Chapitre 4

Conduction électrique

4.1 Courants électriques

4.1.1 Courant

Un courant électrique est un mouvement de charges d'un point A vers un point B d'un même conducteur. C'est un déséquilibre dû à une différence de potentiel (d.d.p) entre ces deux points $V_A \neq V_B$. Dans les métaux, les porteurs de charge sont les électrons de charge $q = -e$. Dans les solutions, les porteurs de charge sont les ions (anions et cations). Dans les semi-conducteurs, les porteurs de charge positive peuvent être des électrons ou des trous (un trou correspond à l'absence d'un électron). Dans les trois cas, le mouvement des porteurs de charge négative est équivalent à celui des porteurs de charge positive, mais en sens inverse.

Un générateur est un appareil qui maintient le déséquilibre et assure un courant permanent au moyen d'une d.d.p permanente. Le potentiel de sa borne « positive » est supérieur à celui de la borne « négative » . Ceci ne veut pas dire que la borne « positive » a réellement un potentiel positif et que la borne « négative » a un potentiel négatif.

Le sens conventionnel du courant est celui du mouvement des charges positives (opposé à celui des électrons). Le courant électrique circule du pôle positif vers le pôle négatif à l'extérieur du générateur et du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur du générateur.

L'intensité du courant est la charge qui traverse une section S du conducteur par unité de temps :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

(dQ traverse S pendant dt). Unité Ampère ($1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{C/s}$). Le courant est continu si son intensité est constante au cours du temps.

Une ligne de courant est la trajectoire orientée décrite par une charge positive en mouvement. Un tube de courant est constitué par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

4.1.2 Vecteur densité de courant

Dans un conducteur métallique, la densité des porteurs de charge est $n > 0$, la charge d'un seul porteur de charge est $q = \pm e$ et sa vitesse est $\vec{v}_{\pm e} = \pm \vec{v}$ où $\vec{v}$ a le même sens que celui du courant. La densité de charges ρ_c et le vecteur densité de courant sont (en valeurs algébriques)

$$\rho_c = nq, \qquad \vec{j} = nq\vec{v}_q = ne\vec{v}$$

Exemples et unités pour le cuivre $n = 8.38 \times 10^{+28}\,\mathrm{e^-/m^3}$, $\rho_c = -1.34 \times 10^{+10}\,\mathrm{C/m^3}$, $v_{-e} = -v = -3.73 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$, on trouve alors $j = 5 \times 10^6\,\mathrm{A.m^{-2}}$. Les porteurs de charges positives et négatives ont des vitesses et charges opposées de sorte que, dans les deux cas, le vecteur $\vec{j}$ a toujours le même sens que celui du courant ($\vec{j} = ne\vec{v}$). Pour chaque section S du conducteur, on a

$$I = \iint_S \vec{j}.\vec{dS}$$

Remarques :

- Le courant est le flux du vecteur densité de courant à travers la surface S qui peut être ouverte ou fermée. Pour que I soit positif, le vecteur $\vec{dS}$ est choisi dans le même sens que $\vec{j}$ s'ils sont parallèles. Sinon, on le choisit telle que l'angle entre $\vec{j}$ et $\vec{dS}$ soit aigu (inférieur à $\pi/2$).
- Dans tout le cours, on ne considéra que le cas où $\vec{j}$ est parallèle à$\vec{dS}$ et $\left\|\vec{j}\right\|$ est constant sur S alors

$$I = \left\|\vec{j}\right\| S \implies \left\|\vec{j}\right\| = \frac{I}{S}$$

4.2 Mouvement des porteurs de charge

4.2.1 Mouvement dans le vide

La charge algébrique $q = \pm e$ est accélérée ou retardée par une d.d.p. $V_A - V_B$ entre deux points A et B du vide où le champ électrique est uniforme (exemple dans un tube à vide).
Relation Fondamentale : $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$ avec $E = -\frac{V_A - V_B}{x_A - x_B}$. Donc

$$a = -\frac{q}{m}\frac{V_A - V_B}{x_A - x_B} = Const$$

Le mouvement est rectiligne et uniformément varié (accéléré s'il s'agit d'un électron qui se déplace vers le plus grand potentiel).
Énergie : $\vec{F} = q\vec{E}$ dérive d'un potentielle. Donc $E_T(A) = E_T(B)$, soit

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B$$

Cette équation permet de déterminer v_A si l'on connaît v_B (ou l'inverse)

$$v_A^2 = v_B^2 + 2\frac{q}{m}(V_B - V_A)$$

4.2.2 Mouvement dans un conducteur

Avant l'application d'une d.d.p. les porteurs de charge ont un mouvement désordonné dû à l'agitation thermique. Leur vitesse moyenne v est nulle.
A $t = 0\,\mathrm{s}$, une d.d.p. $V_A - V_B$ est appliquée entre deux sections S_A et S_B d'un conducteur. En plus de la force électrique$\vec{F} = q\vec{E}$, les porteurs de charge sont soumis à une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$ représentant le ralentissement des porteurs de charge par le réseau d'atomes (ou d'ions) du conducteur.
La vitesse moyenne des porteurs de charge obéit à l'équation différentielle

$$\vec{F} + \vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \implies \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{q}{m}E, \qquad \tau = \frac{m}{k}$$

La solution (correspondant à $v(0) = 0\,\mathrm{m/s}$) est

$$v(t) = v_l(1 - e^{-t/\tau}), \qquad v_l = \frac{q}{k}E$$

Le mouvement des porteurs de charge passe donc par deux régimes :

Agitation thermique	Régime transitoire très court	Régime permanent
$t \leq 0$, $E = 0\,\mathrm{V/m}$	Mouvement accéléré $t < \tau$	Mouvement uniforme $t > \tau$
$v = 0\,\mathrm{m/s}$	$v \nearrow$	$v = v_l$

Pour $t = \tau$, le régime permanent est supposé atteint lorsque $v = 0.63v_l$. Si le régime permanent est supposé atteint quand $v(t) = 0,99v_l$, alors $(1 - e^{-t/\tau}) = 0,99$ et $t = -\tau\ln(1 - 0,99) = 4,6\tau \simeq 5\tau$. Le régime permanent est très rapidement atteint.
Dorénavant, on ne considèrera que le régime permanent pour lequel la vitesse des porteurs de charge est constante

$$v = v_l = \frac{q}{k}E$$

La loi générale est

$$\vec{v} = \mu\vec{E}$$

où le coefficient μ est appelé mobilité des porteurs de charge. Unité $\mathrm{m^2/V.s}$. Dans ce modèle, $\mu = \frac{q}{k}$.
Cette vitesse moyenne de dérive des porteurs de charge est assez petite mais tous les porteurs de charges l'atteignent en même temps car le champ électrique s'établit instantanément dans tout le conducteur. Pour cette raison, on a l'impression que le courant s'établit instantanément.

4.3 Loi d'Ohm

4.3.1 Loi macroscopique et loi locale

Loi macroscopique : A température constante, la d.d.p. entre deux points d'un conducteur est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse

$$V_A - V_B = RI, \quad V_A > V_B, \quad I > 0$$

R est appelée résistance et son unité est l'ohm ($1\,\Omega = 1\,\mathrm{V/A}$). La conductance est l'inverse de la résistance ($\frac{1}{R}$ en Ω^{-1}). Les conducteurs pour lesquels la loi d'Ohm est applicable (avec R constante) sont appelés conducteurs ohmiques ou résistors (exemple : métaux et alliages métalliques). Pour les conducteurs non ohmiques, R varie avec la température (et donc I) et n'est pas une caractéristique du conducteur (exemple : lampe à incandescence « en tungstène »).
Forme locale de la loi d'Ohm : Localement (c'est-à-dire, en chaque point du conducteur), la densité de courant est proportionnelle au champ électrique qui l'engendre

$$\vec{j} = nq\vec{v} = nq\mu\vec{E}$$

La loi d'Ohm s'écrit alors

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \sigma\vec{E}\\ \sigma &= nq\mu \simeq \frac{nq^2}{k}\end{aligned}$$

σ est appelée conductivité électrique (unité $\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$). Son inverse $\rho = \frac{1}{\sigma}$ est la résistivité (unité $\Omega.\mathrm{m}$).

Cette formule permet de déterminer R en fonction de σ (supposée constante : conducteur homogène) et des dimensions du conducteur. En effet, si $\vec{u}_I$ est le vecteur unitaire dans la direction de I et $\vec{j}$, alors

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{\sigma}\vec{j} = \frac{I}{\sigma S}\vec{u}_I \Longrightarrow V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{I}{\sigma}\int_A^B \frac{\vec{u}_I.\vec{dl}}{S}\\ R &= -\frac{1}{\sigma}\int_A^B \frac{\vec{u}_I.\vec{dl}}{S}\end{aligned}$$

Exemples de conducteurs où $V_B > V_A$:

Cylindrique de longueur L et de section S	Cylindrique creux de longueur L et de rayons $R_B > R_A$
S section constante, $\vec{u}_I = -\vec{i}$, $\vec{dl} = dx\vec{i}$	$S = 2\pi rL$, $\vec{u}_I = -\vec{u}_r$, $\vec{dl} = dr\vec{u}_r$
$R = \frac{1}{\sigma}\frac{x_B - x_A}{S} = \rho\frac{L}{S}$	$R = \frac{1}{\sigma}\int_{R_A}^{R_B}\frac{dr}{2\pi rL} = \rho\frac{\ln(R_B/R_A)}{2\pi L}$

Remarques :

– Un conducteur est caractérisé par les valeurs de m, q, n et k. A partir de ces valeurs, on a déterminé les grandeurs

$$\tau = \frac{m}{k}, \qquad \mu = \frac{q}{k}$$

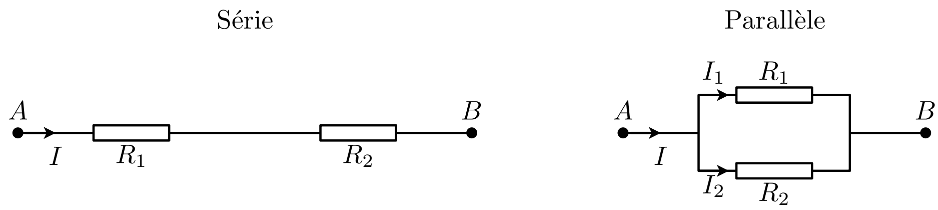
La relation $\vec{j} = nq\vec{v} = nq\mu\vec{E} = \sigma\vec{E}$ donne l'expression de la conductivité ainsi que son lien avec la mobilité

$$\sigma = qn\mu = \frac{q^2 n}{k}$$

– La résistivité dépend de la température T. Dans le cas le plus simple, cette dépendance est caractérisée par une constante α
$$\rho(T) = \rho_0 + \alpha\Delta T, \quad \Delta T = T - T_0, \qquad \rho_0 = \rho(T_0)$$
– Le courant chauffe le conducteur (voir effet Joule). Donc, la résistance R peut dépendre de l'intensité. La courbe caractéristique ($V_A - V_B$ en fonction de I) permet de déterminer R pour chaque I. Si cette courbe est une droite, R est une constante qui ne dépend pas de I. Dans ce cas, R est la pente de cette droite et caractérise un conducteur ohmique.

4.3.2 Association de résistances

Associons N résistances R_i en série ou en parallèle. On peut les remplacer par une seule résistance équivalente R_{eq}. Commençons par deux résistances :



Série : $V_A - V_B = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2)I = R_{eq} I$
Parallèle : $I = I_1 + I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} = (V_A - V_B)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}}$
Dans le cas général, on a :

Disposition	R_{eq}	Exemple $N = 2$	Résistances identiques $R_i = R$
Série	$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$R_{eq} = NR$
Parallèle	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$	$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$R_{eq} = \frac{R}{N}$

4.4 Effet Joule

Une charge positive Q circule dans le même sens que celui du courant. Par conséquent, elle passe d'un potentiel V_A vers un potentiel plus bas V_B, et son énergie potentiel diminue car $\Delta E_p = Q(V_B - V_A) < 0$. Cette énergie perdue est égale à l'opposé du travail de la force électrostatique appliquée à Q

$$W_A^B = -\Delta E_p = Q(V_A - V_B)$$

Dans le vide, elle se transforme en énergie cinétique mais elle ne peut pas le faire dans un conducteur car $v = v_l$ est constante. Elle se retrouve alors sous forme de chaleur. Ce phénomène est appelé effet Joule.

Quand un courant $i(t)$ traverse un conducteur entre un point A et un point B, l'énergie dissipée sous forme de chaleur correspond au passage de la charge dq de A à B pendant dt

$$dW = (V_A - V_B)dq = (V_A - V_B)idt$$

La puissance correspondante est

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_A - V_B)i$$

C'est la loi de Joule qui pour un conducteur ohmique ($V_A - V_B = Ri$), s'écrit

$$P = Ri^2$$

Remarques :

- L'énergie dissipée entre t_1 et t_2 par un conducteur ohmique traversé par un courant $i(t)$ variable est

$$W = R\int_{t_1}^{t_2} i^2 dt$$

- La densité de puissance (puissance/volume) d'un conducteur cylindrique homogène de volume LS et de résistance $R = \rho\frac{L}{S}$ traversé par un courant $I = jS$ est

$$\pi = \frac{P}{LS} = \frac{RI^2}{LS} \implies \pi = \frac{j^2}{\sigma}$$

  Dans le cas général, en utilisant $\frac{1}{\sigma}\vec{j} = \vec{E}$, cette formule devient

$$\pi = \vec{j}.\vec{E}$$