Chapitre 5

Réseaux Électriques

5.1 Générateur

Le générateur transforme une forme d'énergie (mécanique, chimique, etc..) en une énergie électrique.
Générateur de tension : Il maintient une différence de potentiel constante entre ses bornes, quelque soit le circuit extérieur.
Générateur de courant : Il délivre un courant constant, quelque soit le circuit extérieur.
Dans ce cours, nous considérons les générateurs de tension réversibles, c'est-à-dire qui fonctionnent comme des générateurs ordinaires ou comme des accumulateurs. Dans les deux figures suivantes, un générateur est représenté par une pile avec son schéma équivalent à l'intérieur :

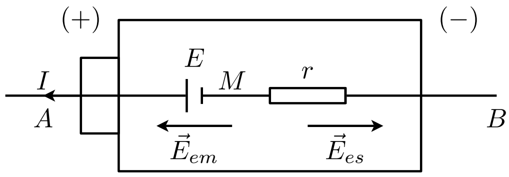


Fig. (a) : Générateur

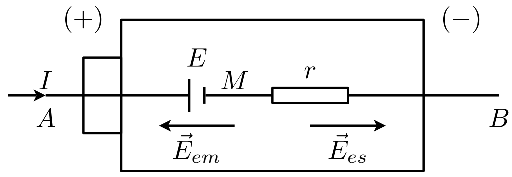


Fig. (b) : Accumulateur

Dans le générateur, le courant n'est pas dû au champ électrostatique $\vec{E}_{es}$ car celui-ci s'oppose au mouvement des charges positives. C'est une force chimique $\vec{F}_{em}$ qui, appliquée à une charge positive q, lui permet de remonter le potentiel (de V_B à V_A) à l'intérieur du générateur. Pour un autre type de générateur, cette force est de nature différente (magnétique dans une dynamo). On définit alors un champ électromoteur d'origine non électrostatique (chimique, magnétique,...) tel que $\vec{F}_{em} = q\vec{E}_{em}$. On définit la force électromotrice (f.e.m) E du générateur (c'est une d.d.p. et non une force) par analogie à la d.d.p $V_A - V_B$ en faisant attention aux signes des champs

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}_{es}.\vec{dl} \qquad E = \int_B^A \vec{E}_{em}.\vec{dl}$$

Il n'y a pas de signe $(-)$ dans la définition de E car$\vec{E}_{em}$ est dans le sens des potentiels croissants ; de plus, ce champ ne dérive pas d'un potentiel car sa circulation est égale à une constante E et non à une différence d'une même fonction (potentiel V).
Quand le générateur est en circuit ouvert ($I = 0$), les charges sont immobiles. Par conséquent,

$$\vec{F}_{em} = -\vec{F}_{es} \implies \vec{E}_{em} = -\vec{E}_{es} \implies E = V_A - V_B$$

La f.e.m est la d.d.p aux bornes du générateur quand il n'est pas branché (circuit ouvert).
Quand le générateur est dans un circuit fermé, il fonctionne comme un générateur (Fig. a) ou comme un accumulateur (Fig. b). La relation $E = V_A - V_B$ doit être modifiée pour tenir compte de l'effet Joule dans le générateur. Cet effet est représenté par une résistance interne r très faible. En effet :
Figure a : Le générateur fonctionne normalement (Le courant réel I est dans le sens conventionnel : il sort de la borne positive)
Loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma\vec{E} = \sigma\vec{E}_{es} + \sigma\vec{E}_{em}$. La circulation du champ, avec $\vec{j}$ constant et parallèle à $\vec{BA}$, donne

$$\int_B^A \vec{E}_{es}.\vec{dl} + \int_B^A \vec{E}_{em}.\vec{dl} = \int_B^A \frac{\vec{j}.\vec{dl}}{\sigma} = \frac{\vec{j}.\vec{BA}}{\sigma} = \frac{jL}{\sigma}$$

où $\left\|\vec{BA}\right\| = L$. En utilisant, $j = \frac{I}{S}$ et $r = \rho\frac{L}{S} = \frac{L}{\sigma S}$, la relation précédente devient

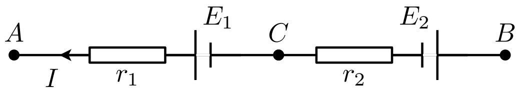
$$-(V_A - V_B) + E = rI \implies E = V_A - V_B + rI$$

On voit que $V_A - V_B$ est la tension utilisable. Cette relation exprime (et se déduit de) la conservation de l'énergie.
Bilan d'énergie ($\Delta q = I\Delta t$) : $W_{fournie} = E\Delta q = EI\Delta t$, $W_{utilisée} = (V_A - V_B)\Delta q = (V_A - V_B)I\Delta t$, $W_{dissipée} = V_r\Delta q = rI^2\Delta t$
Conservation : $W_{utilisée} = W_{fournie} - W_{dissipée} \implies (V_A - V_B)I\Delta t = EI\Delta t - rI^2\Delta t \iff (V_A - V_B) = E - rI$
Puissance : $P_{utilisée} = P_{fournie} - P_{dissipée} \implies (V_A - V_B)I = EI - rI^2$
Rendement : $\eta = \frac{W_{utilisée}}{W_{fournie}} = \frac{P_{utilisée}}{P_{fournie}} = \frac{(V_A - V_B)}{E}$
Figure b : Le générateur fonctionne comme un accumulateur (Le courant réel I est dans le sens opposé au sens conventionnel : il sort de la borne négative)
Dans ce cas, $\vec{j}.\vec{BA} = -jL$ et le même calcul que celui de la figure (a) conduit à $-(V_A - V_B) + E = -rI$. Donc

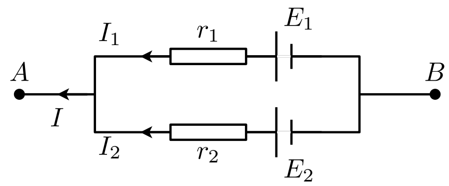
$$E = (V_A - V_B) - rI$$

Bilan énergétique ($\Delta q = I\Delta t$) : $W_{utilisée} = E\Delta q = EI\Delta t$, $W_{fournie} = (V_A - V_B)\Delta q = (V_A - V_B)I\Delta t$, $W_{dissipée} = V_r\Delta q = rI^2\Delta t$
Conservation : $W_{utilisée} = W_{fournie} - W_{dissipée} \implies E\Delta q = (V_A - V_B)\Delta q - rI^2\Delta t \iff (V_A - V_B) = E + rI$
Puissance : $P_{utilisée} = P_{fournie} - P_{dissipée} \implies EI = (V_A - V_B)I - rI^2$
Rendement : $\eta = \frac{W_{utilisée}}{W_{fournie}} = \frac{P_{utilisée}}{P_{fournie}} = \frac{E}{(V_A - V_B)}$
Association de générateurs :

Série



Parallèle



Série : On utilise les formules du générateur pour E_1 et de l'accumulateur pour E_2
$V_A - V_B = (V_A - V_C) - (V_B - V_C)$
$V_A - V_B = E_1 - r_1 I - (E_2 + r_2 I) = (E_1 - E_2) + (r_1 + r_2)I = E_{eq} + r_{eq} I$
Parallèle (les f.e.m doivent être égales et de même polarité)
$I = I_1 + I_2 = \frac{E-(V_A-V_B)}{r_1} + \frac{E-(V_A-V_B)}{r_2} = [E - (V_A - V_B)]\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{E-(V_A-V_B)}{R_{eq}}$
Dans le cas général, on a :

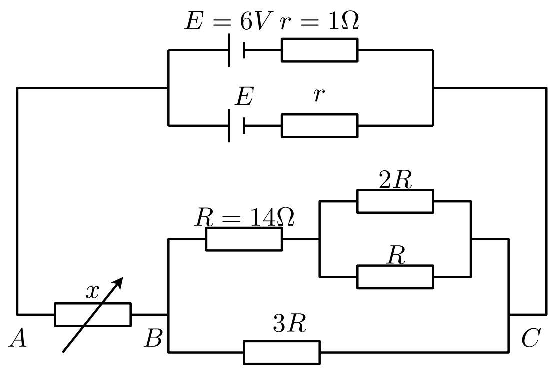
Disposition	E_{eq}et r_{eq}	Exemple $N = 2$	Générateurs identiques
Série	$E_{eq} = \sum_{i=1}^{N} \pm E_i$	$E_{eq} = E_1 + E_2$	$E_{eq} = NE$
	$r_{eq} = \sum_{i=1}^{N} r_i$	$r_{eq} = r_1 + r_2$	$r_{eq} = Nr$
Parallèle	$E_{eq} = E$	$E_{eq} = E$	$E_{eq} = E$
	$\frac{1}{r_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i}$	$r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$	$r_{eq} = \frac{r}{N}$

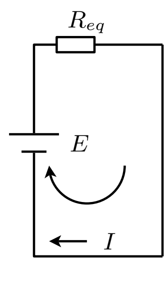
Remarques :
- Série : Le symbole $(\sum \pm)$ signifie que les générateurs sont affectés du signe $(+)$ alors que les accumulateurs sont affectés du signe $(-)$.
- Parallèle : Les f.e.m de tous les générateurs doivent être égales et de même polarité.

Exercice 3

Le circuit ci-dessous (à gauche) comporte, deux générateurs identiques de f.e.m E et de résistance interne r, une résistance variable x et un assemblage de résistances entre B et C.

1. Trouver la résistance R_{BC} équivalente à la portion (BC) du circuit.

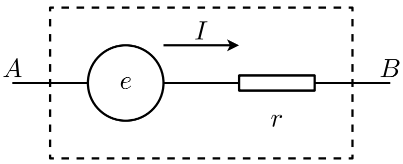




2. Exprimer l'intensité du courant traversant la résistance x en fonction de E, r, x et R_{BC}.
a) Trouver la puissance dissipée dans la résistance x.
b) Pour quelle valeur de la résistance x cette puissance est-elle maximale ?
Réponse :
1) La résistance équivalente à R et $2R$ (en parallèle) est $R_1 = 2R^2/3R = 2R/3$.
La résistance équivalente à R et R_1 (en série) est $R_2 = R + 2R/3 = 5R/3$.
La résistance équivalente à $3R$ et R_2 (en parallèle) est $R_{BC} = (3R \times 5R/3) / (3R + 5R/3) = 15R/14$
A.N. $R_{BC} = 15\,\Omega$.
2) Les deux générateurs identiques, en parallèle et de même polarité sont équivalents à un seul générateur de même f.e.m E et de résistance interne $r/2$. Cette résistance est en série avec x et R_{BC}. Le circuit équivalent est représenté à droite de la figure de l'énoncé où $R_{eq} = x + R_{BC} + r/2$. Le courant I est celui qui traverse la résistance x :
$E = R_{eq}I \Rightarrow I = E/R_{eq} = E/\left(x + R_{BC} + r/2\right)$
3-a) $P_x = xI^2 = E^2x/\left(x + R_{BC} + r/2\right)^2$
3-b) $dP/dx = E^2\left(\frac{(x+R_{BC}+r/2)^2 - 2x(x+R_{BC}+r/2)}{(x+R_{BC}+r/2)^4}\right) = E^2\left(\frac{(x+R_{BC}+r/2)(-x+R_{BC}+r/2)}{(x+R_{BC}+r/2)^4}\right)$
Le maximum correspond à $dP/dx = 0 \Rightarrow x = R_{BC} + r/2 = 15.5\,\Omega$. La deuxième solution $x = -\left(R_{BC} + r/2\right)$ n'est pas acceptable.

5.2 Récepteur

Un moteur électrique transforme l'énergie électrique en énergie mécanique, c'est un exemple de récepteur. Un récepteur transforme l'énergie électrique en une autre forme d'énergie. Il est représenté par le schéma équivalent suivant :



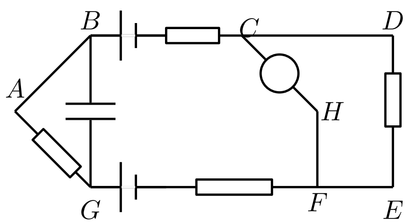
e est la force contre électromotrice (f.c.e.m, c'est une d.d.p. et non une force) et r est la résistance interne du récepteur.
Bilan énergétique : $W_{fournie} = W_{utilisée} + W_{dissipée} \Longrightarrow (V_A - V_B)\Delta q = e\Delta q + rI^2\Delta t$
Bilan de puissance : $P_{fournie} = P_{utilisée} + P_{dissipée} \Longrightarrow (V_A - V_B)I = eI + rI^2$
Relation entre les potentiels : $(V_A - V_B) = e + rI$
Rendement : $\eta = \frac{W_{utilisée}}{W_{fournie}} = \frac{P_{utilisée}}{P_{fournie}} = \frac{e}{(V_A - V_B)}$
Association de récepteurs
Un calcul identique à celui des générateurs conduit à :

Disposition	e_{eq}et r_{eq}	Exemple $N=2$	Récepteurs identiques
Série	$e_{eq}=\sum_{i=1}^{N} e_i$	$e_{eq}=e_1+e_2$	$e_{eq}=Ne$
	$r_{eq}=\sum_{i=1}^{N} r_i$	$r_{eq}=r_1+r_2$	$r_{eq}=Nr$
Parallèle	$e_{eq}=e$	$e_{eq}=e$	$e_{eq}=e$
	$\frac{1}{r_{eq}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{r_i}$	$r_{eq}=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$	$r_{eq}=\frac{r}{N}$

5.3 Lois de Kirchoff :

5.3.1 Définitions

Dipôle : un dipôle est un élément électrique qui possède une borne d'entrée et une borne de sortie (résistance, condensateur, générateur, récepteur) . Il est qualifié d'actif lorsqu'il fournit de l'énergie (cas d'un générateur) et de passif lorsqu'il en consomme.
Fil de jonction : C'est un fil qui sert à lier les dipôles. Sa résistance est négligeable et tous ses points sont au même potentiel.
Réseau : C'est un circuit complexe constitué d'un ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils de jonction.
Nœud : C'est l'intersection de trois fils de jonction ou plus.
Branche : C'est une portion du réseau comprise entre deux nœuds.
Maille : C'est un ensemble de branches formant un circuit fermé.



Noeuds : B, C, F et G

$V_A=V_B$, $V_C=V_D$, $V_E=V_F$

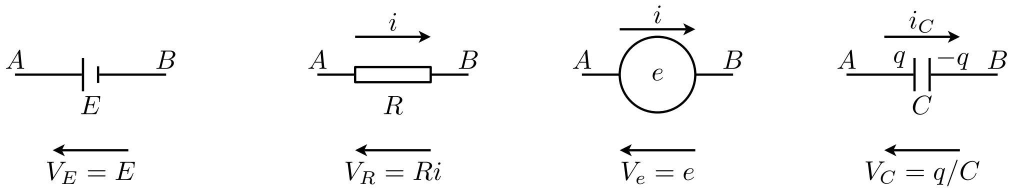
5.3.2 Conventions

a) Courants :

Dans chaque branche, on choisit un sens **arbitraire** du courant algébrique i. Après calcul, on peut avoir l'un des résultats suivants :
- $I > 0$, alors le courant i choisi est le courant réel.
- $I < 0$, alors on a deux cas :
  - La branche ne contient pas de récepteur pur : le courant réel a le sens contraire de celui de i et la même intensité ($I(réel) = -I(choisi)$)
  - La branche contient un récepteur pur : le résultat est faux. Il faut refaire les calculs en inversant le sens de i. S'il est toujours négatif, alors la seule solution acceptable est le courant nul. Dans ce cas, la tension aux bornes du récepteur n'est pas suffisante pour le faire fonctionner et on peut supprimer sa branche du circuit.

b) Tensions :

Considérons les dipôles $X = \{E, R, e, C\}$ et leurs tensions V_X (figure ci-dessous).



Pour le générateur (dipôle actif), la d.d.p. $V_E = E$ est dirigée vers la borne positive. Pour les autres (dipôles passifs), les tensions $V_R = RI$, $V_e = e$ et $V_C = \frac{q}{C}$ ont le sens opposé de celui du courant I arbitrairement choisi. Dans la figure précédente, la tension pointe vers A pour chaque dipôle, ce la signifie que l'on doit écrire :

$$V_A - V_B = V_X \qquad V_B - V_A = -V_X$$

Par exemple, pour la résistance $V_B - V_A = -V_R = -RI$.

Remarque

Cette convention signifie que $V_A > V_B$ pour le générateur (quelque soit le courant) et pour le récepteur pur (car le courant choisi doit être le courant réel). Par contre, pour la résistance et le condensateur, on peut avoir l'inverse $V_A < V_B$ si le courant choisi n'est pas réel ($I < 0$).

Exercice

Vérifiez que la convention est correcte pour tous les cas de notre exemple, en tenant compte du fait que le courant réel circule du grand potentiel vers le petit potentiel.

Réponse

Générateur :

Quelque soit le sens du courant, la borne positive désigne le plus grand potentiel donc$V_A > V_B$ et $V_A - V_B = E$.

Résistance :

Si $I > 0$, c'est le courant réel. Alors $V_A > V_B \Rightarrow V_A - V_B = RI$ et $V_B - V_A = -RI$.

Si $I < 0$, c'est l'inverse du courant réel. Alors $V_A < V_B \Rightarrow V_A - V_B = RI$ et $V_B - V_A = -RI$.

Récepteur pur **:** Le courant choisi doit obligatoirement être le courant réel, donc $V_A > V_B$ et

$$V_A - V_B = V_e = e \Leftrightarrow V_B - V_A = -V_e = -e$$

Condensateur : Le courant entre par l'armature qui porte la charge q et sort par celle qui porte la charge $-q$. Alors,
si $I_C > 0$, c'est le courant réel et $q > 0$. Alors $V_A > V_B \Rightarrow V_A - V_B = \frac{q}{C}$.
Si $I_C < 0$, c'est l'inverse du courant réel et $q < 0$. Alors $V_A < V_B \Rightarrow V_A - V_B = \frac{q}{C}$.

5.3.3 Lois de Kirchoff

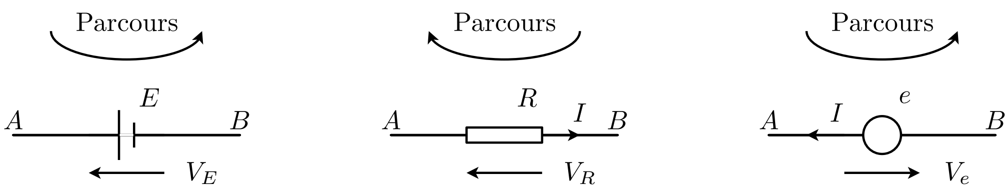
a) Loi des nœuds : La somme des courants algébriques qui entrent dans un nœud est égale à la somme de ceux qui en sortent

$$\sum I_{entrants} = \sum I_{sortrants}$$

b) Loi des mailles : La somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle

$$\begin{aligned} 0 &= V_A - V_A = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + .. + (V_N - V_A) \\ 0 &= \sum_X \pm V_X \end{aligned}$$

où $V_A - V_B = \pm V_X$ est la tension d'un dipôle X affectée du bon signe conformément à la convention des tensions. Quand on calcule $V_A - V_B$, on dit que l'on parcourt le dipôle de A vers B. Exemple :

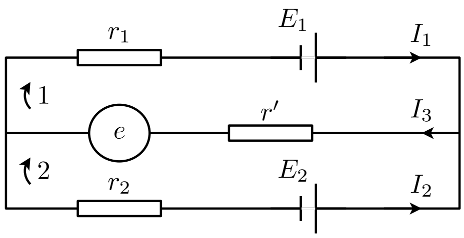


Générateur : Le parcours signifie que l'on calcule $V_A - V_B = E$.
Résistance : Le parcours signifie que l'on calcule $V_B - V_A = -RI$.
Récepteur : Le parcours signifie que l'on calcule $V_A - V_B = -e$.
Ceci conduit à la procédure pratique suivantes :

On choisit un sens de parcours d'une maille, puis pour chaque dipôle :

1. On écrit RI, $\frac{Q}{C}$ ou e si le sens choisi du parcours est le même que celui du courant qui traverse le dipôle. Si le sens du parcours est opposé à celui du courant, on écrit $-RI$, $-\frac{Q}{C}$ ou $-e$.
2. On écrit E si le sens choisi du parcours rencontre la borne $(+)$ avant la borne $(-)$ du générateur. Sinon, on écrit $-E$.

Exercice 5
On considère le circuit de la figure ci-dessous comportant un générateur de f.e.m $E_1 = 100\,\mathrm{V}$ et un générateur réversible de f.e.m $E_2 = 50\,\mathrm{V}$, de résistances internes respectives $r_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $r_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$ et un récepteur de f.c.e.m e et de résistance interne $r' = 100\,\Omega$.



1. Établir les expressions des intensités des courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans les différentes branches du circuit.
2. Quelle condition doit vérifier la f.c.e.m e du récepteur pour que le dispositif puisse fonctionner ?
3. Calculer I_1, I_2 et I_3 pour $e = 60\,\mathrm{V}$.
4. L'élément de f.e.m E_2 fonctionne-t-il comme générateur ou comme récepteur ? Justifier votre réponse.

Réponse

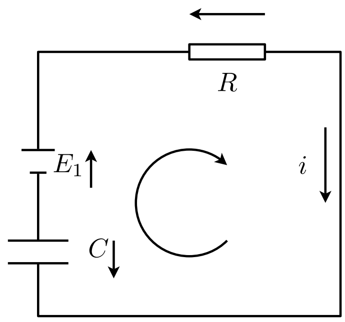
1.Maille 1 : $r_1I_1 - E_1 + r'I_3 + e = 0$ Maille 2 : $-r_2I_2 + E_2 - e - r'I_3 = 0$ Loi des nœuds : $I_1 + I_2 = I_3$
Réécrivons les deux premières équations en remplaçant I_3 par $I_1 + I_2$
Maille 1 : $(r_1 + r')I_1 + r_2I_2 = E_1 - e$ Maille 2 : $r'I_1 + (r_2 + r')\,I_2 = E_2 - e$
En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues, on trouve
$I_1 = \frac{(r_2+r')E_1 - r'E_2 - er_2}{r_1r_2 + r_1r' + r_2r'}$, $I_2 = \frac{-r'E_1 + (r_1+r')E_2 - er_1}{r_1r_2 + r_1r' + r_2r'}$, $I_3 = \frac{r_2E_1 + r_1E_2 - e(r_1+r_2)}{r_1r_2 + r_1r' + r_2r'}$
2) Il faut que le courant qui traverse le récepteur soit positif : $I_3 > 0 \Rightarrow e < 83\,\mathrm{V}$.
3) $e = 60\,\mathrm{V}$. Le calcul donne $I_1 = 0.83\,\mathrm{mA}$, $I_2 = -0.15\,\mathrm{mA}$, $I_3 = 0.68\,\mathrm{mA}$.
4) E_2 fonctionne comme récepteur car le courant réel $(-I_2)$ entre par la borne positive de ce générateur.

Remarques :

- Les deux nœuds du circuit donne la même équation.
- On ne tient pas compte de la grande maille car son équation est la somme des équations des mailles 1 et 2.

5.4 Étude d'un circuit RC

5.4.1 Condensateur complètement chargé ou déchargé



Au début, le condensateur complètement déchargé est équivalent à un fil de jonction ($V_C = \frac{q}{C} = 0$, $i = I_0$).

Maille : $-E + RI_0 + V_C = 0$ avec $V_C = 0 \implies I_0 = \frac{E}{R}$
A la fin, le condensateur complètement chargé est équivalent à un circuit ouvert ($i = i_C = \frac{dq}{dt} = 0$, car $q = Q_f = Const$).
Maille : $-E + Ri + \frac{Q_f}{C} = 0$ avec $i = 0 \implies Q_f = EC$
Remarque :
Les expressions du courant initial I_0 et de la charge finale Q_f dépendent du circuit.

5.4.2 Charge d'un condensateur

On continue avec le circuit précédent. A un instant intermédiaire, on a $q \neq 0$ et $i \neq 0$.
Maille : $-E_1 + Ri + \frac{q}{C} = 0$. On cherche i_C qui se détermine facilement dans ce cas car $i_C = i$, donc

$$i_C = \frac{E}{R} - \frac{q}{RC}$$

En utilisant $i_C = \frac{dq}{dt}$, on obtient l'équation différentielle de la charge du condensateur

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{Q_f}{\tau}, \quad \tau = RC, \quad Q_f = EC$$

Solution :

$$q(t) = Q_f + Ae^{-t/\tau}$$

Initialement, le condensateur était complètement déchargé (à $t_0 = 0\,\text{s}$, $Q_0 = q(0) = 0 \implies A = -Q_f$. Comme $Q_f = EC$, on obtient

$$q(t) = EC(1 - e^{-t/\tau}) \implies i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

La représentation graphique et les propriétés de cette solution sont connus.

5.4.3 Décharge

Fig. (a) : i et q algébriques

Fig. (b) : i et q réels

Dans ce cas, on suppose que la charge initiale est Q_0. La charge finale est évidemment nulle $Q_f = 0\,\mathrm{C}$.

Méthode algébrique (Fig. a)	**Méthode i et q réels (Fig. b)**
i et q sont algébriques. On applique les conventions habituelles : Maille : $\frac{q}{C} + Ri = 0$ $i_C = i = \frac{dq}{dt} \implies \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0$	i et q sont réels et positifs. C doit être considéré comme un générateur de borne positive q (sortie de i). Maille : $-\frac{q}{C} + Ri = 0$ $i_C = i = -\frac{dq}{dt}$ (car q diminue) $\implies \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0$

Solution $q(t) = Ae^{-t/\tau}$
Condition « initiale » : $Q_0 = q(0) = A$. Donc

$$q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \implies i_C(t) = -\frac{Q_0}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Remarques :

– Pour trouver l'équation différentielle, il faut déterminer i_C d'abord . Puis, remplacer i_C par $\frac{dq}{dt}$. L'équation générale de la charge et de la décharge est toujours de la forme

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{Q_f}{\tau}$$

où τ et Q_f dépendent du circuit, et Q_f peut être déterminée avant l'équation différentielle en utilisant $i_C = \frac{dq}{dt} = 0$ dans le circuit.

– La solution est $q(t) = Q_f + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. La constante A se détermine par la connaissance de

$$Q_0 = q(t_0) = Q_f + A\exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) \implies A = (Q_0 - Q_f)\exp\frac{t_0}{\tau}$$

La solution générale, est

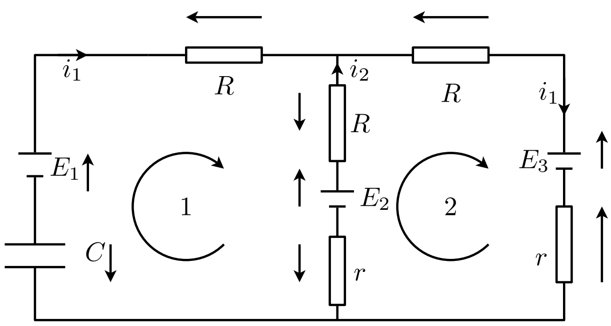
$$q(t) = Q_f + (Q_0 - Q_f)\exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)$$

$(Q_0 - Q_f)$ est négatif dans le cas de la charge ($q(t)$ croissante) et positif dans le cas de la décharge ($q(t)$ décroissante).

– S'il y a un récepteur pur dans la branche du condensateur, on peut utiliser la méthode algébrique mais il faut choisir un courant positif (courant réel) dans la branche de ce récepteur.

Exemple :

Trouver la charge $q(t)$ du condensateur de la figure ci-dessous où les courants sont représentés sur les fils de jonction et les tensions par les flèches séparées. Initialement, le condensateur était déchargé.



Kirchoff
Nœud : $i_1 + i_2 = i_3$
Maille 1 : $-E_1 + Ri_1 - Ri_2 + E_2 - ri_2 + \frac{q}{C} = 0$
Maille 2 : $ri_2 - E_2 + Ri_2 + Ri_3 + E_3 + ri_3 = 0$
Condensateur : $i_C = i_1 = \frac{dq}{dt}$
Charge finale du condensateur
$i_C = i_1 = 0 \implies i_2 = i_3 = I$
Maille 2 $\implies -E_2 + E_3 + 2(R+r)I = 0 \implies I = \frac{E_2 - E_3}{2(R+r)}$
Maille 1 $\implies -E_1 - (R+r)I + E_2 + \frac{Q_f}{C} = 0 \implies Q_f = \frac{2E_1 - E_2 - E_3}{2}C$
Équation différentielle de la charge
On doit déterminer $i_C = i_1$, il est plus d'utiliser l'équation nœud pour remplacer $i_3 = i_1 + i_2$ dans les équations des mailles. On obtient ainsi rapidement deux équations à deux inconnues (i_1 et i_2)
Maille 1 : $Ri_1 - (R+r)i_2 + \frac{q}{C} = E_1 - E_2$
Maille 2 : $(R+r)i_1 + 2(r+R)i_2 = E_2 - E_3$
On élimine i_2 par ($2 \times$ Maille1 + Maille2)
$(3R+r)i_1 + 2\frac{q}{C} = 2E_1 - E_2 - E_3 \implies \frac{dq}{dt} + 2\frac{q}{C(3R+r)} = \frac{2E_1 - E_2 - E_3}{(3R+r)}$
Par conséquent, $\tau = \frac{C(3R+r)}{2}$ et $Q_f = \frac{(2E_1 - E_2 - E_3)C}{2}$
Solution $q(t) = Q_f + Ae^{\frac{-t}{\tau}}$, condition initiale $q(0) = 0 \implies Q_f + A = 0 \implies A = -Q_f$. Donc

$$q(t) = Q_f(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$