

il passe dans chaque bobine de l'alternateur et dans chaque impédance un courant :

$$\begin{aligned} i_1 &= I \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2 &= I \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Ces trois courants forment, eux aussi, un système triphasé équilibré. Les tensions v_1 , v_2 , v_3 , aux bornes de chaque impédance, constituent un système de tensions triphasé.

1.4. Transport de l'énergie électrique.

Pour transporter l'énergie électrique, ainsi produite, on peut utiliser 6 conducteurs qui relient la source (alternateur), à la charge (les 3 impédances) de l'utilisateur, mais cette solution est onéreuse.

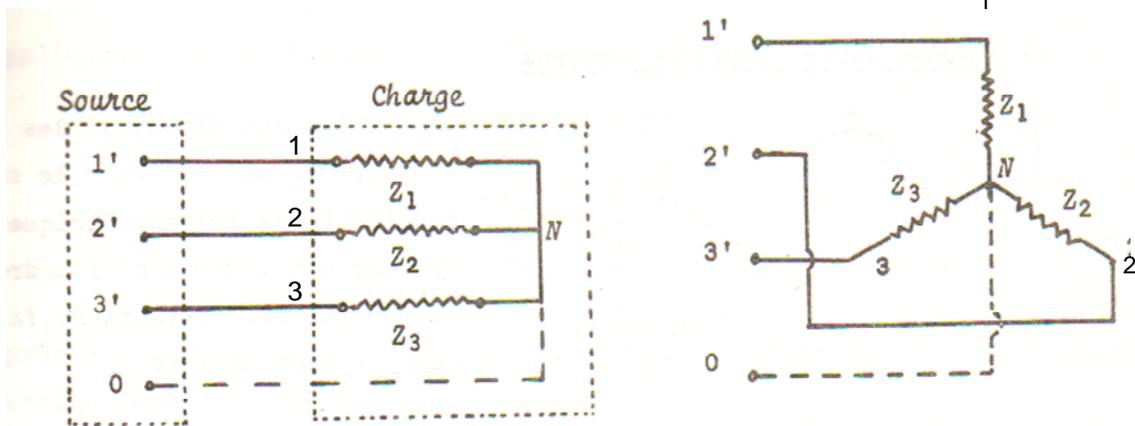
Il suffit de relier les 3 entrées des 3 bobines en un seul point O, et de monter la charge formée par les 3 impédances comme le montre la figure 3. Dans cette figure la charge est montée en étoile.

Au lieu de six conducteurs, on en utilise que quatre :

- trois fils pour les courants i_1 , i_2 , i_3 .
- et un fil neutre.

2. Montage de la charge en étoile.

Les deux charges triphasées, des figures 3 sont identiques. Elles sont montées en étoile.



Figures 3.

Les trois entrées 1, 2 et 3 des impédances sont respectivement reliées aux trois fils de ligne 1, 2 et 3, et les trois sorties, reliées entre elles, forment le neutre.

Remarque : Si les trois impédances sont identiques, la charge est équilibrée et les trois courants dans les lignes sont égaux, les formules (3) montrent que : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Le fil neutre n'est plus nécessaire et peut être supprimé.

Comme *en monophasé*, on représente chaque tension v et le courant i qu'elle crée par 2 vecteurs

$$\vec{V} \quad \text{et} \quad \vec{I}$$

déphasés d'un angle φ . Les modules de ces vecteurs représentent les valeurs efficaces de v et i

En *triphase équilibré*, on obtient un système de 3 vecteurs

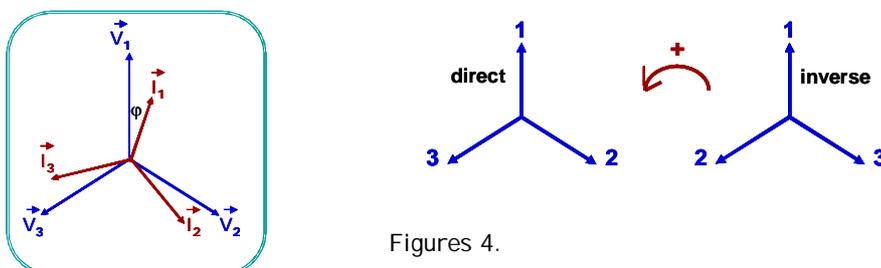
$$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$$

de même module décalés de $2\pi/3$ et un système de courants

$$\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$$

déphasé par rapport au précédent système d'un angle φ (Figure 4).

Les tensions entre phases et neutres v_1, v_2, v_3 sont également appelées "*tensions simples*"



Figures 4.

Le premier système représente les 3 tensions et le second les courants qui leur correspondent.

Le système triphasé est direct si les 3 vecteurs se suivent dans le sens positif. Le système est inverse dans le cas contraire

Les tensions entre lignes, ou tensions composées

$$\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$$

forment un système triphasé équilibré en avance de $\pi/6$ sur le système de tensions simples

$$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$$

En effet :

$$u_1 = v_1 - v_2 \quad \vec{U}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

$$u_2 = v_2 - v_3 \quad \vec{U}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_3$$

$$u_3 = v_3 - v_1 \quad \vec{U}_3 = \vec{V}_3 - \vec{V}_1$$

La figure 5 montre que les tensions entre les lignes U et les tensions entre phase et neutre V , sont reliées par :

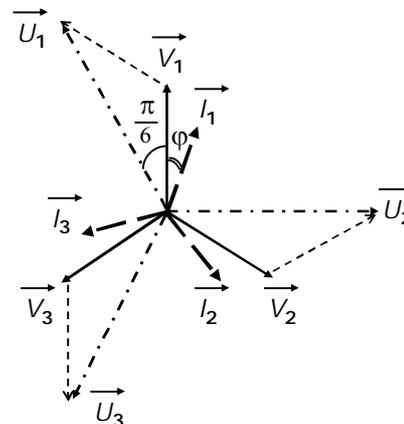


Figure 5.

$$U = 2V \cos \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad U = V \sqrt{3} \quad (4)$$

Dans le montage étoile le *courant dans la ligne* est égal au *courant dans la phase*

3. Montage de la charge en triangle.

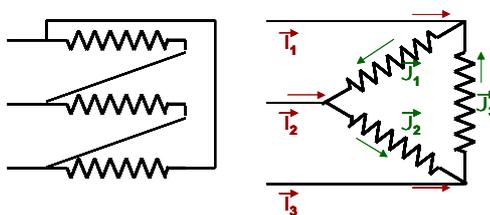
Les deux circuits représentés sur les figures 6 sont équivalents. Les tensions entre lignes :

$$\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$$

forment un système triphasé équilibré en avance de $\pi/6$ sur le système des tensions simples. Il en est de même des courants :

$$\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3$$

dans les impédances. Ces courants \vec{J} forment un système triphasé équilibré déphasé de φ par rapport aux tensions entre les lignes \vec{U} .



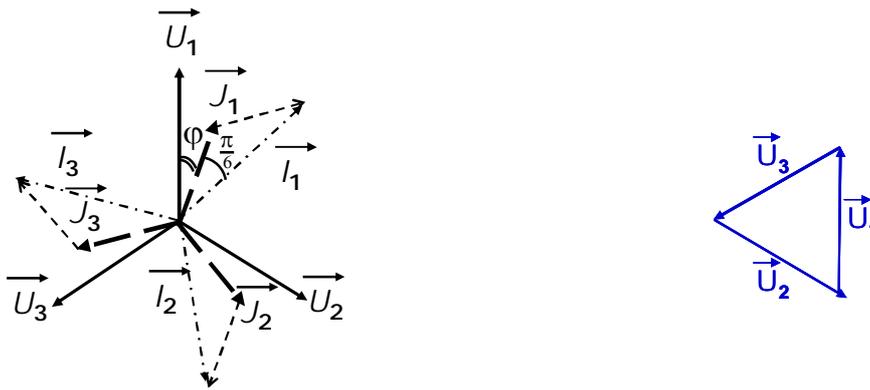
Figures 6.

Lorsque la charge est montée en triangle, les lois de Kirchhoff permettent d'écrire :

$$\vec{I}_1 = \vec{J}_1 - \vec{J}_3$$

$$\vec{I}_2 = \vec{J}_2 - \vec{J}_1$$

$$\vec{I}_3 = \vec{J}_3 - \vec{J}_2$$



Figures 7.

La figure 7 montre que les courants I dans les lignes forment un système triphasé équilibré déphasé de 30° par rapport au système des courants J . On a :

$$I = 2J \cos \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad I = J\sqrt{3} \quad (5)$$

Remarques :

1°) Dans un *montage en triangle*, il n'y a pas de point neutre.

2°) Lorsque les trois impédances ne sont pas identiques la charge est déséquilibrée, les courants n'ont plus la même amplitude et ils ne sont plus déphasés entre eux de 120° .

3°) L'étude des systèmes triphasés peut être généralisée en introduisant un nombre p de phases. Un système de tensions est p -phasé équilibré, s'il comporte p tensions sinusoïdales, de même amplitude, de même fréquence et déphasées les unes par rapport aux autres de $2\pi/p$

3. Puissances en triphasé.

Que le système soit équilibré ou déséquilibré, la puissance active consommée par une charge triphasée est :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3) dt$$

Lorsque la charge est équilibrée et montée en étoile, les puissances instantanées dans chaque phase sont ⁷:

$$p_1 = V_M I_M \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = V I \cos \varphi + V I \cos(2\omega t - \varphi)$$

$$p_2 = V_M I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = V I \cos \varphi + V I \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$p_3 = V_M I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) = V I \cos \varphi + V I \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

⁷ Le réseau est supposé équilibré.

A chaque instant la puissance totale consommée par la charge est :

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 3 V I \cos \varphi \quad \text{soit} \quad p = \sqrt{3} U I \cos \varphi$$

Cette puissance est constante, alors qu'en monophasé elle varie en fonction du temps.

Lorsque le système est équilibré, que la charge soit montée en étoile ou en triangle, la puissance active consommée est :

$$P = \sqrt{3} U I \cos \varphi \quad (6)$$

La puissance réactive s'exprime sous la forme :

$$Q = \sqrt{3} U I \sin \varphi \quad (7)$$

Et la puissance apparente :

$$S = \sqrt{3} U I \quad (8)$$

4. Avantages des systèmes triphasés.

Les systèmes triphasés présentent de nombreux avantages par rapport aux systèmes monophasés.

1°) Lors du transport de l'énergie électrique :

- Les pertes en ligne sont plus faibles en triphasé qu'en monophasé
- Avec une même masse de cuivre, l'énergie transportée en triphasé est supérieure à celle qui serait transportée en monophasé.

2°) Les systèmes triphasés permettent

- d'obtenir, à partir de bobines fixes, des champs magnétiques tournants
- de disposer, au niveau du secteur de deux tensions d'alimentation. En basse tension : 220 V & 127 V et actuellement 380 V & 220 V
- d'avoir un taux d'ondulation plus faible dans les redresseurs.

Exercices : Chapitre VI

Exercice VI . 6. Une résistance pure R est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I .

1°) Calculer la puissance P dissipée, par effet joule, dans cette résistance.

2°) Cette même résistance R est à présent parcourue par un courant sinusoïdal :

$$i(t) = I_M \sin(\omega t)$$

Trouver l'expression du courant I qui dissiperait la même puissance P dans la même résistance. P est la valeur moyenne de la puissance instantanée $p(t)$ calculée sur une période (Equation 35).

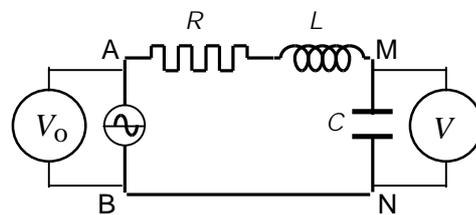
I est, par définition, la valeur efficace du courant $i(t)$.

Exercice VI . 7.

On veut mesurer le coefficient de qualité

$$Q = \frac{L\omega}{R}$$

d'une bobine à l'aide du montage représenté sur la figure, L désigne la self de la bobine et R sa résistance. C est un condensateur de capacité variable et e un générateur de courant alternatif.



Deux voltmètres, l'un placé aux bornes de la source entre A et B et l'autre branché entre M et N, indiquent respectivement les tensions V_0 et V .

1°) Calculer le rapport V/V_0 .

2°) Pour quelle valeur de C ce rapport est-il égal à Q ?

3°) Pour détecter la résonance on mesure à l'aide de deux voltmètres de résistance infinie.

On règle C de façon que V soit maximal et on pose $Q' = V_{Max}/V_0$. Quelle erreur commet-on en utilisant ce procédé ?

A.N. $V_0 = 10 \text{ mV}$ $V_{Max} = 5 \text{ V}$

Exercice VI .8.

Soient les circuits représentés par les figures ci-dessous :

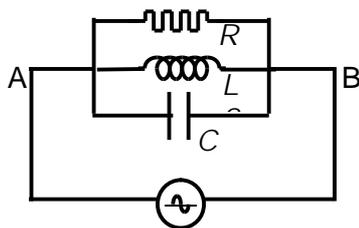


Fig. 1.

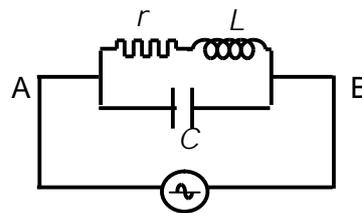


Fig. 2.

1°) Déterminer les pulsations ω_0 et ω'_0 pour lesquelles les admittances des circuits des figures 1 et 2 deviennent réelles respectivement.

1°) Montrer que ω'_0 s'exprime en fonction de ω_0 . On mettra ω'_0 sous la forme :

$$\omega'_0 = \omega_0 (1 - k)^{1/2}$$

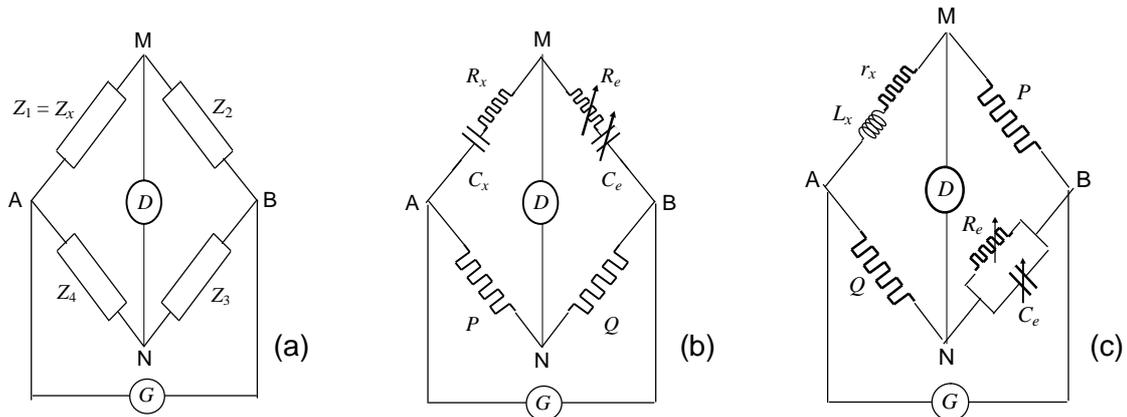
Calculer $\frac{\omega'_0}{\omega_0}$ pour

$$k = 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01.$$

Donner alors la condition pour que les deux circuits soient équivalents. Conclusion

Exercice VI.9. Ponts d'impédances.

Le pont de Wheatstone peut être utilisé en courant alternatif, pour la mesure des impédances. Les résistances R sont remplacées par des impédances Z , la source de courant continu par une source de courant alternatif G et le galvanomètre par un détecteur de zéro D . Ce dernier peut être un voltmètre électronique à amplificateur sélectif. Le générateur, utilisé ici, délivre une tension de 10 volts à la fréquence de 10 kHz.



1°) Ecrire la condition d'équilibre dans le cas général (figure a).

2°) On écrit les quatre impédances sous forme complexe : $Z = R + j X$. Exprimer la résistance R_x puis la réactance X_x de l'impédance inconnue en fonction des résistances et réactances des autres impédances.

3°) On veut mesurer, à l'aide du pont de Sauty représenté sur la figure b, l'impédance Z_x d'un condensateur constitué par sa capacité C_x et sa résistance de fuite R_x . L'impédance Z_e est constituée d'une résistance R_e et d'une capacité C_e variables montées en série. P et Q sont des résistances pures.

Calculer les valeurs de R_x , C_x et le facteur de pertes $\text{tg } \delta = R_x / X_x$

A.N : $C_e = 10^{-9} \text{ F}$, $R_e = 15 \Omega$, $P = 5690 \Omega$, $Q = 4410 \Omega$.

4°) Le pont de Maxwell représenté sur la figure (c), permet de mesurer l'impédance d'une bobine de self L_x et de résistance r_x . L'impédance Z_e est constituée d'une résistance R_e et d'une capacité C_e variables montées en parallèle. P et Q sont des résistances pures.

Calculer les valeurs de r_x et L_x .

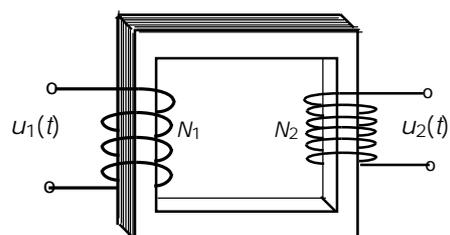
A.N : $C_e = 0,5 \mu\text{F}$, $R_e = 15 \text{ k}\Omega$, $P = 420 \Omega$, $Q = 250 \Omega$

Exercice VI.10. Transformateur

Un transformateur monophasé se compose d'un circuit magnétique en fer doux feuilleté sur lequel sont bobinés deux enroulements constitués de fils de cuivre. Le primaire, qui comporte N_1 spires, est soumis à une d.d.p sinusoidale :

$$u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

Le secondaire comporte N_2 spires. On admet, en première approximation, que le flux magnétique $\Phi(t)$, créé par le courant i_1 qui circule dans l'enroulement primaire, traverse entièrement l'enroulement secondaire. Il en résulte, dans ce dernier, une f.e.m induite $e_2(t)$.



1°) Pourquoi le circuit magnétique est-il feuilleté ? Montrer que $\Phi(t)$ et $e_2(t)$ sont des grandeurs sinusoïdales de même fréquence que $u_1(t)$.

2°) On part du flux magnétique $\Phi(t)$ qui circule dans le circuit magnétique. Chaque spire de l'un ou l'autre des deux enroulements est le siège d'une f.e.m induite. Ecrire, à partir de la loi de Lenz, les f.e.m induites $e_1(t)$ et $e_2(t)$ dans chaque enroulement.

On désigne par R_1 et R_2 les résistances des enroulements et $u_2(t)$ la d.d.p aux bornes du secondaire. Exprimer, pour chacun des enroulement N_1 et N_2 , les d.d.p :

$$u_1(t) \text{ en fonction de } N_1, R_1 \text{ et } i_1,$$

$$u_2(t) \text{ en fonction de } N_2, R_2 \text{ et } i_2.$$

3°) On néglige, en première approximation, les résistances R_1 et R_2 des enroulements. Montrer que, dans ce cas, le rapport des valeurs efficaces est tel que :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{où} \quad \frac{N_2}{N_1} \quad \text{est le rapport de transformation du transformateur.}$$

Représenter, sur un diagramme de Fresnel, les vecteurs $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{U}_1, \vec{U}_2$ après avoir porté $\vec{\Phi}$ à l'origine des phases .

N.B : Dans cette étude, nous avons négligé les résistances des enroulements, les fuites magnétiques et les pertes dans le fer (circuit magnétique).

Exercice VI .11. Un solénoïde portant n spires par mètre est considéré comme infiniment long. Au centre se trouve une spire circulaire, de rayon a , tendue par deux fils dans le prolongement du diamètre vertical de la spire, dont la constante de torsion est C .

On donne $n = 1000$, $a = 1 \text{ cm}$

1°) Calculer l'inductance mutuelle M des deux circuits quand la normale au plan de la spire fait un angle θ avec l'axe du solénoïde. Quelle est la valeur maximale M_0 de M ?

2°) Dans sa position initiale, la torsion du fil est nulle, la spire est telle que son axe est perpendiculaire à celui du solénoïde. On fait passer dans la spire et le solénoïde le même courant continu I . Calculer l'angle θ des axes des deux circuits à l'équilibre. Calculer la constante de torsion du fil pour que, avec $I = 1 \text{ A}$, on ait $\theta = 30^\circ$.

Dans tout ce qui suit La période des courants électriques T est considérée comme très petite devant celle de la spire.

3°) On envoie dans le solénoïde un courant $i = I_M \sin(\omega t)$ et dans la spire un courant $i' = I'_M \sin(\omega t - \varphi)$. Calculer le couple moyen Γ exercé sur la spire dont l'axe fait un angle θ avec celui du solénoïde. Exprimer ce couple en fonction de I, I' et M_0 .

4°) on envoie dans le solénoïde et la spire d'axes initialement perpendiculaires, le même courant de pulsation ω et d'intensité efficace I . Calculer l'angle θ des axes correspondant à l'équilibre pour un courant $i = 1 \text{ A}$.

Exercice VI .12. Puissance dissipée par courants de Foucault.

Un noyau de fer cylindrique, de section circulaire, de diamètre D est placé dans un champ magnétique uniforme dont la direction est parallèle à l'axe du cylindre. Ce champ, créé par un courant alternatif de fréquence f , atteint une valeur maximale B_M .

1°) Calculer la puissance dissipée, par unité de volume, par courants de Foucault.

2°) Calculer cette puissance dans le cas où le noyau est constitué par un ensemble de fils de fer de diamètre d chacun, isolés les uns des autres et en nombre tel que la section utile soit égale à celle du noyau massif.

A.N. $D = 10 \text{ cm}$, $d = 0,5 \text{ cm}$, $B_M = 1,5 \text{ T}$, $f = 50 \text{ Hz}$, résistivité du fer $\rho = 11 \mu\Omega \cdot \text{cm}$

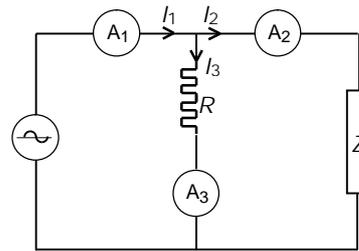
Exercice VI .13. Méthode des trois ampèremètres.

On veut mesurer la puissance P consommée par une charge Z , alimentée par une source

de courant alternatif, par la méthode des trois ampèremètres. Le montage est représenté sur la figure ci-contre.

- 1°) Exprimer P en fonction de la résistance R et des indications des trois ampèremètres, en utilisant une méthode graphique.
 2°) Retrouver cette expression par le calcul en utilisant la notation complexe.

A.N. $i_1 = 17 \text{ A}$, $i_2 = 12 \text{ A}$, $i_3 = 8 \text{ A}$,
 $R = 10 \Omega$,

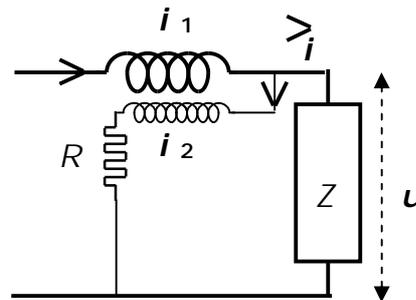
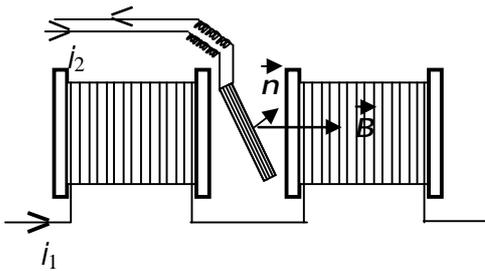


Exercice VI.14. Wattmètre électrodynamique.

Pour mesurer la puissance consommée par une charge d'impédance Z , on utilise un wattmètre comportant un élément moteur électrodynamique⁸. Le couple moteur est équilibré par un couple de rappel créé par un ressort de constante C .

A l'équilibre l'équipage mobile tourne d'un angle :

$$\alpha = \frac{1}{C} \frac{dM}{d\alpha} i_1 i_2$$



Cet équipage est solidaire d'une aiguille qui se déplace devant un cadran gradué en watts. La bobine fixe est montée en série avec la charge Z , elle est appelée pour cette raison "*bobine intensité*" ou "*bobine gros fil*". La bobine mobile, en série avec une grande résistance R , placée en dérivation, comme un voltmètre, aux bornes de Z . C'est la "*bobine tension*" ou "*bobine fil fin*". Un wattmètre électrodynamique comporte donc quatre bornes. Montrer que la déviation α est proportionnelle à la puissance consommée par Z . On négligera la self L_2 de la bobine tension et le coefficient d'induction mutuelle M des deux bobines.

Exercice VI.15.

On veut mesurer, à l'aide d'un oscilloscope, la puissance P consommée, en courant alternatif, par une charge Z .

A cet effet, on place en série Z et une capacité C , l'ensemble est alimenté par une tension alternative $v = V_M \cos(2\pi f t)$. Les tensions prélevées aux bornes de Z et de C sont respectivement appliquées aux entrées X et Y d'un oscilloscope.

Montrer que l'aire de l'oscillogramme est proportionnelle à la puissance P . Aucun courant n'est dérivé par l'oscilloscope.

⁸ Voir Exercice IV.6.

Exercice VI.16. Relèvement du facteur de puissance.

Un atelier, branché sur une source de courant monophasé 220 volts, 50 hertz, comporte une installation composée de moteurs électriques et de lampes, (il n'y a donc pas d'éléments capacitifs). Cette installation, dont le facteur de puissance est $\cos \varphi_1 = 0,78$, absorbe, à pleine charge, une puissance $P = 35$ kW.

1°) Calculer le courant I_1 absorbé à pleine charge. Faire apparaître, en utilisant la notation complexe (voir Ch VI, § 2.1), les parties réelle et imaginaire du courant complexe \bar{I}_1

2°) On veut relever le facteur de puissance de l'installation à $\cos \varphi_2 = 0,9$. Calculer la capacité des condensateurs que l'on doit brancher aux bornes de l'alimentation, et le nouveau courant qui circule dans l'atelier à pleine charge.

Annexe 4

Dimensions & Unités des grandeurs physiques.

Grandeurs fondamentales du système M.K.S.A

Longueur l [L] *mètre*, Masse m [M] *kilogramme*,
 Temps t [T] *seconde*, Intensité I [I] *ampère*.

Grandeurs dérivées utilisées dans ce cours

Grandeurs		loi	Dimensions	Unité
Vitesse	v	$v = l/t$	$L.T^{-1}$	mètre/seconde : m/s
Accélération	γ	$\gamma = v/t$	$L.T^{-2}$	mètre/s ² : m/s^2
Force	F	$F = m \gamma$	$M.L.T^{-2}$	newton : N
Travail, Energie	W E	$W = F.l$	$M.L^2.T^{-2}$	Joule : J
Puissance	P	$P = W/t$	$M.L^2.T^{-3}$	watt : W
Charge élec.	q	$q = I.t$	$T.I$	coulomb : C
Potentiel	V	$P = V.I$	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	volt : V
Champ elec.	E	$V = E.l$ E dérive de V	$M.L^1.T^{-3}.I^{-1}$	volt/mètre : V/m
Excitation élec	D	$D.S = q$ Th de Gauss	$L^{-2}.T.I$	coulomb/m ² C/m^2
Capacité	C	$q = C.V$	$M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$	farad : F
Permittivité el	ϵ	$D = \epsilon.E$	$M^{-1}.L^{-3}.T^4.I^2$	farad/mètre : F/m
Résistance el	R	$V = R.I$ Ohm	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$	ohm : Ω
Champ magn	B	$F = B.I.l$ Laplace	$M.T^{-2}.I^{-1}$	tesla : T
Excitation mag	H	$H.l = I$ Th d'Ampère	$L^{-1}.I$	ampère/mètre : A/m
Flux magn	Φ	$\Phi = B.S$	$M.L^2.T^{-2}.I^{-1}$	weber : Wb
Coef induction Sel induction	M L	$\Phi = M.I$ $\Phi = L.I$	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$	henry : H
Perméabilité m	μ	$B = \mu.H$	$M.L.T^{-2}.I^{-2}$	henry/mètre : H/m

N.B 1°) Dans ce tableau, les dimensions de chaque grandeur sont calculées à partir d'une loi connue où interviennent des grandeurs dont les dimensions ont été précédemment définies.

2°) L'unité de mesure d'une grandeur physique s'écrit toujours avec une lettre minuscule : coulomb, mètre, seconde, hertz, ampère etc...

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Alonso M., Finn, E.J. "*Physique générale T. 2 : Champs et Ondes*" , Inter Editions Paris 1977
- [2] Bendaoud M., "*Relativité* : Ed OPU Alger 1997.
- [3] Benson Harris *Electricité & Magnétisme* Edition du renouveau pédagogique 1999
- [4] Bruhat G. *Électricité*, Edition revue par G. Goudet Masson Paris 1963.
- [5] Caubarrere J.L., Fourny J., Ladjouze H., "*Électricité et Ondes* : Ed OPU Alger 1990.
- [6] Djelouah H *Electromagnétisme* Licence LMD S4, Ed. Les "Cours de la Faculté de Physique" 2012.
- [7] Cessac J , Tréherne G *Physique 1^{ère} C*, Ed. Fernand Nathan Paris 1966.
- [8] Feynman R, Leighton, Sands, "*Le Cours de Physique de Feynman : Électromagnétisme*" Inter Editions Paris 1979.
- [9] Maalem M.S., "*Électricité (T.1 & 3), Exercices Corrigés avec Rappel de Cours* : Ed. MMS Alger.
- [10] Pérez J-P. , Carles R. , Fleckinger R. *Electromagnétisme - Fondements et applications* Ed. Masson Paris 2001
- [11] Ravailé M. : *Electrostatique & Electrocinétique* Editions J.B. Baillère Paris 1964.
- [12] Séguin M., Descheneau J., Tardif B. : *Electricité & magnétisme* Editions du Renouveau pédagogique 2010.