Chapitre 3

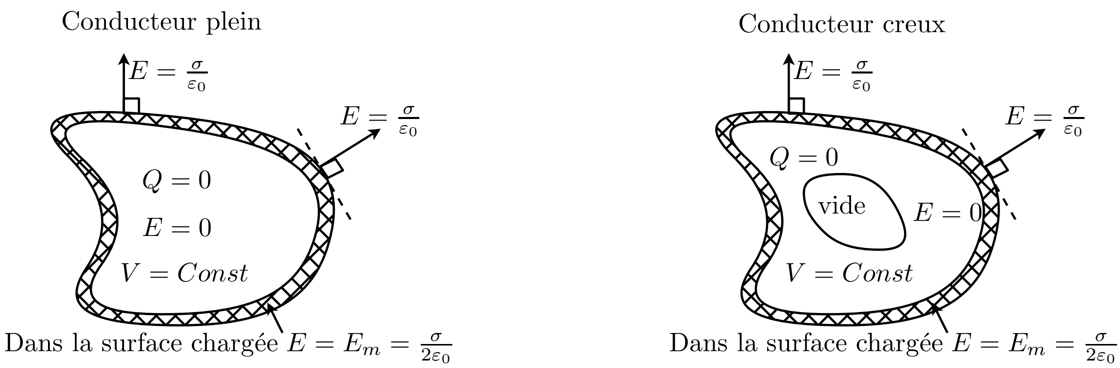
Conducteurs

3.1 Conducteurs en équilibre électrostatique

3.1.1 Définition

Un conducteur est un corps dans lequel certaines charges (électrons) peuvent se déplacer librement. Ce conducteur est en équilibre électrostatique si toutes ses charges libres sont immobiles (la résultante des forces électrostatiques appliquées à chaque charge q est nulle $\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$, donc $\vec{E} = \vec{0}$).

3.1.2 Propriétés



Si le conducteur est en équilibre alors :

a) En volume (intérieur du conducteur)

Le champ $\vec{E}$ et la charge Q_{int} à l'intérieur du conducteur sont nuls. Le potentiel est constant. En effet,

$$\vec{F} = \vec{0} \implies \vec{E} = \vec{0} \implies \begin{cases} V = -\int \vec{E}.\vec{dl} & = C \\ \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \int_{S_G} \vec{E}.\vec{dS} & = 0 \end{cases}$$

où S_G peut être n'importe quelle surface à l'intérieur du conducteur.

b) En surface

La charge Q du conducteur se répartit sur la surface car elle ne peut pas être à l'intérieur.
Le champ juste à l'extérieur est perpendiculaire à la surface et vaut $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.
En réalité les charges se répartissent sur une très petite épaisseur de la surface. Dans cette épaisseur, il y a :
- un champ moyen $E_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$,
- une force élémentaire $dF = dqE_m$ appliquée à chaque charge élémentaire$dq = \sigma dS$,
- une pression électrostatique $p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

c) Conducteurs creux

La charge d'un conducteur creux, **en équilibre et seul dans l'espace**, se répartit sur la surface extérieure. La surface intérieure et le volume ne portent aucune charge.

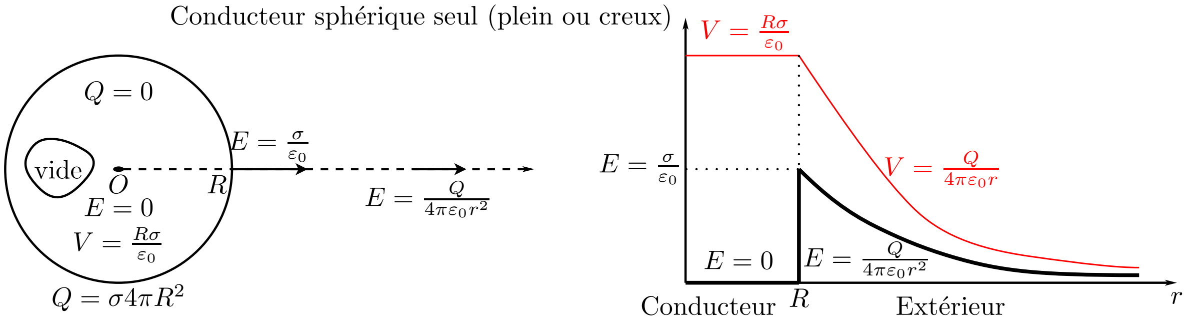
Exemple très important (conducteur sphérique plein ou creux)

Soit R le rayon d'un conducteur sphérique. Sa surface est $S = 4\pi R^2$. La charge sur cette surface est $Q = \sigma 4\pi R^2$. Les résultats du théorème de Gauss nous ont appris que le champ et le potentiel à l'extérieur du conducteur sont identiques à ceux d'une charge ponctuelle

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}, \quad r > R$$

Ces formules sans valables juste à l'extérieur de la surface $r = R$,
$\vec{E}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\vec{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_r$ on retrouve l'expression du champ juste à l'extérieur du conducteur.
$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0}$ Comme le potentiel est une fonction continue, ce résultat est en même temps le potentiel :
- juste à l'extérieur,
- au niveau de la surface même du conducteur,
- à l'intérieur du conducteur car il y est constant. Si le conducteur est creux, ce sera aussi le potentiel de la cavité (vide).

Conducteur sphérique seul (plein ou creux)



d) Pouvoir des pointes

Deux conducteurs sphériques de rayons R_1 et R_2 portent des charges Q_1 et Q_2 et sont liés par un fil conducteur très long. Étant très éloignés, on peut leur appliquer les formules du conducteur sphériques isolé

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}, \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Étant liés, ils constituent un seul conducteur de potentiel constant ($V_1 = V_2$). Par conséquent,

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Plus le rayon de la surface est grand, plus sa charge est plus grande. Mais $Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2$ et $Q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2$, ainsi la relation précédente devient :

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Plus la surface du conducteur est pointue (rayon petit), plus sa densité de charge est plus grande. Dans le cas extrême, la densité est tellement forte qu'une décharge ou étincelle se produit. C'est le pouvoir des pointes.
Applications : paratonnerre, briquets électriques, chaines métalliques des voitures, pointes sur les ailes des avions, toucher des appareils électriques avec la paume de la main au lieu des doigts.

3.1.3 Capacité propre d'un conducteur seul dans l'espace

La charge d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle à son potentiel

$$Q = VC$$

La constante de proportionnalité C s'appelle capacité propre du conducteur. Unité : Farad (F), $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V}$. Elle ne dépende que de la géométrie du conducteur.
Capacité propre d'un conducteur sphérique : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}$. Donc $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$.
L'exemple du conducteur sphérique nous apprend la méthode de calcul de C :
- Le théorème de Gauss permet de déterminer $\vec{E}$ en fonction de Q.
- La circulation du champ $(-\int \vec{E}.\vec{dl})$ permet de déterminer V en fonction de Q.
- Le rapport Q/V donne C.

3.1.4 Énergie interne

Les trois définitions de l'énergie interne U d'un ensemble de charges se traduisent comme suit pour un conducteur :
- Le travail fourni par un opérateur pour charger le conducteur.
- Le travail des forces électrostatiques lors de la décharge du conducteur.
- La somme des variations des énergies potentielles ΔE_p de chaque charge, lors de la charge du conducteur.

Appliquons la dernière définition. Le conducteur ayant une charge q et un potentiel v, on lui ajoute une charge dq (initialement à l'infini). Alors :

Charge dq à l'infini		
	Conducteur	charge dq
Potentiel	v	0
Charge	q	dq

Charge dq dans le conducteur	
	Conducteur
Potentiel	$v + dv$
Charge	$q + dq$

On voit que

$$\Delta E_p(dq) = E_p(dq \in Conducteur) - E_p(dq \in \infty) = dq(v + dv) - 0 = dqv$$

On a négligé $dqdv$ qui est du second ordre. La variation de l'énergie interne u du conducteur est

$$du = \Delta E_p(dq) = dqv = dq\frac{q}{C}$$

Le conducteur passe de l'état initial déchargé ($q = 0$, $v = 0$, $u = 0$) à un état final chargé ($q = Q$, $v = V$, $u = U$). Par conséquent

$$U = \int_0^U du = \int_0^Q dq\frac{q}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

En utilisant, $Q = VC$, on trouve

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Remarque :
Pour charger le conducteur, on le relie à un générateur de différence de potentille V constante. Il fournit à la charge Q, qui le traverse, l'énergie $W = \int_0^Q dqV = QV$. La moitié de cette énergie est fournie au conducteur et l'autre moitié est perdue sous forme de chaleur (voir effet Joule).

3.2 Phénomène d'influence

3.2.1 Influence partielle

Soit A un conducteur un conducteur portant une charge négative Q_A (figure a).

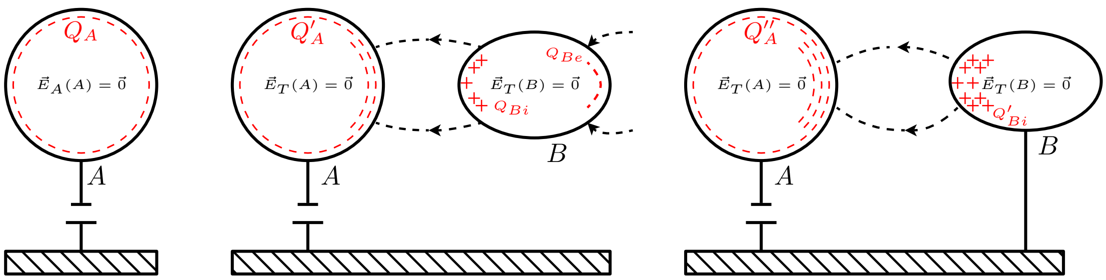


figure (a) figure (b) figure (c)

Soit B un conducteur neutre que l'on place le champ extérieur $\vec{E_A}$ créé par le conducteur A (figure b). Les charges négatives de A attirent les charges positives de B et repoussent les charges négatives. On a une nouvelle répartition des charges de B à cause de la présence du corps chargé A. C'est le phénomène d'influence. Maintenant, les charges positives de B attirent encore plus de charges négatives de A. C'est donc un phénomène d'influence mutuelle qui s'arrête quand chaque conducteur atteint son état d'équilibre. Pour pouvoir décrire ce phénomène avec des équations, expliquons le en termes de champ électrique :

- Le champ $\vec{E}_A(B)$ créé dans B par A déplace les électrons libres de B dans le sens opposé au sien. Il apparait une charge positive Q_{Bi} sur la face de B qui est en regard avec A, et une charge positive Q_{Be} (un manque d'électrons) sur l'autre face de B.
- La nouvelle répartition dans B (c'est-à-dire Q_{Bi} et Q_{Be}) crée un champ $\vec{E}_B(A)$ qui n'est pas nul et qui va influencer le conducteur A. La charge Q_A augmente et devient Q'_A. Cette augmentation est assurée par le générateur. Ainsi, pour le même potentiel et juste à cause de l'influence de B, le conducteur A a pu supporter une charge plus grande (sa capacité a augmenté). On dit que la charge s'est condensée (devenue plus dense) dans A. C'est le phénomène de condensation.
- Les équations qui décrivent ce phénomène sont :
  - Équilibre de A : le champ total $\vec{E}_T(A)$, créé par les répartitions finales des charges de A et de B, est nul à l'intérieur de A (de même pour B) :

$$\vec{E}_T(A) = \vec{E}_A(A) + \vec{E}_B(A) = \vec{0}, \qquad \vec{E}_T(B) = \vec{E}_A(B) + \vec{E}_B(B) = \vec{0}$$

  - Le potentiel de A est constant (générateur) :

$$V(A) = V_0$$

  - Conservation des charges de B (neutre et isolé) :

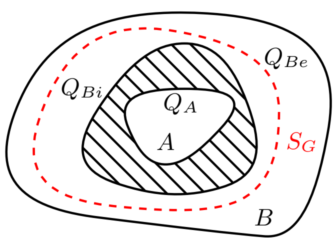
$$Q_{Bi} + Q_{Be} = Q_{B0} = 0$$

Remarques :
- Une partie seulement des lignes de champ quittant B arrive en A. L'influence est dite partielle. On admet que ceci implique que $|Q'_A| > |Q_{Bi}|$.
- Si l'on relie B à la terre (figure c), il constituera avec elle un seul conducteur et la charge Q_{Be} passe à la terre (aucune ligne de champ n'entre dans B). L'équation de conservation de la charge de B n'est plus valide. On la remplace par

$$V(B) = V(terre) = 0\,\text{V} \quad et \quad Q_{Be} = 0\,\text{C}$$

3.2.2 Influence totale

On parle d'influence totale quand le conducteur B entoure complètement le conducteur A.



1. Charge Q_{Bi} sur la surface interne de B :
On choisit une surface de de Gauss S_G à l'intérieur de B où $\vec{E}_T(B) = \vec{0}$. Le théorème de Gauss conduisent à

$$\int_{S_G} \vec{E}_T(A).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \implies 0 = Q_{int} = Q_A + Q_{Bi}$$

Par conséquent, dans le cas de l'influence totale, les surfaces en regard de A et de B portent des charges opposées

$$Q_{Bi} = -Q_A$$

Cette équation importante peut être vue comme une définition plus générale de l'influence totale qui s'appliquera même si B n'entoure pas A (voir condensateurs plus loin). Dans ce cas, toutes les lignes de champ qui quittent B atteignent A. Sa conséquence est que si l'on connaît Q_A, on déterminera Q_{Bi} (ou l'inverse).
2. Charge Q_{Be} sur la surface externe de B :
Étudions ce cas en supposant que B n'est pas neutre mais possède une charge initiale Q_{B0}. Il suffit d'utiliser la conservation de la charge de B qui est isolé

$$Q_{B0} = Q_{Bi} + Q_{Be} \implies Q_{Be} = Q_{B0} - Q_{Bi} = Q_{B0} + Q_A$$

3. Cas particulier $Q_{B0} = 0$: Posons $Q_A = Q$, alors $Q_{Bi} = -Q$ et $Q_{Be} = Q$.

3.3 Condensateurs

3.3.1 Définition

On a vu que le phénomène de condensation augmente la capacité d'un conducteur. Pour cela, on définit un condensateur comme un ensemble de deux conducteurs en influence totale. Chaque conducteur est appelé armature et porte une charge opposée à celle de l'autre. Le condensateur sert à emmagasiner l'énergie électrique. On étudiera trois condensateurs :
- Condensateur plan : Les armatures sont planes de surface S et séparées par une distance e. L'influence est approximativement totale car e est très petite (les armatures peuvent être considérées comme des plans infinis).
- Condensateur sphérique : Les armatures sont des sphères concentriques de rayons R_A et R_B. La distance entre les armatures est $e = R_A - R_B$.
- Condensateur cylindrique : Les armatures sont des cylindres coaxiaux de rayons R_A et R_B et de même hauteur L. La distance $e = R_A - R_B$ est très petite devant L ce qui justifie l'approximation de l'influence totale (cylindres de hauteur infinie).

3.3.2 Capacité

Un condensateur est représenté par le schéma suivant : $A \dashv\vdash B$

La capacité du condensateur est définie par

$$Q_A = (V_A - V_B)C \qquad Q_B = (V_B - V_A)C$$

Remarques :

- Notez que pour Q_A, c'est le potentiel V_A qui porte le signe (+). De même pour Q_B et V_B. Ceci est facile à apprendre et garantit le bon signe pour les deux charges.
- La formule généralement utilisée est $Q = VC$ mais il ne faut pas la confondre avec celle d'un seul conducteur. Dans le cas du conducteur seul, Q et$V$ sont la charge et le potentiel de ce conducteur. Dans le cas du condensateur, Q est la charge de l'une des armatures ($Q_A$ou Q_B) et V est la différence de potentiel entre les deux armatures.
- La capacité du condensateur se détermine par la même méthode que celle d'un conducteur :
  - Le théorème de Gauss entre les deux armatures donne $\vec{E}$ en fonction de Q (ou de la densité de charge σ).
  - La circulation du champ entre les deux armatures $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}.\vec{dl}$ donne $V_A - V_B$ en fonction de Q.

Exemple condensateur plan : Gauss donne $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$. La circulation du champ donne $\Delta V = Ee = \frac{Qe}{S\varepsilon_0}$. Donc $C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$.

- La capacités des condensateurs plan, sphérique et cylindrique sont

Plan	Sphérique	Cylindrique
$C = \varepsilon \frac{S}{e}$	$C = \varepsilon \frac{4\pi R_A R_B}{R_A - R_B}$	$C = \varepsilon \frac{2\pi L}{\ln(R_A/R_B)}$

  où $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ est la permittivité du diélectrique placé entre les armatures. ε_r est la permittivité relative (pour le vide $\varepsilon_r = 1$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$, pour l'air $\varepsilon_r \simeq 1$ et $\varepsilon \simeq \varepsilon_0$, pour les diélectriques $\varepsilon_r > 1$ et $\varepsilon > \varepsilon_0$).
  - Pour le condensateur plan, on retient facilement l'expression de la capacité par un raisonnement physique. Pour augmenter l'influence et donc C, on doit augmenter les surfaces S des armatures et diminuer leur distance de séparation e. Aussi, la présence d'un diélectrique de permittivité $\varepsilon > \varepsilon_0$ entre les armatures augmente l'influence.
  - On en déduit la capacité du condensateur sphérique en écrivant $e = R_A - R_B$ et $S = 4\pi R_A R_B$. (Remarque si $R_A \simeq R_B$, alors $S \simeq S_A \simeq S_B$).
  - Pour le condensateur cylindrique ($R_A \simeq R_B$), on remplace $e \to \ln(R_A/R_B) \simeq \frac{R_A - R_B}{R_B}$ et $S \to 2\pi L \simeq S_B/R_B$.

3.3.3 Associations de condensateurs

Associons N condensateurs, de capacités C_i, de charges Q_i et de d.d.p. V_i, en parallèle ou en série. On peut les remplacer par un seul condensateur de capacité équivalente C_{eq}, de charge Q_{eq} et de d.d.p. V_{eq}.
Parallèle : $V_{eq} = V_i$ et $Q_{eq} = \sum_i Q_i = \sum_i C_i V_i = \left(\sum_i C_i\right) V_{eq}$
Série : $Q_{eq} = Q_i$ et $V_{eq} = \sum_i V_i = \sum_i \frac{Q_i}{C_i} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i}\right) Q_{eq}$

Disposition	C_{eq}	Exemple $N=2$	Condensateurs identiques $C_i = C$
Parallèle	$C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$C_{eq} = NC$
Série	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$	$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$C_{eq} = \frac{C}{N}$

3.4 Énergie et forces

3.4.1 Énergie

Considérons un système de N conducteurs ayant chacun une charge Q_i et un potentiel V_i. L'énergie potentielle (interne) de ce système est

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

L'énergie d'un condensateur de charge $Q = -Q_A = Q_B$ est

$$U = \frac{1}{2}(Q_A V_A + Q_B V_B) = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Cette formule est valable dans le cas général où la charge initiale de A n'est pas nulle $Q_{0A} \neq 0$. On la détermine en définissant l'énergie du condensateur comme celle que l'on récupère lorsque l'on isole ses armatures du générateur puis on les court-circuite.
Remarque hors programme du cours :
Pour un système de N conducteurs :$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \cdots + C_{1N}V_N$. La constante C_{11} est positive et s'appelle capacité du conducteur 1 en présence des autres. La constante C_{12} est négative (et symétrique $C_{12} = C_{21}$) et s'appelle coefficient d'influence du conducteur 2 sur le conducteur 1.
Pour une influence totale $N = 2$ où A entoure B (condensateur avec $Q_{A0} \neq 0$), on aura $Q_{A0} = C_{AA}V_A + C_{AB}V_B$ et $Q_B = Q = C_{BA}V_A + C_{BB}V_B = -Q_{Ai}$. La capacité du condensateur est $C = C_{BB}$ (armature entourée), par conséquent $C_{BB} = -C_{BA} = -C_{AB} \implies Q_B = C(V_B - V_A) = -Q_{Ai}$. Alors, la charge extérieure de A $Q_{Ae} = Q_{A0} - Q_{Ai} = (C_{AA} - C)V_B$ ne dépend que de V_B et de la forme de la surface extérieure de A. Elle est indépendante de V_A et de la forme de la surface B et et de la surface interne de A. Cet exemple ne fait pas partie du programme mais il a été cité pour bien voir la différence entre la capacité propre d'un conducteur (seul) et celle d'un condensateur.

3.4.2 Force électrostatique

La variation de l'énergie totale $dE_T = dU + dE_c$ et le théorème de l'énergie cinétique $dE_c = dW$ impliquent que

$$dE_T = dU + dW \tag{3.1}$$

Supposons qu'un seul conducteur i se déplace de $\vec{dl}_i = dx_i\vec{i} + dy_i\vec{j}$ sous l'effet de la résultante $\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j}$ des forces électrostatiques. Alors

$$dW = F_{ix}dx_i + F_{iy}dy_i$$

a) Système isolé avec $Q_i = C^{te}$, $\forall i$:
Dans ce cas $dE_T = 0$ et $dU = -dW = -F_{ix}dx_i - F_{iy}dy_i$. On en déduit

$$F_{ix} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_Q, \qquad F_{iy} = -\left(\frac{\partial U}{\partial y_i}\right)_Q$$

Exemple du condensateur plan
L'armature A reste fixe à la position $x_A = 0$ et on déplace B selon l'axe des x. Alors, $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ et $F_B = F_{Bx} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_B}\right)_Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x_B}$.
$C = \varepsilon_0\frac{S}{x_B}$, $\frac{\partial C}{\partial x_B} = -\frac{C}{x_B}$, Donc $F_B = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$.
b) Système lié à un générateur ($V_i = C^{te}$, $\forall i$) :
Dans ce cas, chaque conducteur reçoit la charge dQ_i. L'énergie potentielle de cette dernière varie de $dE_p = V_i dQ_i$.
Alors, $dE_T = \sum_i dQ_i V_i$ est l'énergie fournie par le générateur. Or $dU = \frac{1}{2}\sum_i dQ_i V_i$ de sorte que $dE_T = 2dU$ et l'équation (3.1) devient $dU = dW = F_{ix}dx_i + F_{iy}dy_i$. On en déduit

$$F_{ix} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_V, \qquad F_{iy} = -\left(\frac{\partial U}{\partial y_i}\right)_V$$

Exemple du condensateur
L'armature A reste fixe à la position $x_A = 0$ et on déplace B selon l'axe des x. Alors, $U = \frac{1}{2}CV^2$ et $F_{Bx} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_B}\right)_V = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial x_B} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SV^2}{x_B^2}$.