Chapitre 1

Interaction Magnétique

Important : Ce chapitre a été écrit dans un délai très court. Il ne contient pas de schémas. Le risque d'erreurs est grand. Il s'adresse aux étudiants n'ayant pas pu assister aux séances de cours et qui veulent avoir un support qui leur limitera les notions à étudier. Un second document plus complet leur est donc nécessaire.

1.1 Introduction

Le magnétisme a été découvert grâce à la force exercée par un aimant sur des bouts de fer. Un aimant possède un pôle nord est un pôle sud et crée un champ magnétique tangent aux lignes de champ dirigées du pôle nord vers le pôle sud. La Terre est un gros aimant dont le pôle nord magnétique et près du pôle sud géographique, et le pôle sud magnétique est près du pôle nord géographique. Deux pôles de même type se repoussent et deux pôles de types opposés s'attirent (le pôle nord magnétique d'une boussole est attiré par le pôle sud magnétique (nord géographique) de la Terre. Il n'y a pas de monopôle magnétique (En brisant un aimant en deux, on obtient deux pôles sur chaque morceau).

Dans ce chapitre, on décrira le lien entre les charges en mouvement et le champ magnétique. Deux points essentiels seront traités :

— La force exercée par un champ magnétique sur une charge en mouvement (Force de Lorentz) et sur un courant (Force de Laplace).

— Le champ magnétique créé par un courant électrique.

La plupart des formules sont analogues à celles de l'électrostatique. Il suffit de remplacer :

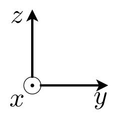
— La constante électrique $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ par la constante magnétique $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$.

— Le champ électrique $\vec{E}$ par le champ magnétique $\vec{B}$.

— La charge q par $q\vec{v}$ ou par $I\vec{dl}$ ($\vec{v}$est la vitesse de la charge et $\vec{dl}$ est l'élément de longueur traversé par le courant I et orienté dans le sens du courant).

— Le produit ordinaire par le produit vectoriel ($\wedge$).

Dans cette version, les schémas ne seront pas présentés. On les rapportera tous à un repère orthonormé $Oxyz$ suivant :



1.2 Force exercée par un champ magnétique sur une charge en mouvement

Si une charge q est en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, elle sera soumise à la force de Lorentz

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ \left\|\vec{F}\right\| &= |q| \, \|\vec{v}\| \left\|\vec{B}\right\| |\sin\theta|\end{aligned}$$

θ est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

Cette force est nulle si :

— La charge est immobile $\vec{v} = \vec{0}$.

— Le champ est $\vec{B} = \vec{0}$.

— La vitesse et le champ sont parallèle $\vec{v} \parallel (\pm\vec{B}) \iff \theta = 0, \pi$

Remarque : si, en plus du champ magnétique, il y a un champ électrique, la force totale sera $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

1.3 Exemples

1.3.1 Mouvement d'une seule charge

Cas $\vec{v} \perp \vec{B}$:

Alors le mouvement est circulaire est uniforme de rayon R et de vitesse angulaire $\omega = v/R$. Alors,
$\left\|\vec{F}\right\| = |q| \, \|\vec{v}\| \left\|\vec{B}\right\| = |q| \, R\omega \left\|\vec{B}\right\|$. Or pour un mouvement circulaire $\left\|\vec{F}\right\| = ma_n = m\omega^2 R$. Par identification, on a

$$\omega = \frac{|q|}{m} B \implies \vec{\omega} = \frac{q}{m}\vec{B}$$

La relation vectorielle se déduit en essayant les deux cas $q < 0$ et $q > 0$. La vitesse angulaire ω est appelée fréquence cyclotron.

Cas $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$
La composante $\vec{v}_{\parallel}$ n'est pas affectée par $\vec{B}$ et provoque un mouvement rectiligne et uniforme. La composante $\vec{v}_{\perp}$ provoque un mouvement circulaire et uniforme. Le mouvement global est hélicoïdal (la trajectoire a la forme d'un ressort).

1.3.2 Effet Hall

Un conducteur parallélépipédique possède une longueur L, une largeur l et une épaisseur d, respectivement parallèles aux axes Oz, Oy et Ox. Il est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{i}$. De plus, il est traversé, du haut vers le bas le long de sa longueur, par un courant I dont les charges positives $q > 0$, de vitesse $\vec{v} = -v\vec{k}$, sont déviées selon la largeur par la force magnétique $\vec{F} = q(-v\vec{k}) \wedge \vec{B} = -qvB\vec{j}$. Les charges déviées s'accumulant progressivement sur les côtés et créent un champ électrique $\vec{E} = E\vec{j}$ et une d.d.p $V = El$ que l'on peut mesurer. Les charges du courant, qui entrent dans le conducteur, seront alors soumises à deux forces opposées, la force magnétique et la force électrique. A l'équilibre, les deux forces sont égales et les charges ne sont plus déviées :

$$qE = qvB \implies \frac{V}{l} = vB$$

Dans un conducteur, on mesure $I = jS = nqvld$ ce qui permet de déterminer la vitesse $v = \frac{I}{nqld}$. En remplaçant cette dernière formule dans l'équation d'équilibre, on détermine la densité des porteurs de charges

$$n = \frac{IB}{Vqd}$$

1.3.3 Spectromètre de masse de Dempster

Des ions de charge q et de masse m sont accélérés vers le bas par une d.d.p. $V = V_0 - V_f$ jusqu'à une vitesse v. La conservation d'énergie totale $E_{c0} + E_{p0} = E_{cf} + E_{pf}$ donne $0 + qV_0 = \frac{1}{2}mv^2 + qV_f$. Donc

$$v^2 = \frac{2qV}{m}$$

Ensuite, les ions passent à travers une orifice et entrent dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à $\vec{v}$. La trajectoire des ions est un demi-cercle car il rencontre une plaque photographique qui marque leur position diamétralement opposée à l'orifice. La mesure du rayon R devient ainsi possible. La RFD donne

$$qvB = ma_n = m\frac{v^2}{R} \implies v = \frac{q}{m}BR \implies v^2 = \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2R^2$$

En comparant les deux expressions de v^2, on déduit

$$\frac{q}{m} = \frac{2V}{B^2R^2}$$

Ce rapport est donc mesurable expérimentalement car B et V sont connus (imposés) et R peut être mesuré. Pour le même potentiel V et le même champ B, deux ions différents vérifient

$$\frac{q_1}{m_1} = \frac{q_2}{m_2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \iff m_2 = m_1\frac{q_2}{q_1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

Connaissant les charges des ions, la masse d'un seul ion (m_1) permet de déterminer les masses (m_2) des autres ions en mesurant les rayons R_1 et R_2. Pour les isotopes $q_1 = q_2$, on a

$$m_2 = m_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

1.4 Force de Laplace

Chaque élément de longueur $\vec{dl}$ d'un fil, parcouru par courant électrique I et se trouvant dans un champ magnétique $\vec{B}$, est soumis à la force magnétique

$$d\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Le vecteur $\vec{dl}$ est orienté dans le même sens que le courant I. La force magnétique exercée sur tout le fil (de forme quelconque) est

$$\vec{F} = \int_{fil} I(\vec{dl} \wedge \vec{B})$$

Si le vecteur champ magnétique est constant ($\vec{B} = \vec{Const}$), cette relation s'écrit sous une forme simple qui sera très utilisée

$$\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B}$$

où le vecteur $\vec{L} = \int_{fil} \vec{dl}$ joint les deux bouts du fil. La formule $d\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$ se déduit de la force de Lorentz de deux façons :

— Rapide (non rigoureuse) : $d\vec{F} = dq\vec{v} \wedge \vec{B} = dq\frac{\vec{dl}}{dt} \wedge \vec{B} = \frac{dq}{dt}\vec{dl} \wedge \vec{B} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$.

— Longue : Considérons un volume dV du fil de longueur dl et de section dS. Il contient une charge $dq = \rho dV = nqdSdl$ où n est la densité des porteurs de charges ayant tous la même vitesse v. La force magnétique appliquée à dq est $d\vec{f} = dq\vec{v} \wedge \vec{B} = nqdSdl\vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme $\vec{dl}$ est parallèle à $\vec{v}$, on peut écrire $dl\vec{v} = v\vec{dl}$. En utilisant la densité de courant $j = nqv$, on trouve $d\vec{f} = jdS\vec{dl} \wedge \vec{B}$. En intégrant sur toute la section S du fil, on aboutit à la force de la place $d\vec{F}$ car $\int_S jdS = I$.

1.4.1 Couple magnétique agissant sur un circuit parcouru par un courant - Moment magnétique

1.4.1.1 Cadre rectangulaire

Le courant I parcourt (dans le sens $MNPQ$) un cadre vertical de centre O confondu avec l'origine du repère $(Oxyz)$. Les largeurs (horizontales) sont $\vec{PQ} = -\vec{MN} = l\vec{j}$ et longueurs (verticales) sont $\vec{QM} = -\vec{NP} = L\vec{k}$. Le cadre est placé dans un champ magnétique horizontal uniforme $\vec{B} = B\cos\theta\vec{i} + B\sin\theta\vec{j}$. Les forces agissant sur chaque portion du cadre sont $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{MN} = I\vec{PQ} \wedge \vec{B} = -IlB\cos\theta\vec{k}$ et $\vec{F}_{QM} = -\vec{F}_{NP} = I\vec{QM} \wedge \vec{B} = ILB(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$. Les deux dernières forces exercent un couple dont le moment par rapport à O est

$$\vec{\tau} = \frac{l}{2}\vec{j} \wedge \vec{F}_{QM} - \frac{l}{2}\vec{j} \wedge \vec{F}_{NP} = l\vec{j} \wedge \vec{F}_{QM} = ILlB\sin\theta\vec{k}$$

En termes de la surface $S = Ll$ et du vecteur $\vec{n} = \vec{i}$ normale au cadre, le moment du couple s'écrit,

$$\vec{\tau} = IS\vec{n} \wedge \vec{B}$$

L'énergie potentielle du cadre dans le champ magnétique est définie par le travail du moment du couple $dE_p = -dW(\vec{\tau}) =$

$\tau d\theta$. Ainsi,

$$E_p = \int \tau d\theta = -ISB\cos\theta = -IS\vec{n}.\vec{B}$$

1.4.1.2 Généralisation - Moment magnétique

Les formules précédentes se généralisent pour un circuit fermé quelconque de surface S parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. On commence par définir le moment magnétique du circuit par

$$\vec{M} = IS\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à S et déterminé par la règle de la main droite (les doigts dans le sens du courant, la paume vers l'intérieur du circuit, le pouce donne le sens de $\vec{n}$).
Puis, le moment du couple des forces magnétiques appliquées au circuit, et l'énergie potentielle magnétique du circuit sont

$$\vec{\tau} = \vec{M} \wedge \vec{B} E_p = -\vec{M}.\vec{B}$$

Remarquez l'analogie avec les formules du dipôle électrique $\vec{p}$ placé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$.

1.4.1.3 Moment magnétique d'une charge en mouvement circulaire

Une charge q est en mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire indiquant l'axe perpendiculaire à la trajectoire circulaire. La charge q fait un tour en une période T. Ceci est équivalent à un courant $I = \frac{q}{T} = q\frac{\omega}{2\pi}$. La surface du circuit (trajectoire circulaire) étant $S = \pi R^2$, le moment magnétique est

$$\vec{M} = IS\vec{n} = \frac{1}{2}qR^2\vec{\omega}$$

Rappelons que par définition, le vecteur $\vec{\omega}$ est orienté selon la règle de la main droite par rapport au sens du mouvement de la charge et non pas par rapport au sens du courant (qui est opposé au sens du mouvement des charges négatives).

1.5 Loi de Biot et Savart

En électricité, un champ électrique est créé par des charges et exerce des forces sur les charges. De même, un champ magnétique est créé par des charges en mouvement (courant) et exerce des forces sur les charges en mouvement (courant). La loi de Biot et Savart donne l'expression du champ magnétique en fonction

du courant qui le crée. Elle est analogue à celle du champ électrique en fonction de la charge qui le crée.
Loi : Un courant I parcourant, un élément de longueur $\vec{dl}$ orienté suivant I, crée en tout point M de l'espace un champ magnétique

$$d\vec{B} = K_m \frac{I\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}, \qquad K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ en unités S.I.}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, le vecteur unitaire$\vec{u}$ est dirigé de $\vec{dl}$ vers M et r est la distance entre $\vec{dl}$ et M.
L'analogie entre les lois des champs, électrostatique et magnétique, se remarque par les remplacements suivants : $\varepsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}$, $dq \leftrightarrow I\vec{dl}$, $\times \leftrightarrow \wedge$.
Le champ magnétique créé par un fil est

$$\vec{B} = \int_{fil} K_m \frac{I\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

1.5.1 Champ créé par un courant rectiligne infini

I : suivant $(z'Oz)$ de $-\infty$ à $+\infty$, donc $\vec{dl} = dz\vec{k}$. Calculons $d\vec{B}(y)$ au point y sur l'axe Oy. Si $\vec{u}$ fait un angle θ avec Oy, alors $\vec{u} = \cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k}$. Par conséquent,

$$d\vec{B} = -K_m I \frac{dz}{r^2} \cos\theta\vec{i}$$

où $r = \frac{y}{\cos\theta}$ et $z = y\tan\theta$ de sorte que $dz = y\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$. Le champ magnétique total est

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{\infty} K_m I \frac{dz}{r^2} \cos\theta\vec{j} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K_m I \frac{d\theta}{y^2} \cos\theta\vec{j}$$

On trouve

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y^2}\vec{i}$$

Évidemment, n'importe quel autre axe perpendiculaire à $(z'Oz)$ peut être considéré comme étant l'axe $(y'Oy)$. Par conséquent, l'expression de $\vec{B}$ se généralise par la formule suivante :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}$$

où R est la distance entre M et le courant. Les lignes de champ sont des cercles centrés autour du courant et orientés selon la règle du bonhomme d'Ampère (le courant entre par ses pieds et sort par sa tête, en regardant vers M, son bras gauche donne le sens de B).

1.5.2 Champ créé par une boucle sur l'axe passant par son centre

I suivant un cercle de rayon R, de centre O et contenu dans le plan $(x'Ox, z'Oz)$. Le sens du courant est de Ox vers Oz. Sur l'axe Oz et aux points $(0, 0, \pm R)$, on a $\vec{dl} = \mp dl\vec{i}$. Le point M est sur Oy et sa coordonnée est $y = a$. L'angle entre $\vec{u}$ et Oy est θ de sorte que $\vec{u} = \cos\theta\vec{j} \mp \sin\theta\vec{k}$. Donc,

$$d\vec{B} = K_m\frac{Idl}{r^2}(\mp\cos\theta\vec{k} - \sin\theta\vec{j})$$

On voit que la composante sur $\vec{k}$ s'élimine quand on fait la somme. Par conséquent, on ne s'intéresse qu'à la composante sur $\vec{j}$,

$$\vec{B} = \int_{cercle} -K_m\frac{Idl}{r^2}\sin\theta\vec{j}$$

or $r = \sqrt{R^2 + a^2}$ et $\sin\theta = \frac{R}{r}$ sont constants, on intègre seulement $\int_{cercle} dl = 2\pi R$ et on trouve

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}(-\vec{j})$$

Le vecteur $(-\vec{j})$ peut être retrouvé par la règle du bonhomme d'ampère (en inversant le sens du courant, on trouve $(+\vec{j})$), de sorte que c'est la formule du module qui est utilisée

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Au centre de la boucle, $a = 0$, cette loi devient

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

1.5.3 Champ créé par un solénoïde infini

Un solénoïde est un fil enroulé en spires (boucles) identiques, adjacentes et en forme de cylindre. Soit $x'Ox$ l'axe du cylindre et $n = \frac{dN}{dx}$ le nombre de spires par unité de longueur. On veut calculer le champ en un point x_0 de l'axe $x'Ox$. Les dN spires situées à la position x créent le même champ à l'origine O. Celui-ci est donné par la formule d'une spire multipliée par le nombre $dN = ndx$ en remplaçant a par la distance $x - x_0$

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + (x - x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \times dN = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + (x - x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \times ndx$$

Alors, la contribution de toutes les spires est

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + (x - x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} ndx$$

En posant $x - x_0 = R\tan\theta$, on aura $dx = Rd\theta/\cos^2\theta$ et $R^2 + (x - x_0)^2 = R^2/\cos^2\theta$, et l'intégrale s'étendra de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$,

$$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0}{2} I R^2 \cos\theta n d\theta$$

On obtient

$$B = \mu_0 n I$$

Remarques :

- Cette formule est à retenir. Elle ne dépend de x_0.
- Le champ à l'extérieur du solénoïde est nul. Ceci se démontre par le théorème d'Ampère (voir le cours sur le site de la faculté de physique de l'USTHB).
- Si le solénoïde est de longueur finie, l'intégrale se fait entre les angles θ_1 et θ_2 correspondant aux extrémités x_1 et x_2 du solénoïde par rapport à x_0. On obtient

$$\begin{aligned} B(x_0) &= \frac{\mu_0 n I}{2}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\ \sin\theta_i &= \frac{x_i - x_0}{\sqrt{R^2 + (x_i - x_0)^2}},\ i = 1, 2. \end{aligned}$$