

# Chapitre 2

## Électrostatique

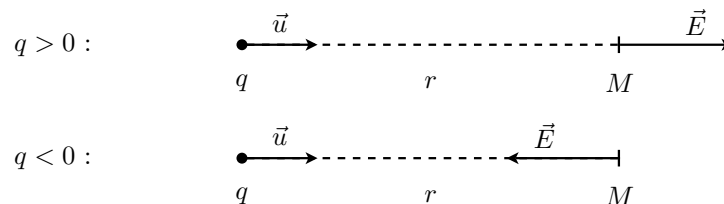
### 2.1 Champ et potentiel électriques

#### 2.1.1 Champ et potentiel

Une charge ponctuelle  $q$  crée un champ électrique  $\vec{E}(M)$  et un potentiel électrique  $V(M)$  en chaque point  $M$  de l'espace :

$$\vec{E}(M) = K \frac{q}{r^2} \vec{u}; \quad V(M) = K \frac{q}{r}$$

où  $r$  est la distance entre  $q$  et  $M$ . Le vecteur unitaire  $\vec{u}$  est dirigé de  $q$  vers  $M$ .



#### 2.1.2 Principe de superposition

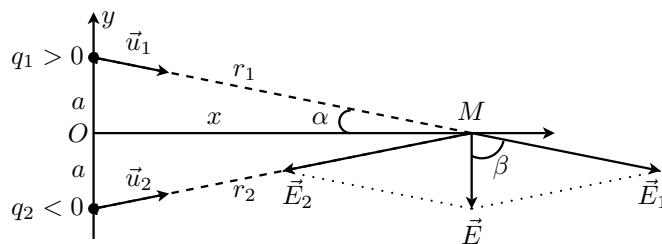
##### 2.1.2.1 Charges ponctuelles

La charge  $Q = \sum_{i=1}^N q_i$  crée un champ  $\vec{E}(M)$  et un potentiel  $V(M)$ , tels que

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) \iff E_x(M) = \sum_{i=1}^N E_{ix}(M), \dots$$
$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i(M) = V_1(M) + \dots + V_N(M)$$

où  $\vec{E}_1$  et  $V_1$  sont créés par la charge ponctuelle  $q_1$ , etc...

**Exemple : Champ créé par deux charges égales sur la médiane du segment qui les sépare**



**Cas 1 : charges opposées**  $q_1 = q > 0$  et  $q_2 = -q$ .

Champ :

$\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = K \frac{|q|}{x^2+a^2}$ . A cause de la symétrie,  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  est parallèle à  $(y'Oy)$  et dirigé vers le bas. Dans les deux cas :  $\|\vec{E}\| = 2 \|\vec{E}_1\| \cos \beta$  avec  $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$ . Par conséquent,

$$E_x = 0, \quad E_y = -\|\vec{E}\| = -K \frac{2qa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \vec{E} = -K \frac{2qa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j}$$

Potentiel :

$$V = K \frac{q_1}{r_1} + K \frac{q_2}{r_2} = 0 \text{ V}$$

Pour  $q < 0$  on obtient exactement les mêmes résultats. Dans le schéma, il suffira de changer les sens de  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  et  $\vec{E}$ . A la fin, on écrit  $E_y = +\|\vec{E}\| = -K \frac{2qa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$  (car  $q < 0$ ).

**Cas 2 : charges identiques**  $q_1 = q_2 = q$  :

– Champ :  $\|\vec{E}\| = 2 \|\vec{E}_1\| \cos \alpha$  parallèle à  $(x'Ox)$  dans le sens positif. Donc

$$E_x = \|\vec{E}\| = K \frac{2qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = 0, \quad \vec{E} = K \frac{2qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

– Potentiel :

$$V = 2V_1 = K \frac{2q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ces résultats sont valables pour  $q < 0$ .

### 2.1.2.2 Distribution continue

Chaque charge élémentaire  $dq$  est considérée comme ponctuelle et crée un champ  $d\vec{E}$  et un potentiel  $dV$  :

$$d\vec{E}(M) = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}; \quad dV(M) = K \frac{dq}{r}$$

Dans le principe de superposition, les sommes deviennent des intégrales :

$$\begin{aligned}
 E_x(M) &= \int_Q dE_x(M), \dots \\
 V(M) &= \int_Q dV(M) \\
 Q &= \int_Q dq
 \end{aligned}$$

L'intégrale  $\int_Q$  se fait sur toute la région où se trouve la charge  $Q$  qui crée le champ et le potentiel. On a les distributions continues suivantes avec les densités  $\lambda$ ,  $\sigma$  ou  $\rho$  :

linéaire	surfaccique	volumique
$dq$ sur un segment $dl$	$dq$ sur une surface $dS$	$dq$ dans un volume $dV$
$dq = \lambda dl$	$dq = \sigma dS$	$dq = \rho dV$

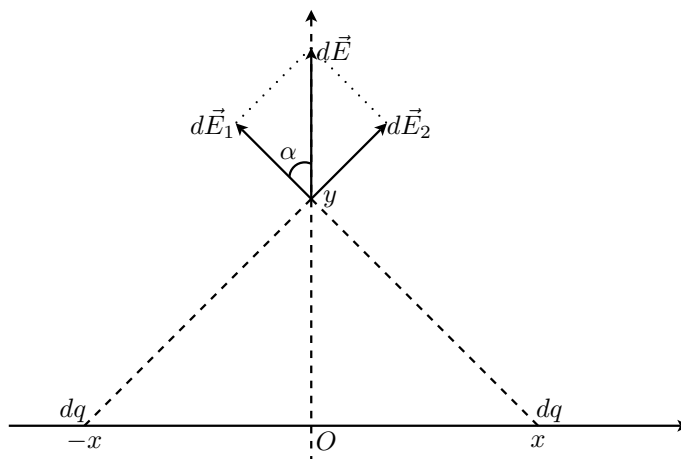
Le choix et l'expression de  $dl$ ,  $dS$  et  $dV$  dépendent du problème considéré. On les choisit de façon à faciliter les calculs. Ceci s'apprend en faisant des exercices.

Distribution uniforme (densité constante) :  $Q = \int_L \lambda dl = \lambda L$ ,  $Q = \int_S \sigma dS = \sigma S$  ou  $Q = \int_V \rho dV = \rho V$ .

**Exemples :**

Dans tous les exemples, on supposera que la distribution de charge est positive, mais le résultat sera valable pour une distribution négative (Il suffit d'inverser le sens des champs dans les schémas).

**Distribution uniforme sur une droite infinie ( $x'Ox$ )**



**Champ :** Deux charges élémentaires  $dq$ , situées en  $x$  et  $-x$ , crée le champ

$$dE_x = 0, \quad dE_z = 0, \quad dE_y = 2 \left\| d\vec{E}_1 \right\| \cos \alpha = K \frac{2dqy}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad dq = \lambda dx$$

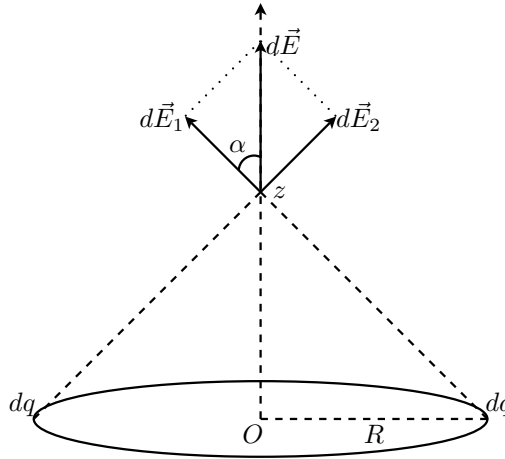
A cause de cette symétrie  $E_x = E_z = 0$  et  $E_y$  ne dépend que de  $y$ . Le champ total  $\vec{E}(y) = E_y(y)\vec{j}$  s'obtient en intégrant sur la moitié de la droite (car  $dE_y$  correspond à  $2dq$ )

$$E_y(y) = \int_{\frac{Q}{2}} dE_y = \int_0^\infty K \frac{2\lambda dx y}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le changement de variable  $x = y \tan \alpha$ , pour lequel  $dx = (y d\alpha / \cos^2 \alpha)$  et  $y^2 + x^2 = y^2(1 + \tan^2 \alpha) = (y^2 / \cos^2 \alpha)$ , donne

$$\begin{aligned} E_y(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \frac{2\lambda(y d\alpha / \cos^2 \alpha)y}{(y / \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \frac{2\lambda d\alpha \cos \alpha}{y} = K \frac{2\lambda}{y} \\ E_y(y) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \end{aligned}$$

### Distribution circulaire uniforme (boucle)



Les deux charges  $dq$  créent le champ  $d\vec{E}$  dont seule la composante sur  $Oz$  est non nulle

$$dE_z = K \frac{2dq}{(z^2 + R^2)} \cos \alpha = K \frac{2dqz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

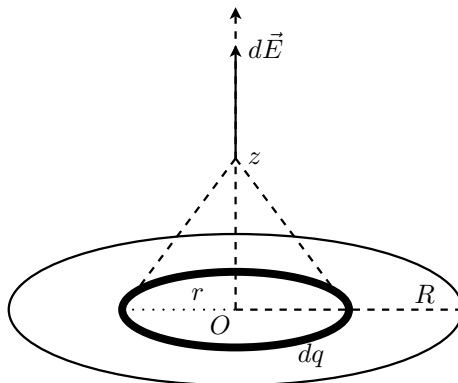
A cause de la symétrie, seule la composante  $E_z$  et non nulle. On intègre sur le demi-cercle (car  $dE_z$  correspond à  $2dq$ ). Comme  $z$  et  $R$  restent constants, on obtient

$$\begin{aligned} E_z(z) &= K \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\text{demi-cercle}} 2dq = K \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z(z) &= \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{zR}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = \lambda 2\pi R \end{aligned}$$

Pour le potentiel, on a

$$dV = K \frac{dq}{\sqrt{z^2 + R^2}} \implies V(z) = K \frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

**Distribution uniforme sur un disque**



La couronne de rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$  et de charge  $dq$  crée un champ égal à celui d'un cercle

$$dE_z = K \frac{dqz}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La surface de la couronne est  $dS = 2\pi r dr$  et sa charge est  $dq = \sigma dS$ . Donc

$$E_z(z) = \int_{\text{Disque}} dE_z = \int_0^R K \frac{(\sigma 2\pi r dr)z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Changement de variable  $u = z^2 + r^2$  et  $du = 2r dr$ . Donc

$$E_z(z) = K\sigma\pi z \int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-\frac{3}{2}} du = K\sigma\pi z \left[ \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{z^2}^{z^2+R^2} = 2K\sigma\pi z \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[ \text{sign}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

Potentiel :

$$dV = K \frac{dq}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = K \frac{(\sigma 2\pi r dr)}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Donc

$$V(z) = \int_{z^2}^{z^2+R^2} K(\sigma\pi du)u^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[ |z| - \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

Pour un plan infini  $R \gg z$  (ou  $R \rightarrow \infty$ ), on aura  $\sqrt{z^2 + R^2} \simeq R$  et  $\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \simeq 0$ . Le champ devient

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sign}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z < 0 \end{cases}$$

Le potentiel devient

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [|z| - R]$$

L'origine des potentiels étant arbitraire, on peut supprimer la constante infinie  $\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$ . On obtient le potentiel que l'on utilisera souvent

$$V(z) = \frac{\sigma |z|}{2\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}, & z \geq 0 \\ -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}, & z \leq 0 \end{cases}$$

Ce dernier est nul en  $z = 0$ .

## 2.2 Charges dans un champ et potentiel électriques

### 2.2.1 Force et énergie potentielle d'un charge ponctuelle

Considérons un charge ponctuelle  $q_i$  qui crée un champ  $\vec{E}_i(M) = K \frac{q_i}{r^2} \vec{u}$  et un potentiel  $V_i(M) = K \frac{q_i}{r}$  en chaque point  $M$  de l'espace. Si on place une autre charge  $q$  en  $M$ , elle sera soumise à la force  $\vec{F}_i(q) = K \frac{qq_i}{r^2} \vec{u} = q\vec{E}_i(M)$  et elle aura l'énergie potentiel  $E_{ip}(q) = K \frac{qq_i}{r} = qV(M)$ . Ces relations restent valables pour une charge non ponctuelle  $Q = \sum_i q_i$ , car  $\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$  et  $\vec{F}(q) = \sum_i \vec{F}_i(q) = \sum_i q\vec{E}_i(M) = q\vec{E}(M)$ . De même pour  $E_p$ . Par conséquent, sans se soucier de la charge  $Q$ , on peut dire :

Si une charge ponctuelle  $q$  est placée en un point  $M$  où règne un champ électrique  $\vec{E}(M)$  et un potentiel électrique  $V(M)$ , elle sera soumise à une force  $\vec{F}(q)$  et elle aura une énergie potentielle  $E_p(q)$  données par

$$\vec{F}(q) = q\vec{E}(M) \quad E_p(q) = qV(M)$$

### 2.2.2 Lien entre le champ et le potentiel

On sait que la fore  $\vec{F}_i(q)$  appliquée par une charge ponctuelle  $q_i$  à la charge ponctuelle  $q$  dérive d'un potentiel

$$\vec{F}_i(q) \cdot d\vec{l} = -dE_{pi}(q) \iff \vec{F}_i(q) = -\vec{\nabla} E_{pi}(q)$$

En faisant la somme sur  $i$ , on obtient le même chose pour la force résultante  $\vec{F}(q)$

$$\vec{F}(q) \cdot d\vec{l} = -dE_p(q) \iff \vec{F}(q) = -\vec{\nabla} E_p(q)$$

En divisant par  $q$ , on déduit que le champ  $\vec{E}$  dérive du potentiel  $V$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M).d\vec{l} &= -dV(M) \iff \vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M) \\ dV(M) &= V(N) - V(M), \quad d\vec{l} = \vec{MN}\end{aligned}$$

Autrement dit, si l'on connaît le potentiel, on peut déterminer le champ :

$$\begin{aligned}E_x(M) &= -\frac{\partial V(M)}{\partial x}, \quad E_y(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial y}, \quad E_z(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial z} \\ E_\rho(M) &= -\frac{\partial V(M)}{\partial \rho}, \quad E_\varphi(M) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V(M)}{\partial \varphi}, \quad E_z(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial z} \\ E_r(M) &= -\frac{\partial V(M)}{\partial r}, \quad E_\theta(M) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V(M)}{\partial \theta}, \quad E_\varphi(M) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V(M)}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Inversement, si l'on connaît le champ, on peut déterminer le potentiel (à une constante arbitraire près)

$$\begin{aligned}dV &= -\vec{E}(M).d\vec{l} \iff V(M) = -\int \vec{E}(M).d\vec{l} \iff V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{l} \\ d\vec{l} &= dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = dr\vec{u}_r + \rho d\varphi\vec{u}_\varphi + dz\vec{k} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

### Remarques

- L'intégrale  $\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$  s'appelle circulation du vecteur  $\vec{E}$  le long d'une courbe (ou chemin) menant de  $A$  à  $B$ . La circulation d'un vecteur  $\vec{A}$  est l'analogue purement mathématique du travail d'une force.
- La circulation du champ électrique est indépendante du chemin.
- Dans ce cours, on aura toujours une intégrale qui se simplifie :  $E_y = E_z = 0$  et  $V(B) - V(A) = -\int_{x_A}^{x_B} E_x dx$ . Sinon, ce sera  $E_\theta = E_\varphi = 0$  et  $V(B) - V(A) = -\int_{r_A}^{r_B} E_r dr$ .

### 2.2.3 Énergie interne d'un système de charges

Pour assembler des charges  $q_i$  sans apport d'énergie cinétique, un opérateur doit les ramener une à une de l'infini avec une vitesse très faible en appliquant une force égale et opposée à la force électrique  $\vec{F}_i^{op} = -\vec{F}_i^{elec}$ . Nous aurons donc trois définitions équivalentes de l'énergie interne  $U$  d'un ensemble de charges. C'est :

- Le travail fourni par un opérateur pour assembler les charges une à une à partir d'un état d'énergie interne nulle (l'infini)

$$U = \sum_i W_{\infty}^{\vec{r}_i}(\vec{F}_i^{op})$$

- Le travail des forces électrostatiques lors de l'éloignement des charges vers des positions où le potentiel de chaque charge est nul

$$\vec{F}_i^{op} = -\vec{F}_i^{elec} \implies U = \sum_i W_{\vec{r}_i}^{\infty}(\vec{F}_i^{elec})$$

- La somme des variations des énergies potentielles  $\Delta E_p(q_i) = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\infty)$  de chaque charge, lors de l'assemblage

$$W_{\vec{r}_i}^\infty(\vec{F}_i^{elec}) = \Delta E_p(q_i) \implies U = \sum_i \Delta E_p(q_i)$$

On peut montrer que

L'énergie interne de deux charges ponctuelles est  $U_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r} = E_p(q_1) = E_p(q_2) = U_{21}$

L'énergie interne de trois charges ponctuelles est  $U_{123} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21} + U_{13} + U_{31} + U_{23} + U_{32})$

L'énergie interne de  $N$  charges ponctuelles est

$$U = \sum_{i < j}^N U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^N U_{ij}$$

Démontrons ces relations pour  $U_{12}$  puis pour  $U_{123}$ . Ramenons d'abord  $q_2$  de l'infini (énergie interne nulle) à un point  $r_2$  dans le champ de  $q_1$ . Alors :

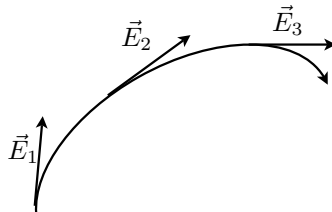
$$U_{12} = \int_\infty^r \vec{F}^{op}(q_2) \cdot d\vec{l} = - \int_\infty^{r_2} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{l} = E_p(r_2) - E_p(\infty) = E_p(r_2) = E_p(q_2).$$

Ramenons maintenant  $q_3$  à  $r_3$ , dans le champ de  $q_1$  et  $q_2$  :

$$U_{123} = U_{12} + \int_\infty^{r_3} \vec{F}^{op}(q_3) \cdot d\vec{l} = U_{12} - \int_\infty^{r_3} [\vec{F}_{13}(q_3) + \vec{F}_{23}(q_3)] \cdot d\vec{l} = U_{12} + U_{13} + U_{23}.$$

## 2.3 Topographie du champ électrique

Une ligne de champ et une ligne qui est tangente au champ électrique en chacun de ses points. Elle est orientée dans le sens du champ (elle sort des charges positives et entre dans les charges négatives).



Un tube de champ est une surface formée par des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé. Une surface équipotentielle  $V$  est une région où le potentiel est constant ( $V(M) = V$ ).

La relation  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$  implique que :

- Le champ électrique (ligne de champ aussi) est perpendiculaire à l'équipotentielle  $V$  : On choisit  $d\vec{l}$  sur  $V$  (Fig.1) :  $0 = dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \implies \vec{E} \perp d\vec{l}$
- Deux équipotentielles,  $V_1$  et  $V_2$ , se rapprochent plus dans les régions où le champ électrique est plus intense. On choisit les  $d\vec{l}$  parallèles aux  $\vec{E}$  (Fig.2) :  $|V_2 - V_1| = E dl = E' dl'$ . Donc  $dl < dl' \implies E > E'$ .



- Le champ (ligne de champ aussi) est orienté dans le sens des potentiels décroissants. On choisit les  $d\vec{l}$  parallèles aux  $\vec{E}$  (Fig.2) :  $\vec{E}.d\vec{l} > 0$  et  $V_2 - V_1 = -\vec{E}.d\vec{l} < 0 \implies V_2 < V_1$ .

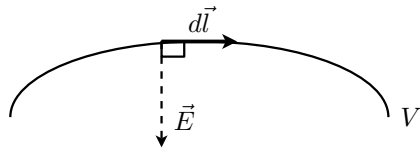


Fig. 1

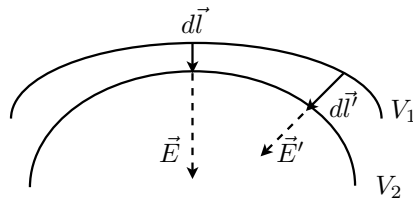
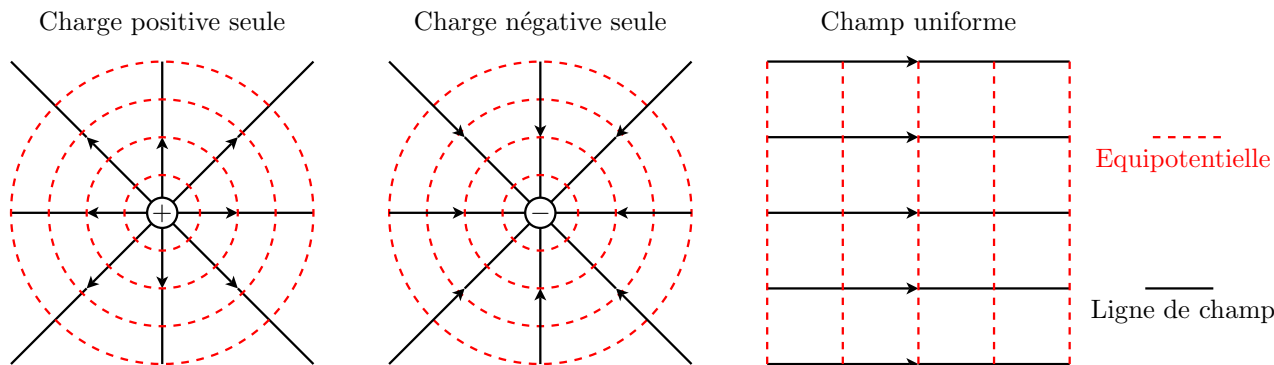


Fig. 2

Exemples :

Charges ponctuelles et champ uniforme :



Pour le champ uniforme

- $\vec{E} = \vec{C} \implies \Delta V = -\vec{E}.\vec{\Delta l}$  :
- les lignes de champ sont des droites parallèles. Les équipotentielles sont des plans perpendiculaires aux lignes de champ.
- En choisissant  $\vec{\Delta l} \parallel \vec{E}$ , on obtient  $\Delta V = -E\Delta l$  et
  - $E = -\frac{\Delta V}{\Delta l}$
  - $\Delta V_1 = \Delta V_2 \implies \Delta l_1 = \Delta l_2$ . Les équipotentielles sont équidistantes pour une même variation du potentiel.

## 2.4 Le dipôle électrique

Le dipôle électrique est un ensemble de deux charges égales et opposées séparées par une distance  $a$ . Le moment dipolaire électrique d'un dipôle est défini par

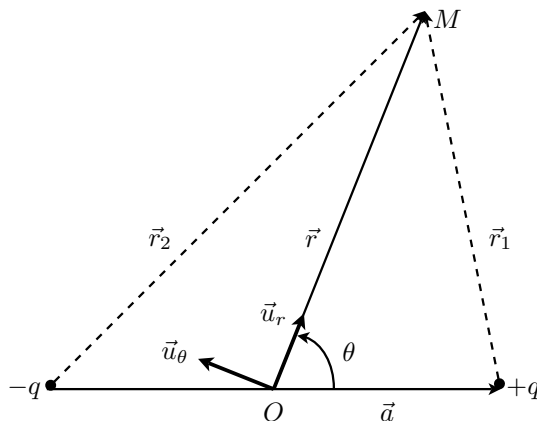
$$\vec{p} = q\vec{a}, \quad q > 0$$

Le vecteur  $\vec{a}$  est dirigé de la charge négative ( $-q$ ) vers la charge positive ( $+q$ ).

### 2.4.1 Champ et potentiel créés par un dipôle

Le dipôle crée en chaque point  $M(r, \theta)$ , très éloigné dans l'espace ( $\frac{a}{r} \ll 1$ ), un potentiel et un champ donnés en coordonnées polaires par

$$\begin{aligned} V(M) &= K \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{Kp \cos \theta}{r^2} \\ E_r(M) &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Kp \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta(M) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp \sin \theta}{r^3} \end{aligned}$$

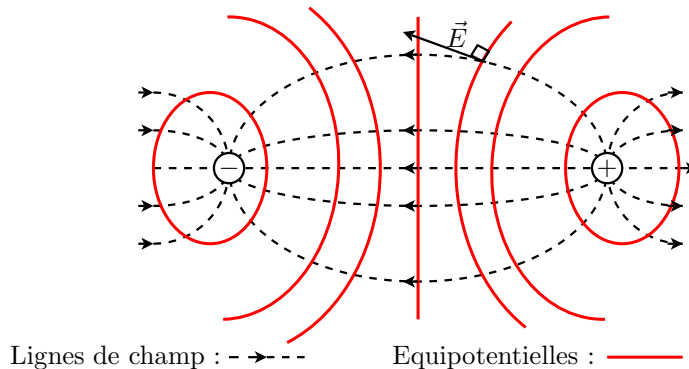


Le calcul de  $V$  se fait comme suit :

$V(M) = Kq(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = Kq \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$  avec  $\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}$  et  $\vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}$ . Au premier ordre en  $\frac{a}{r}$  (c'est-à-dire  $\frac{a^2}{r^2} \simeq 0$ ), on aura :

$r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - \vec{r} \cdot \vec{a}} \simeq r \sqrt{1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^2}} \simeq r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{2r}$ . De même  $r_2 \simeq r + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{2r}$ . Ainsi  $r_2 - r_1 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r}$  et  $r_1 r_2 = r^2 - (\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{2r})^2 \simeq r^2$ . Ce qui donne  $V = K \frac{\vec{r} \cdot q\vec{a}}{r^3}$ .

Les lignes de champ et les équipotentielles du dipôle sont (schéma qualitatif) :



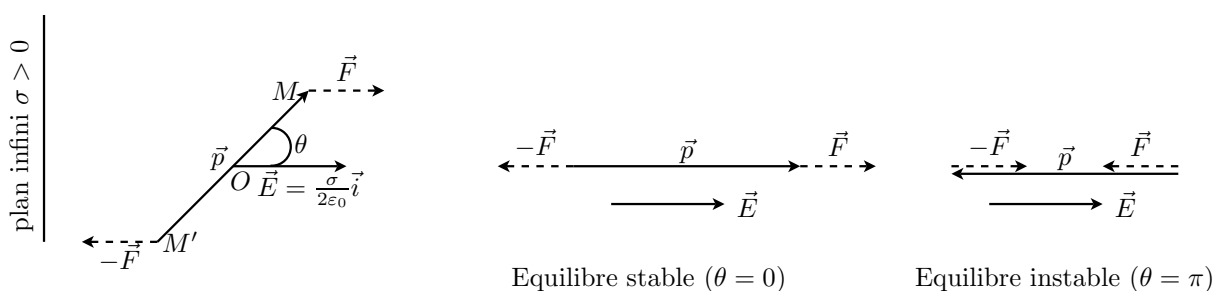
### 2.4.2 Dipôle dans un champ uniforme

On place le dipôle dans un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme (créé par un plan infini uniformément chargé, par exemple). Alors, le dipôle aura une énergie potentielle  $E_p$  et sera soumis à un couple de moment  $\vec{\tau}$  par rapport au milieu de  $a$  :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\|\vec{p}\| \|\vec{E}\| \cos(\theta)$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}, \quad \|\vec{\tau}\| = \|\vec{p}\| \|\vec{E}\| |\sin(\theta)|$$

En effet,  $E_p = E_p(q) + E_p(-q) = q(V(M) - V(M')) = q(-\vec{E} \cdot \vec{M}'M) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ .  
 $\vec{\tau} = O\vec{M} \wedge \vec{F} - O\vec{M}' \wedge \vec{F} = M'\vec{M} \wedge \vec{F} = M'\vec{M} \wedge q\vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$



#### Remarques

- Le champ  $\vec{E}$  est créé par d'autres charges et ne doit pas être confondu avec le champ créé par le dipôle.
- La position d'équilibre stable du dipôle correspond à  $E_p$  minimale ( $\cos(\theta) = 1$ ). Donc  $\vec{p}$  est parallèle et dans le même sens que  $\vec{E}$ .
- La position d'équilibre instable du dipôle correspond à  $E_p$  maximale ( $\cos(\theta) = -1$ ). Donc  $\vec{p}$  est parallèle et dans le sens opposé à  $\vec{E}$ .
- Dans les deux positions d'équilibre (stable et instable), on a  $\vec{\tau} = \vec{0}$  car  $\vec{p} \parallel \vec{E}$ .

## 2.5 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet de calculer rapidement le champ électrique créé par les distributions de charges symétriques (qui ont une bonne forme). Au préalable, on doit définir la notion de flux du champ électrique à travers une surface.

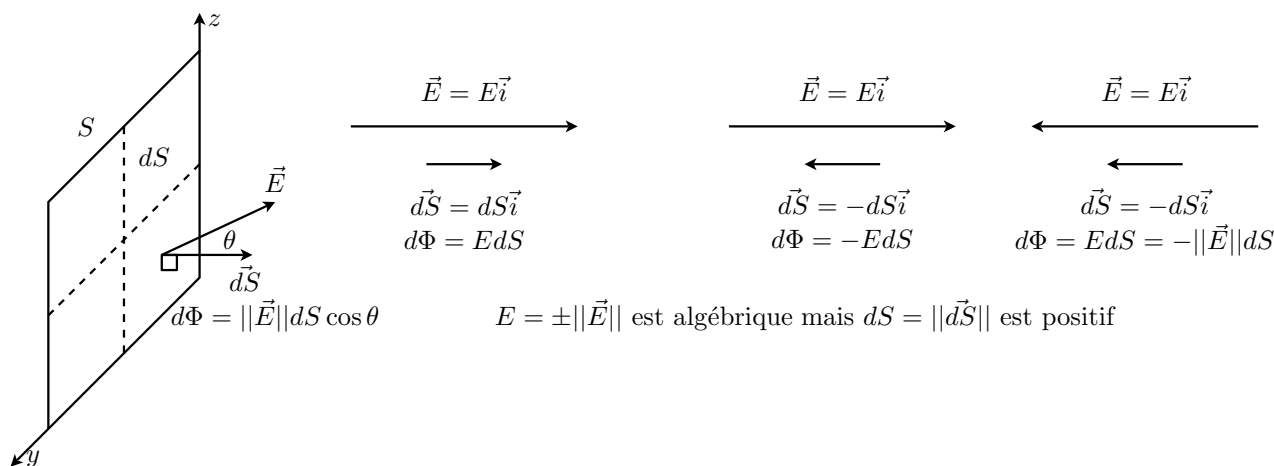
### 2.5.1 Flux du champ électrique

Subdivisons une surface  $S$  en plusieurs surfaces élémentaires (infinitement petites)  $dS$ . Pour chaque surface élémentaire, définissons un vecteur  $d\vec{S}$  qui lui est normal et tel que  $\|d\vec{S}\| = dS > 0$ . Le flux élémentaire

du champ électrique  $\vec{E}$  à travers  $dS$  est défini par

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \|\vec{E}\| dS \cos \theta$$

Voici quelques exemples :

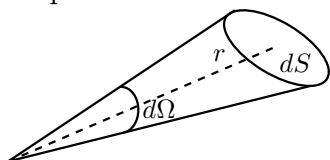


Le flux du champ à travers  $S = \int_S dS$  est

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

**Remarques**

- Au lieu de la notation en double intégrale ( $\iint$ ), on a adopté la notation  $\int_S$ .
- Si  $\|\vec{E}\|$  et  $\theta$  sont constants sur  $S$ , alors  $\Phi = \|\vec{E}\| \cos \theta \int_S dS = \|\vec{E}\| S \cos \theta$ . Si de plus  $\vec{E} \parallel \pm d\vec{S}$ , on obtient les deux cas particuliers suivants (très utilisés dans les exercices  $\|\vec{u}\| = 1$ ) :
  - $\theta = 0 \implies \Phi = \|\vec{E}\| S$ . Algébriquement :  $\vec{E} = E\vec{u}$  et  $d\vec{S} = dS\vec{u} \implies d\Phi = EdS \implies \Phi = ES$
  - $\theta = \pi \implies \Phi = -\|\vec{E}\| S$ . Algébriquement :  $\vec{E} = E\vec{u}$  et  $d\vec{S} = -dS\vec{u} \implies d\Phi = -EdS \implies \Phi = -ES$
- Par convention, si la surface  $S$  est fermée, tous ses  $d\vec{S}$  doivent pointer vers l'extérieur de  $S$ .
- Pour un élément de surface sphérique, on a  $dS = r^2 d\Omega$ , où  $r$  est la distance entre  $dS$  et le centre de la sphère.



$d\Omega$  est appelé angle solide. En coordonnées sphériques  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Pour toute la sphère,  $\Omega = \int_S d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$  et  $S = \int_S dS = \int_S R^2 d\Omega = 4\pi R^2$ .

### 2.5.2 Théorème

Considérons une charge  $Q$  répartie dans l'espace d'un manière quelconque. Choisissons n'importe quelle surface géométrique (non matérielle) fermée  $S_G$ . Le théorème de Gauss stipule que le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss  $S_G$  est égal à la charge  $Q_{int}$  qui se trouvent à l'intérieur de  $S_G$  divisée par  $\epsilon_0$  :

$$\Phi = \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0},$$

Les figures 1 et 2 démontrent et explique le théorème pour une seule charge ponctuelle sachant que  $\|\vec{E}\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ ,  $dS = r^2 d\Omega$  et  $\Omega = 4\pi$ .

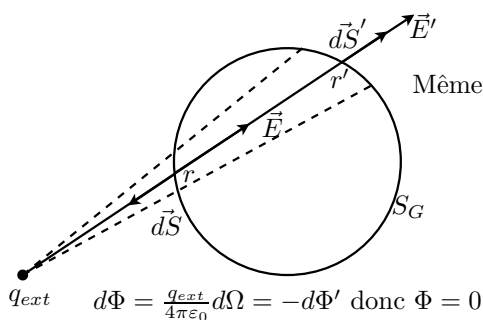


Fig. 1

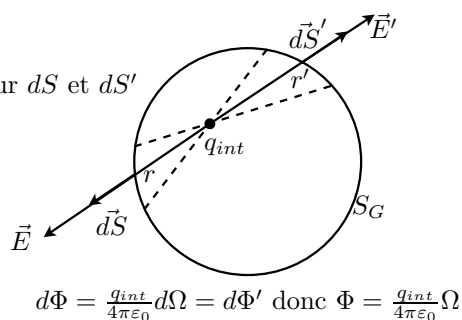


Fig. 2

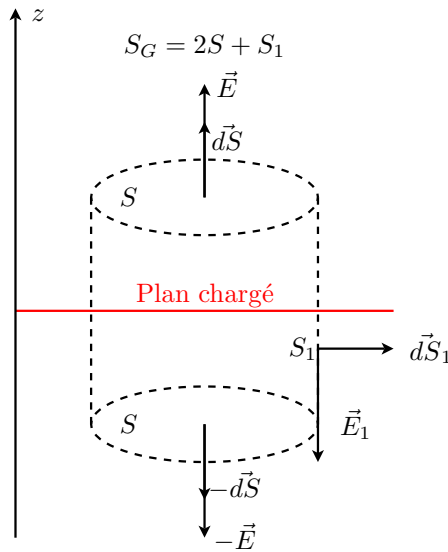
#### Remarques

- On choisit  $S_G$  fermée mais sous la forme qu'on veut (généralement, de façon à simplifier les calculs).
- Si le milieu considéré n'est pas le vide, on remplace  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$ .

### 2.5.3 Cas particuliers importants

#### Plan infini

La charge est uniformément (densité  $\sigma$  constante) répartie sur un plan infini confondu avec  $xOy$ .  $S_G$  est un cylindre de base  $S$  et de surface latérale  $S_1$ . Le plan chargé est un plan de symétrie pour  $S_G$ . On suppose que  $\sigma > 0$ .



A cause de la symétrie  $\vec{E} = E\vec{k}$  avec  $E$  constant sur  $S$  ( $E$  ne peut dépendre que de  $z$ ). Comme  $d\vec{S} = dS\vec{k} \parallel \vec{E}$ , on trouve  $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_S (-\vec{E}) \cdot (-d\vec{S}) + \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES + 0$ . Le théorème de Gauss donne  $2ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  avec  $Q_{int} = \sigma S$ . Donc  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  et  $\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{k} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{k} & z < 0 \end{cases}$ .

Important : Cette formule est valable pour une densité  $\sigma$  négative. Elle doit être apprise.

**Sphère**

La charge algébrique  $Q$  est uniformément répartie sur (ou à l'intérieur) d'une sphère  $S$  de rayon  $R$ . On choisit  $S_G = 4\pi r^2$  sphérique de rayon  $r$  avec :

1.  $r < R$  si on veut calculer le champ à l'intérieur de la sphère chargée Fig.1 (le sens du champ a été dessiné arbitrairement).
2.  $r > R$  si on veut calculer le champ à l'extérieur de la sphère chargée Fig.2.

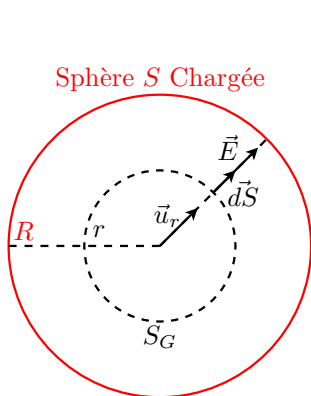


Fig.1

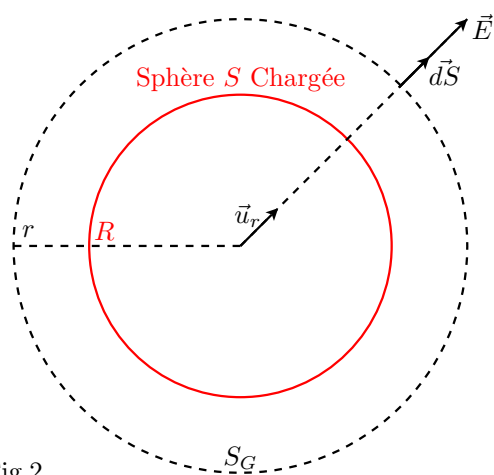


Fig.2

Dans les deux cas, à cause de la symétrie, on a  $\vec{E} = E\vec{u}_r$  avec  $E$  constant sur  $S_G$ . Comme  $d\vec{S} = dS\vec{u}_r \parallel \vec{E}$ , donc  $\Phi = ES_G = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ . Par conséquent

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{int}}{r^2} \vec{u}_r$$

Il suffit de déterminer  $Q_{int}$  géométriquement dans chaque cas et construire le tableau suivant :

	Répartition en surface (densité $\sigma$ )	Répartition en volume (densité $\rho$ )
$r < R$	$Q_{int} = 0 \implies \vec{E}(M) = \vec{0}$	$Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \implies \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{u}_r$
$r > R$	$Q_{int} = Q = \sigma 4\pi R^2 \implies \vec{E}(M) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$	$Q_{int} = Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \implies \vec{E}(M) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$

### Cylindre de hauteur infinie

La charge  $Q$  est uniformément répartie sur la surface ou à l'intérieur d'un cylindre infini de rayon  $R$ . On choisit  $S_G = S_1 + S_2 + S_3$  un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $L$  ( de surface latérale  $S_1$  et de base  $S_2 = S_3$ ).

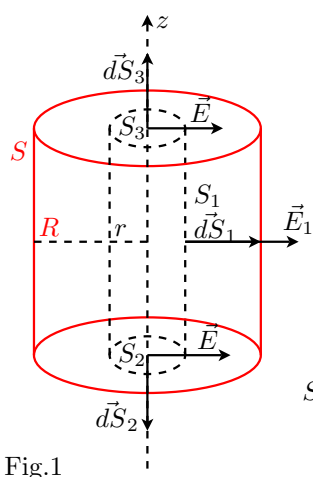


Fig.1

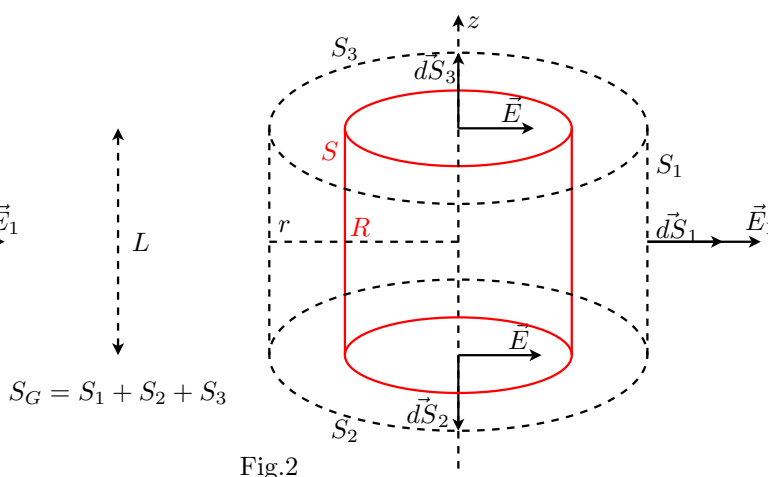


Fig.2

A cause de la symétrie, on a  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 0$ ,  $\vec{E} = E\vec{u}_r$  avec  $E$  constant sur  $S_1$ . Comme  $d\vec{S}_1 = dS\vec{u}_r \parallel \vec{E}$ , donc  $\Phi = ES_1 = E2\pi rL = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  et par conséquent :

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q_{int}}{rL} \vec{u}_r$$

	Répartition en surface (densité $\sigma$ )	Répartition en volume (densité $\rho$ )
$r < R$	$Q_{int} = 0 \implies \vec{E}(M) = \vec{0}$	$Q_{int} = \rho \pi r^2 L \implies \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r$
$r > R$	$Q_{int} = \sigma 2\pi RL \implies \vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$	$Q_{int} = \rho \pi R^2 L \implies \vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$

**Fil infini**

La charge  $Q$  est uniformément répartie sur une droite infiniment longue. On fait comme pour l'extérieur d'un cylindre mais avec  $Q_{int} = \lambda L$ . Donc :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

**Important :**

- Pour la répartition en surface (sphère et cylindre), le champ est nul à l'intérieur. Ce résultat est général est valable pour n'importe quelle répartition en surface (pas obligatoirement sphérique ou cylindrique).
- A l'extérieur de la sphère chargée (en surface ou en volume), l'expression du champ est identique à celle d'une charge ponctuelle  $Q$ .
- Ces deux remarques ainsi que l'expression du champ créé par un plan infini doivent être apprises par cœur car très utilisées dans la suite du cours.