

Chapitre VI

LES COURANTS ALTERNATIFS

Après avoir traité dans le chapitre III les circuits en régime continu, nous abordons maintenant, l'étude des circuits alimentés par des tensions alternatives sinusoïdales.

1. LES COURANTS ALTERNATIFS.

1.1 Définitions.

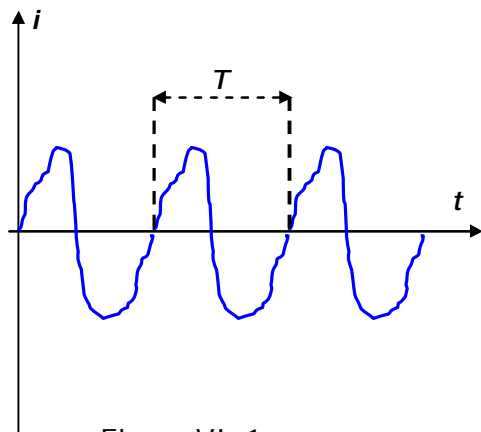


Figure VI. 1

Un courant est alternatif s'il change de sens au cours du temps t ; en outre, il est périodique si son intensité i reprend la même valeur à des intervalles de temps égaux à T . On a alors :

$$i = f(t) = f(t + nT) \quad (1)$$

n est un nombre entier.

T est la période et son inverse f est la fréquence :

$$f = \frac{1}{T} \quad (2)$$

La période est mesurée en secondes et la fréquence en hertz (Hz).

1.2. Les courants sinusoïdaux.

Un courant alternatif est sinusoïdal, lorsque son intensité est une fonction sinusoïdale du temps :

$$i = I_M \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad i = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$

i est la valeur instantanée du courant,
 I_M sa valeur maximale ou amplitude,
 ω la pulsation ou fréquence angulaire
et φ la phase :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

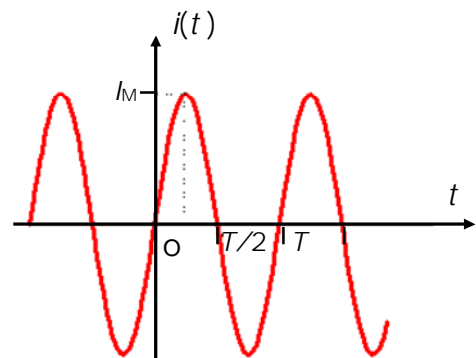


Figure VI. 2

¹ Un changement de l'origine des phases de $\pi/2$ donne l'une ou l'autre des deux expressions.

Intensité efficace.

La valeur efficace d'un courant alternatif est définie comme la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période. Elle s'écrit :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (4)$$

Dans le cas d'un courant alternatif sinusoïdal, on obtient:

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

La valeur instantanée d'un tel courant s'écrit alors :

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Le courant efficace I équivaut à un courant continu qui dissiperait la même puissance dans une même résistance. (**Exercice VI.6**)

1.3 Production des courants sinusoïdaux.

Selon l'application à laquelle ils sont destinés, les courants sinusoïdaux peuvent être produits de plusieurs manières². Lorsque la puissance consommée par la charge est importante, on utilise des générateurs dont le principe, décrit ci-dessous, fait appel aux lois de l'induction électromagnétique.

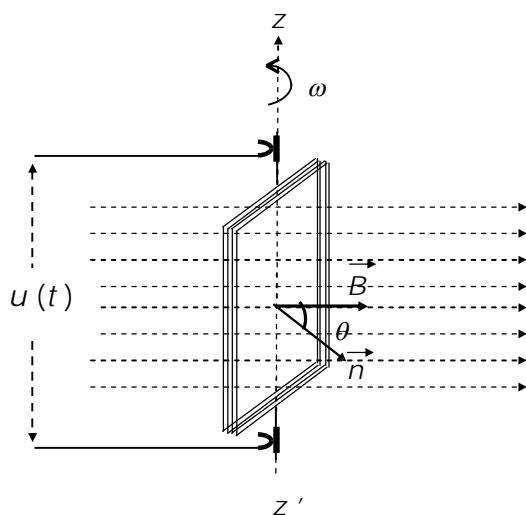


Figure VI. 3

Le principe de production de tensions sinusoïdales monophasées a été étudié au chapitre V, § 4.1.

Soit une bobine à N spires tournant, autour de l'axe $z'z'$ à la vitesse angulaire constante ω , dans un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à $z'z'$.

Nous avons trouvé que la f.é.m. induite dans la bobine est :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_M \sin(\omega t) = E_M \sin(\omega t)$$

Il en résulte, aux bornes de la bobine une différence de potentiel, ou tension sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω .

On obtient le même résultat si le cadre est fixe et si le champ tourne à la vitesse angulaire ω . C'est le principe de l'alternateur monophasé.

² En électronique, les courants sinusoïdaux sont produits par des circuits oscillants électroniques (générateurs de fonctions). Les puissances, mises en jeu dans ce cas, sont faibles.

On choisit une origine des phases qui permet d'écrire :


$$u(t) = U_M \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

U est la valeur efficace de la tension $u(t)$.

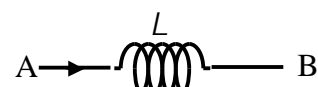
Lorsque le générateur est relié à une charge, il débite en régime permanent, un courant sinusoïdal de même pulsation ω et déphasé d'un angle φ par rapport à $u(t)$.

2. LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF SINUSOÏDAL.

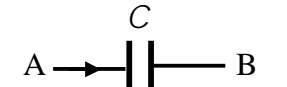
Les lois d'Ohm s'appliquent au courant alternatif sinusoïdal. Elles s'expriment, à chaque instant³, dans le cas d'éléments simples, comme suit :



$$u_A - u_B = R i$$



$$u_A - u_B = L \frac{di}{dt}$$



$$u_A - u_B = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

La mise en série des trois éléments R , L et C est représentée par le circuit de la figure ci-dessous :

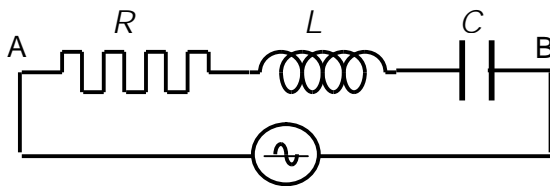


Figure VI. 4

On applique, aux bornes de A et B du circuit une tension : $u(t) = U_M \cos(\omega t)$,

on a :

$$u(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (6)$$

C'est l'équation de l'oscillateur électrique amorti en régime forcé sinusoïdal⁴. La solution générale de cette équation est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. La première n'intervient que durant le régime transitoire, la seconde :

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

constitue la solution du régime permanent.

φ est le déphasage du courant par rapport à la tension.

Il s'agit à présent de déterminer la valeur maximale I_M (ou la valeur efficace I) du courant et son déphasage φ à partir de la tension :

$$u(t) = U_M \cos(\omega t) \quad (8)$$

³ En régime quasi stationnaire, le courant a la même valeur, à chaque instant, le long de tout le circuit (Voir Ch. V. Note 2)

⁴ Le régime sinusoïdal forcé sera traité en S3

Nous allons pour cela, utiliser deux méthodes

- une méthode symbolique : la " notation complexe "
- une méthode vectorielle : la " représentation de Fresnel "

2.1. La notation complexe.

Un récepteur, soumis à une tension alternative sinusoïdale de la forme

$$u(t) = U_M \cos(\omega t)$$

est parcouru par un courant $i(t)$ déphasé de φ par rapport à la tension :

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$

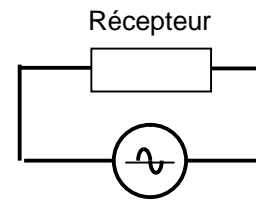


Figure VI . 5

$i(t)$ et $u(t)$ étant des grandeurs sinusoïdales, elles peuvent être considérées comme les parties réelles des fonctions complexes suivantes :

$$\bar{u}(t) = U_M \exp(j \omega t) \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = I_M \exp[j(\omega t + \varphi)]$$

$$\text{ou} \quad \bar{u}(t) = \bar{U}_M \exp(j \omega t) \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = \bar{I}_M \exp(j \omega t) \quad (9)$$

avec,

$$j^2 = -1$$

\bar{U}_M et \bar{I}_M sont respectivement les amplitudes complexes de la tension et du courant :

$$\bar{U}_M = U_M \exp(j 0) \quad \bar{I}_M = I_M \exp(j \varphi)$$

En considérant les valeurs efficaces, on obtient :

$$\bar{U} = U \exp(j 0) \quad \text{et} \quad \bar{I} = I \exp(j \varphi) \quad (10)$$

Ces expressions contiennent les valeurs efficaces U et I de $u(t)$ et $i(t)$ et leurs déphasages 0 et φ par rapport à une origine des phases.

Considérons le circuit R, L, C de la figure 4 ; il est régi par l'équation (6) :

$$u(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

En remplaçant $u(t)$ et $i(t)$ par leurs expressions données en (9), il vient :

$$U \sqrt{2} \exp(j \omega t) = \left[R + j L \omega - \frac{j}{C \omega} \right] I \sqrt{2} \exp(j \omega t) \exp(+j \varphi)$$

Soit en introduisant les valeurs complexes de la tension et du courant :

$$\bar{U} = \left[R + j \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right) \right] \bar{I} \quad (11)$$

La notation complexe a permis de transformer une équation intégro-différentielle (6) en une équation algébrique linéaire (11).

Impédance complexe.

L'équation (11) peut être présentée sous la forme :

$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (12)$$

\bar{Z} est, par définition, l'*impédance complexe* du circuit électrique. L'équation (12) est l'expression de la loi d'Ohm en notation complexe.

A partir de (10) et (12), on a :

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} \exp(-j\varphi) = Z \exp(-j\varphi)$$

Le module de l'impédance complexe

$$Z = |\bar{Z}| \quad (13)$$

est l'*impédance* du circuit considéré et φ le *déphasage*, entre le courant et la tension, introduit par l'impédance Z .

L'impédance complexe d'un circuit électrique s'écrit, sous forme cartésienne:

$$\bar{Z} = R + jX \quad (14)$$

où R est sa *résistance* et X sa *réactance*, ou bien sous forme polaire:

$$\bar{Z} = Z \exp(j\alpha)$$

Avec la loi d'Ohm donnée en (12), et à partir des résultats précédents, on a:

$$U \exp(j0) = Z \exp(j\alpha) I \exp(j\varphi) \Rightarrow \alpha = -\varphi$$

D'où l'expression, sous forme polaire, de l'impédance complexe \bar{Z} :

$$\bar{Z} = Z \exp(-j\varphi) \quad (15)$$

avec $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\varphi = -\arctan\left(\frac{X}{R}\right)$

L'inverse de l'impédance est appelé *admittance* et est noté \bar{Y} .

Application à des cas simples

Résistance :

$$\bar{Z} = R \Rightarrow \bar{Z} = R \exp(+j0) \Rightarrow Z = R \text{ et } \varphi = 0 \quad (16)$$

Self pure :

$$\bar{Z} = jL\omega \Rightarrow \bar{Z} = L\omega \exp\left(+j\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Z = L\omega \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (17)$$

Condensateur pur :

$$\bar{Z} = -j\frac{1}{C\omega} \Rightarrow \bar{Z} = \frac{1}{C\omega} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Z = \frac{1}{C\omega} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

N.B : Ces valeurs de φ , portées dans les expressions (10), montrent que le courant est :

- en phase avec la tension dans le cas d'une résistance R ,
- en retard de $\pi/2$ sur la tension dans le cas d'une self
- et en avance de $\pi/2$ dans le cas d'une capacité.

2.2. La représentation de Fresnel.

Principe de la méthode de Fresnel.

La méthode de Fresnel permet d'effectuer la somme de deux ou plusieurs grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω . Son principe est le suivant :

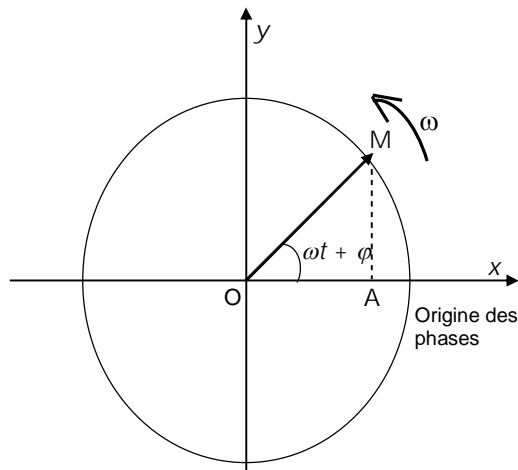


Figure VI. 6.a

Considérons un vecteur \overrightarrow{OM} , de module A , qui tourne autour d'un point fixe O à la vitesse constante ω . A l'instant $t = 0$, il fait un angle ϕ avec l'axe \overrightarrow{Ox} (figure VI.6.a).

A l'instant t , il fait un angle $(\omega t + \phi)$ avec l'axe \overrightarrow{Ox} . La projection OA de ce vecteur sur \overrightarrow{Ox} est :

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Ainsi, lorsque le vecteur \overrightarrow{OM} tourne autour de O , sa projection x sur l'axe effectue un mouvement vibratoire sinusoïdal d'élongation

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Composition de deux vibrations sinusoïdales.

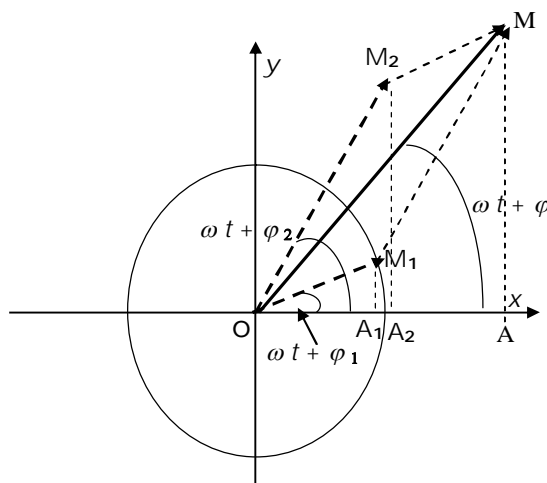


Figure VI. 6.b

Considérons deux mouvements vibratoires parallèles de même fréquence angulaire ω :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$

A un instant t , ces vibrations peuvent être représentées respectivement, par les vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$. Ces derniers représentent les projections sur \overrightarrow{Ox} des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ tournant à la même vitesse ω .

On sait que la projection sur un axe de la somme de plusieurs vecteurs a comme valeur, la somme algébrique des projections de ces vecteurs sur cet axe, soit :

$$X = X_1 + X_2 \quad (19)$$

où, x est la projection du vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \quad (20)$$

OM est la diagonale du parallélogramme OM_1MM_2 . Ce dernier tourne à la vitesse ω sans se déformer. La figure VI.6.b montre une représentation de ces vecteurs à un instant t .

Ainsi, la construction de Fresnel permet de remplacer le calcul de la somme de plusieurs fonctions trigonométriques (équation 19) de même pulsation ω par une construction géométrique (équation 20) plus simple.

Règle de Fresnel.

Le vecteur de Fresnel associé à la somme de plusieurs vibrations, s'obtient en faisant la somme vectorielle des vecteurs de Fresnel associés à chacune des vibrations.

Exercice VI. 1. : Effectuer par la méthode de Fresnel, la somme des grandeurs sinusoïdales :

$$x_1 = 3 \sin \omega t \quad x_2 = 4 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

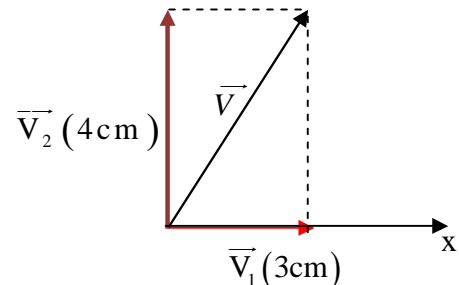
Solution VI.1.

$$x_1 \rightarrow \vec{V}_1 : \|\vec{V}_1\| = 3 \text{ cm}, \quad \varphi_1 = (\overrightarrow{Ox}, \vec{V}_1) = 0$$

$$x_2 \rightarrow \vec{V}_2 : \|\vec{V}_2\| = 4 \text{ cm}, \quad \varphi_2 = (\overrightarrow{Ox}, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$x \rightarrow \vec{V} : \|\vec{V}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 5 \text{ cm}, \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{x_2}{x_1} = 1.33 \Rightarrow \varphi = 53^\circ (0.3\pi)$$

$$\text{D'où,} \quad x = x_1 + x_2 = 5 \sin(\omega t + 0.3\pi) \quad \Rightarrow \quad x = 5 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + 0,15 \right)$$



Impédance et déphasage.

Dans la construction de Fresnel, le choix de l'origine des phases est arbitraire. De ce fait, on choisit la phase de l'intensité du courant comme origine et on écrit:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t) \quad (21)$$

La d.d.p aux bornes d'un circuit parcouru par un tel courant devient alors :

$$u(t) = U_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (22)$$

φ représente le déphasage entre l'intensité du courant et la tension ; il peut être positif ou négatif.

Circuit formé d'une résistance pure

La résistance R du circuit, de la figure VI.7.a, est traversée par un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

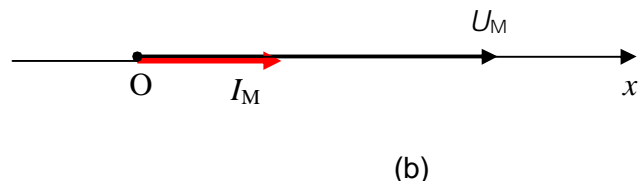
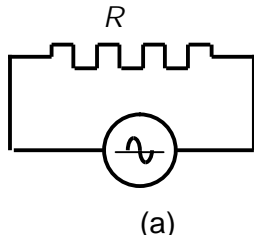
La d.d.p à ses bornes s'écrit d'après la loi d'Ohm : $u(t) = R i(t)$

Soit : $U_M \cos(\omega t + \varphi) = R \cdot I_M \cos(\omega t)$

En identifiant les deux membres de cette équation (21), on obtient :

$$U_M = R I_M \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad (23)$$

L'impédance du circuit étudié est égale à sa résistance R .



Figures VI. 7

Dans la représentation de Fresnel, le courant et la tension sont en phase

Circuit formé d'une self pure.

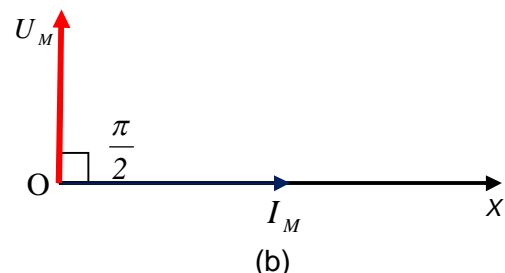
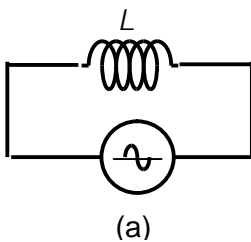
La bobine de self inductance L du circuit représenté sur la figure VI.8.a, est parcourue par un courant $i(t) = I_M \cos(\omega t)$: il en résulte une d.d.p aux bornes de

la self :

$$u(t) = L \frac{di}{dt}$$

D'où, $U_M \cos(\omega t + \varphi) = -L\omega \cdot I_M \sin(\omega t) = L\omega \cdot I_M \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

soit : $U_M = L\omega I_M$ et $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ (24)



Figures VI. 8

En considérant les valeurs efficaces, on obtient :

$$U = L\omega I = Z I \quad \text{soit} \quad Z = L\omega \quad (25)$$

Z est l'impédance de la self.

Dans la représentation de Fresnel (figure.VI.8.b), le courant dans la self est en retard de $\pi/2$ par rapport à la d.d.p à ses bornes ; (ou la d.d.p aux bornes de la self est en avance de $\pi/2$ sur le courant qui la parcourt).

Circuit formé d'un condensateur pur.

Le circuit, de la figure VI.9.a, est parcouru par un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

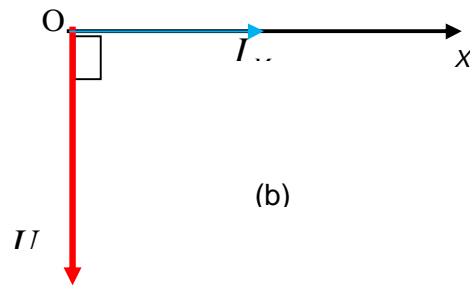
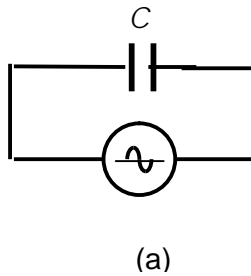
La d.d.p aux bornes du condensateur de capacité C est donnée par la loi d'Ohm :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\text{D'où : } U_M \cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_M}{C\omega} \sin(\omega t) = \frac{I_M}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (26)$$

A partir de l'équation (26), on obtient :

$$U_M = \frac{1}{C\omega} I_M \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (27)$$



Figures VI. 9

En considérant les valeurs efficaces, on a :

$$U = \frac{1}{C\omega} I = Z I \quad \text{soit} \quad Z = \frac{1}{C\omega} \quad (28)$$

Z représente l'impédance du condensateur de capacité C .

Dans le diagramme de Fresnel (Figure VI.9.b), la d.d.p aux bornes du condensateur est en retard de $\pi/2$ sur le courant. Ou inversement, le courant présente une avance de $\pi/2$ sur la d.d.p.

N.B : Les signes des déphasages φ des expressions (24) et (27) ont changé par rapport à ceux des φ des expressions (17) et (18), l'origine des phases n'étant plus la même. Cependant quelque soit le choix de cette origine, le courant est toujours:

- en phase avec la tension dans le cas d'une résistance R ,
- en retard de $\pi/2$ sur la tension dans le cas d'une self
- et en avance de $\pi/2$ dans le cas d'une capacité.

Etude du circuit R, L, C série.

Un courant d'intensité $i(t) = I_M \cos(\omega t)$ circule dans le circuit de la figure VI.10.a. La d.d.p aux bornes du circuit est donnée par la loi d'Ohm :

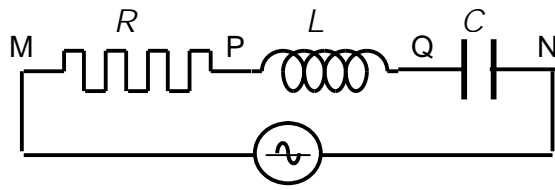
$$u(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{avec} \quad i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

Sachant que :

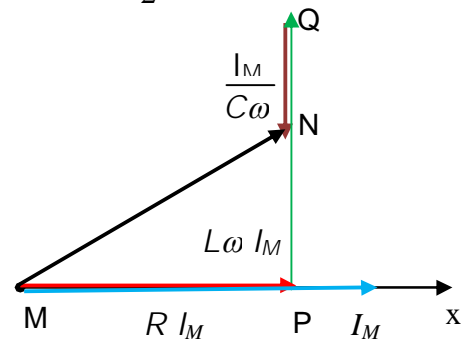
$$u_M - u_p = R i = R I_M \cos(\omega t)$$

$$u_P - u_Q = L \frac{di}{dt} = L\omega I_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$u_Q - u_N = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_M}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



(a)



(b)

Figures VI. 10

L'expression de $u(t)$ devient :

$$u(t) = U_M \cos(\omega t) = R I_M \cos(\omega t) + L\omega I_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{I_M}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (29)$$

En utilisant les résultats trouvés ci-dessus, on trace le diagramme de Fresnel (Figure VI.10.b) correspondant à l'équation (29).

La d.d.p $u(t)$ aux bornes du circuit est représentée par le vecteur \overline{MN} . Son module, qui représente la valeur maximale U_M de cette d.d.p, et le déphasage φ peuvent être calculés à partir du triangle MPN rectangle en P.

$$U_M = \sqrt{R^2 + \left[L\omega - \frac{I}{C\omega} \right]^2} I_M \text{ et } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{I}{C\omega} \right) \quad (30)$$

Si on pose $U_M = Z I_M$

L'impédance du circuit s'écrit alors :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[L\omega - \frac{I}{C\omega} \right]^2} \quad (31)$$

Remarques : 1°) Dans la méthode de Fresnel, les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales, tension $u(t)$, courant $i(t)$, flux $\Phi(t)$, etc. sont représentées par des vecteurs \vec{U} , \vec{I} , $\vec{\Phi}$...etc.. On peut leur appliquer les règles de l'addition vectorielle. Par exemple, en ce qui concerne les courants, la loi des nœuds de Kirchhoff (voir exercice VI. 13 : Méthode des trois ampèremètres).

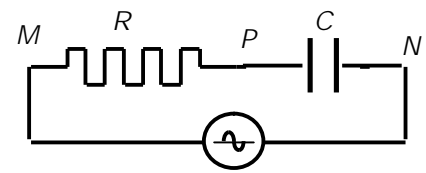
2°) Certains auteurs écrivent la loi d'Ohm sous la forme :

$$\vec{U} = Z \vec{I}$$

\vec{U} et \vec{I} sont des vecteurs mais Z est un opérateur : On multiplie \vec{I} par Z et on fait subir au vecteur ainsi obtenu une rotation d'un angle φ pour obtenir \vec{U} .

Exercice VI .2. Circuit RC

Le circuit de la figure ci-contre, constitué d'une résistance R et d'un condensateur C placés en série, est parcouru par un courant sinusoïdal de la forme $i(t) = I_M \cos(\omega t)$.



En utilisant la représentation de Fresnel, déterminer l'impédance équivalente du circuit ainsi que le déphasage entre la d.d.p $u(t)$ et le courant qui le parcourt.

A.N. $\omega = 5 \cdot 10^3$ rd/s, $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 0,22 \mu\text{F}$

Solution VI .2. : La d.d.p aux bornes du circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri + \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{avec} \quad i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

Sachant que :

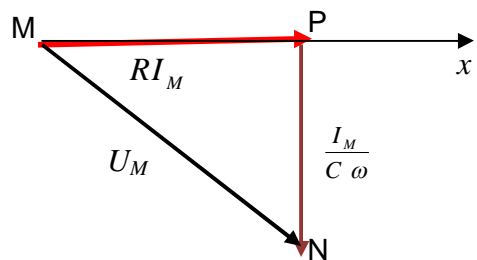
$$V_M - V_P = Ri = RI_M \cos(\omega t)$$

$$V_P - V_N = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_M}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

et que : $\frac{U_M}{I_M} = Z$

on obtient à partir du triangle MPN rectangle en P :

$$Z = \frac{U_M}{I_M} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{RC\omega}$$



A.N : on trouve $Z = 1.35 \text{ k}\Omega$, et $\varphi = 0.74 \text{ rad} (42^\circ)$

3. ASSOCIATION DES IMPEDANCES.

Les lois, relatives aux associations des résistances en courants continus énoncées au chapitre III, restent valables en courants sinusoïdaux lorsqu'on utilise les impédances complexes.

3.1. Impédances montées en série.

La figure ci-contre montre que :

$$\bar{U} = \bar{U}_{AB} = \bar{U}_{AM} + \bar{U}_{MN} + \bar{U}_{NB}$$

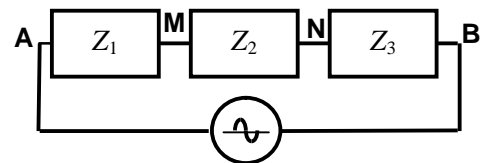


Figure VI . 11

Toutes les impédances sont traversées par le même courant i .

$$\bar{U} = \bar{Z} \bar{I} = \bar{Z}_1 \bar{I} + \bar{Z}_2 \bar{I} + \bar{Z}_3 \bar{I} = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \bar{I}$$

Dans le cas de n impédances, on obtient :

$$\bar{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i \tag{32}$$

3.2. Impédances montées en parallèle.

La figure ci-contre montre que :

$$\bar{U} = \bar{Z} \bar{I} = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 = \bar{Z}_2 \bar{I}_2 = \bar{Z}_3 \bar{I}_3$$

L'équation du nœud en A donne ;

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

D'où,
$$\bar{I} = \bar{U} \left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right]$$

Dans le cas de n impédances, on obtient

$$\bar{I} = \bar{U} \left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \right] = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i} \quad (33)$$

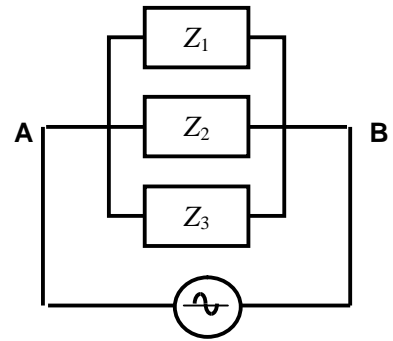
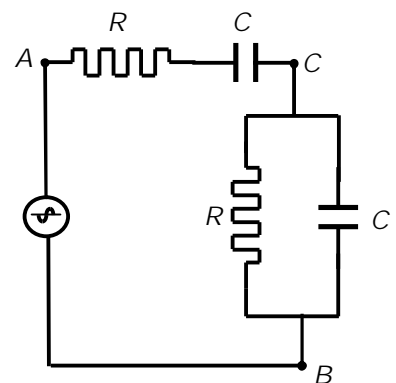


Figure VI. 12

Exercice IV.3

Déterminer l'impédance Z_{AB} équivalente au circuit alimenté par la tension $u(t)$ et représenté sur la figure ci-contre.

A.N : $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $f = 5 \text{ kHz}$



Solution IV.3.

$$Z_{AB} = Z_{AC} + Z_{CB}$$

avec: $Z_{AC} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jC\omega R}{jC\omega}$ et $Z_{CB} = \frac{R}{1 + jC\omega R}$

D'où : $Z_{AB} = \frac{1 + jC\omega R}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jC\omega R}$

Soit :
$$\bar{Z}_{AB} = \frac{-jC\omega(1 + jC\omega R)}{(C\omega)^2} + \frac{R(1 - jC\omega R)}{1 + (RC\omega)^2}$$

Finalement, on trouve après calculs :
$$\bar{Z}_{AB} = R \left(1 + \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} \right) - j \left(\frac{1}{C\omega} + \frac{R^2 C \omega}{1 + (RC\omega)^2} \right)$$

A.N. $Z_{AB} = (1 + j0,4)10^3 \text{ }\Omega$ Z polaire : $Z = 1,03 \cdot 10^3 \text{ }\Omega$ et $\varphi = 22^\circ$

3.3. Etude du circuit R, L, C série : Résonance.

Le circuit de la figure ci-contre constitué d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine de self inductance L montés en série, est alimenté par une tension sinusoïdale de la forme : $u(t) = U_M \cos(\omega t)$

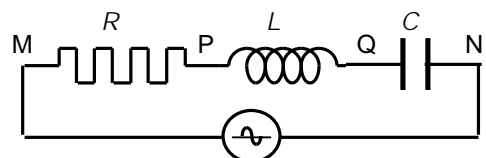


Figure VI. 13

Les trois impédances : $\bar{Z}_1 = R$, $\bar{Z}_2 = j L \omega$ et $\bar{Z}_3 = -\frac{j}{C \omega}$ étant montées en série, la formule (32) donne :

$$\bar{Z} = R + j L \omega - \frac{j}{C \omega} \quad \text{soit} \quad \bar{Z} = R + j \left[L \omega - \frac{1}{C \omega} \right] \quad (34)$$

ou sous forme polaire

$$\bar{Z} = Z e^{-j \varphi} \quad \text{avec,} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left[L \omega - \frac{1}{C \omega} \right]^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C \omega} - L \omega \right) \quad (35)$$

Où φ représente le déphasage entre la tension

$$u(t) = U_M \cos(\omega t) \quad \text{et le courant} \quad i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi).$$

Il est intéressant d'étudier les variations de l'impédance Z ou celles de l'intensité efficace $I = U/Z$ en fonction de la pulsation ω . Les figures VI.14 illustrent les évolutions de ces grandeurs en fonction de ω .

A partir des graphes des figures VI.14, on note que :

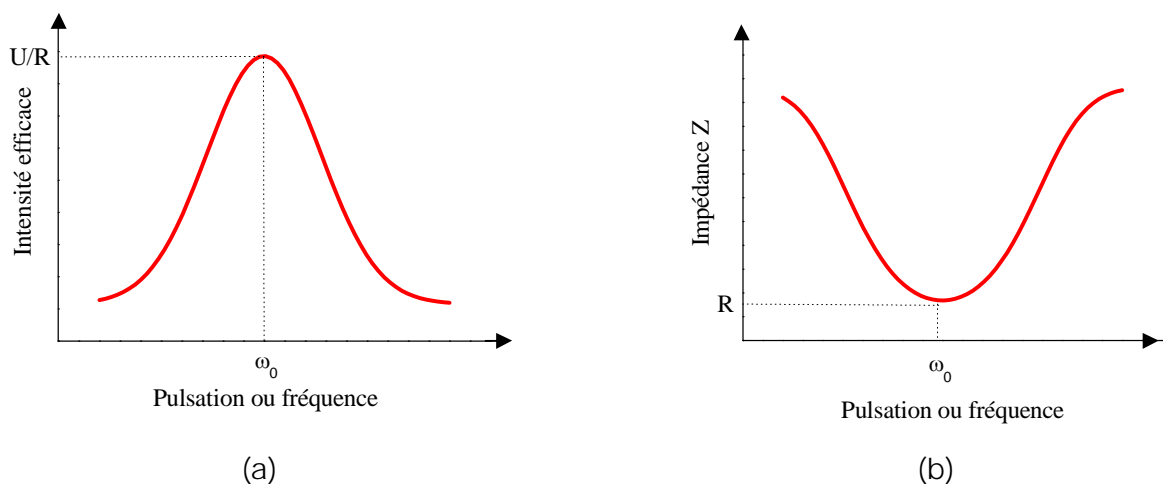
$$\text{lorsque} \quad \left[L \omega - \frac{1}{C \omega} \right]^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad LC \omega^2 = 1 \quad (36)$$

l'impédance Z est minimale et vaut R ; l'intensité I est maximale et vaut U/R .

$$\text{La pulsation } \omega \text{ a pour valeur:} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (37)$$

ω_0 ne dépend que des caractéristiques L et C du circuit électrique qui constitue un oscillateur électrique. C'est la raison pour laquelle ω_0 est appelée *pulsation propre* de l'oscillateur et f_0 sa *fréquence propre*.

Lorsque la fréquence de l'excitation $u(t)$ se rapproche de la fréquence propre de l'oscillateur, ce dernier entre en résonance.



Figures VI. 14

A la résonance, plusieurs phénomènes sont observés, à savoir :

- Les tensions V_L et V_C aux bornes de la bobine et du condensateur sont algébriquement opposées et la d.d.p aux bornes du circuit résulte uniquement de la présence de la résistance.
- Les tensions V_L et V_C peuvent à la résonance, valoir plusieurs centaines de fois la tension appliquée : on dit alors qu'il y a un phénomène de *surtension*.
- La formule (35) montre que le déphasage entre le courant et la tension d'excitation est nul.

Exercice VI. 4. On considère un circuit R, L, C monté en série (figure VI.13) et soumis à une d.d.p

$$u(t) = U \sqrt{2} \sin(\omega t).$$

On donne : $U = 2$ volts, $L = 0,4$ mH, $C = 400$ pF, $R = 5 \Omega$.

1°) Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit, sa fréquence propre f_0 et la valeur maximale du courant I_0 qui parcourt le circuit à la résonance.

2°) Trouver les valeurs des tensions U_{oL} et U_{oC} , mesurées à la résonance, aux bornes de la self et de la capacité. En déduire le *coefficient de surtension* ou *facteur de qualité* du circuit :

$$Q = \frac{U_{oL}}{U}$$

Solution VI. 4. 1°) La pulsation propre du circuit est calculée à partir de l'expression (37)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad I_0 = \frac{U}{R} \quad (a)$$

A.N : $\omega_0 = 2,5 \cdot 10^6$ rad/s, $f_0 = 400$ kHz, $I_0 = 0,4$ A

2°) Calcul des tensions U_{oL} et U_{oC} et du coefficient de qualité Q :

$$U_{oL} = L \omega_0 I_0 \text{ soit avec (a) } U_{oL} = L \omega_0 \frac{U}{R} = 400 \text{ volts} \quad \Rightarrow$$

$$Q = \frac{U_{oL}}{U} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{L \omega_0}{R} = 200$$

A la résonance la tension aux bornes de la self U_{oL} est multipliée par un facteur $Q = 200$: il en résulte une surtension. Il en est de même de la tension aux bornes du condensateur : $U_{oC} = 400$ volts. La courbe, qui représente la variation du courant en fonction de la fréquence (figure VI.14. a), est d'autant plus aigüe que le facteur de qualité Q est grand

3.4. Bobine (R, L) et condensateur (C) en parallèle: Antirésonance.

On considère le circuit constitué d'une bobine de self inductance L de résistance R et d'un condensateur sans pertes, de capacité C montés comme le montre la figure VI.15. L'impédance du circuit est :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega \quad (38)$$

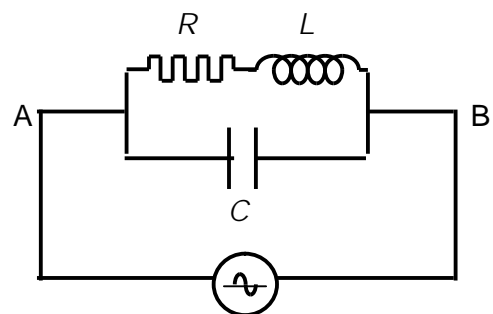


Figure VI. 15

(Voir exercice VI.8)

Afin de simplifier l'étude du circuit précédent, nous allons négliger la résistance R devant $L\omega$. Dans ce cas, l'impédance du circuit devient :

$$\bar{Z} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} \quad (39)$$

\bar{Z} est une réactance pure et le circuit se comporte comme :

- une self si $\omega < \omega_0$
- une capacité si $\omega > \omega_0$

Lorsque $\omega = \omega_0$, l'impédance devient infinie et l'intensité du courant

$$I = \frac{U}{Z}$$

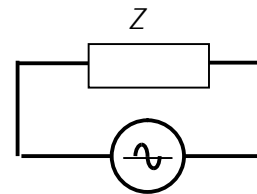
s'annule, d'où le nom de "*circuit bouchon*" donné à ce montage. Le phénomène ainsi observé est appelé "*antirésonance*".

Dans une construction de Fresnel, les courants qui circulent respectivement dans la self et le condensateur sont égaux et opposés : leur somme est nulle. Leurs intensités sont plus importantes que l'intensité totale du circuit : on dit alors qu'il y a un phénomène de *surintensité*.

4. PUISSANCE ELECTRIQUE EN COURANT SINUSOÏDAL.

4.1. Valeur instantanée de la puissance électrique.

Soit une impédance Z , soumise à une tension électrique sinusoïdale : $u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t)$ et parcourue par un courant électrique d'intensité $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi)$



La puissance électrique instantanée fournie à Z s'écrit alors:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 U I \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (40)$$

Soit :

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi) \quad (41)$$

L'expression (41) montre que $p(t)$ est la somme d'un terme constant et d'un terme variable à fréquence double de la fréquence de la tension d'excitation. La puissance varie au cours du temps.

4.2. Valeur moyenne de la puissance électrique.

La valeur moyenne, sur une période, de la puissance :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (42)$$

donne avec (41),
$$P = \frac{I}{T} UI \cos \varphi \int_0^T dt + \frac{I}{T} UI \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \quad (43)$$

La valeur moyenne du second terme étant nulle, on a :

$$P = U I \cos \varphi \quad (44)$$

P correspond à la puissance électrique consommée par Z .

4. 3. Puissance active.

Elle désigne la puissance effective liée à l'énergie électrique qui peut être convertie par le récepteur sous une autre forme d'énergie (mécanique, calorifique etc.). Elle est mesurée en watt (W) et son expression en courant sinusoïdal est donnée par l'équation (44), soit :

$$P = U I \cos \varphi$$

Le terme $\cos \varphi$ est appelé "*facteur de puissance*" du récepteur. Il mesure l'efficacité d'un système à produire de la puissance active.

Dans le cas

- d'une self ou d'un condensateur, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0$.
- d'une résistance $\varphi = 0 \Rightarrow P = U I$

4.4. Puissance réactive.

Elle est liée, comme le montrent les exemples qui suivent, à l'énergie emmagasinée durant un quart de période, dans les selfs et les condensateurs du récepteur, puis entièrement restituée au réseau au cours de l'autre quart.

C'est une énergie qui n'est donc pas consommée par la charge, elle est définie par :

$$Q = U I \sin \varphi \quad (45)$$

Elle est mesurée en *Var* (volt-ampère-réactif).

Cette puissance est qualifiée ainsi parce que l'absorption et la restitution de l'énergie sont dues à la réaction d'une self ou d'un condensateur aux variations du courant.

Puissance réactive dans le cas d'une self pure : Dans ce cas à une tension

$$u(t) = U_M \cos(\omega t)$$

correspond un courant d'intensité

$$i(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La puissance instantanée qui est fournie à la self s'écrit alors :

$$p(t) = UI \sin(2\omega t)$$

Les évolutions en fonction du temps de $u(t)$, $i(t)$ et $p(t)$ sont illustrées par les graphes de la figure VI.16.

Pendant le premier quart de période, la self emmagasine une énergie magnétique:

$$W = \int_0^{T/4} u i dt = \int_0^{I_M} i L \frac{di}{dt} dt = \frac{L I_M^2}{2} = L I^2$$

Cette énergie est entièrement restituée au réseau au cours du quart de période suivant comme le montre bien la figure VI.16.

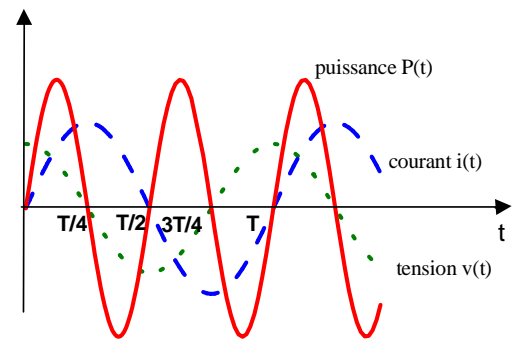


Figure VI.16

La puissance moyenne sur une demi-période est donc nulle.

L'échange d'énergie entre la self et le réseau fait circuler dans le circuit un courant réactif I tel que :

$$Q = U I \sin \varphi$$

Un comportement similaire est observé dans le cas d'un condensateur, sauf que l'énergie emmagasinée par ce dernier est une énergie électrostatique.

Puissance active dans le cas d'une résistance pure .

Considérons un circuit qui comporte une résistance pure R alimentée par une tension

$$u(t) = U_M \cos(\omega t)$$

Elle sera alors parcourue par un courant d'intensité

$$i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

La puissance instantanée qui lui est fournie s'écrit alors :

$$p(t) = UI \cos^2(\omega t) = \frac{UI}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

La puissance moyenne est :

$$P = \frac{UI}{T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt = UI$$

A partir de la figure VI.17, on note que l'énergie reçue par la résistance est entièrement consommée et transformée en chaleur. Il n'y a pas comme dans les cas précédents, d'oscillations de l'énergie entre le réseau et la charge. Le courant qui circule dans le circuit est appelé courant actif.

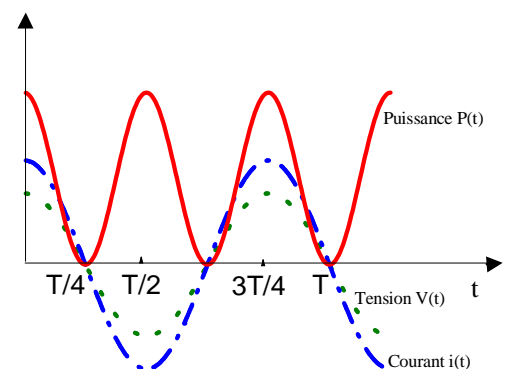


Figure VI.17

4. 5. Puissance apparente.

La puissance apparente est, par définition, égale au produit de la tension par le courant.

$$S = UI$$

C'est la puissance maximale que peut atteindre la puissance active.

Le rapport de la puissance active P sur la puissance apparente notée S définit le facteur de puissance. On écrit alors :

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi \quad (46)$$

S est mesurée en " volt-ampère " (VA)

Les puissances active, réactive et apparente sont reliées entre elles par les expressions suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi \\ Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S^2 = P^2 + Q^2 \\ \cos \varphi = \frac{P}{S} \end{array} \right. \quad (47)$$

5. PUISSANCE EN NOTATION COMPLEXE.

En notation complexe, la tension d'alimentation $u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t)$ et le courant $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi)$ qui parcourt le circuit peuvent s'écrire respectivement:

$$\bar{u}(t) = \sqrt{2} U \exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = \sqrt{2} I \exp[j(\omega t + \varphi)] \quad (48)$$

Calculons le produit $\bar{u} \cdot \bar{i}^*$ où \bar{i}^* est l'expression conjuguée de $\bar{i}(t)$.

$$\bar{u} \cdot \bar{i}^* = 2UI \exp(j\omega t) \cdot \exp[-j(\omega t + \varphi)] = 2UI (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad (49)$$

La partie réelle de l'équation (49) représente deux fois la puissance moyenne ou la puissance active donnée par l'équation (44). On écrit alors que :

$$P = UI \cos \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{u} \cdot \bar{i}^*] \quad (50)$$

Si on considère les valeurs efficaces complexes, telles que :

$$\begin{array}{ll} \bar{u}(t) = \sqrt{2} \bar{U} \exp(j\omega t) & \text{avec} \quad \bar{U} = U \exp(j0) = U \\ \bar{i}(t) = \sqrt{2} \bar{I} \exp(j\omega t) & \text{avec} \quad \bar{I} = I \exp(j\varphi) \end{array} \quad (51)$$

la puissance moyenne est égale à :

$$P = \operatorname{Re} [\bar{U} \cdot \bar{I}^*]$$

5. FACTEUR DE PUISSANCE.

La puissance, consommée par une charge en courant alternatif, dépend du facteur de puissance $\cos \varphi$ introduit par la charge.

Or l'énergie électrique, produite dans des centrales électriques par un fournisseur d'électricité⁵, est transportée dans une ligne pour être fournie aux clients. Le client ne paie au fournisseur que l'énergie qui correspond à la puissance

$$P = U I \cos \varphi$$

qu'il a consommée. Cette puissance est inférieure à celle qui lui a été livrée à la sortie de la centrale électrique. La différence ΔP , qui correspond aux pertes dans la ligne, est à la charge du fournisseur.

$$\Delta P = R I^2$$

R est la résistance électrique de la ligne. Avec (44) il vient :

$$\Delta P = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} \quad (53)$$

La puissance perdue dans la ligne par effet Joule est inversement proportionnelle au facteur de puissance. Le fournisseur est d'autant plus lésé que ce facteur est faible, c'est la raison pour laquelle il pénalise le client dès que le facteur de puissance est inférieur à 0,8. Pour éviter ces pénalités, les industriels relèvent le facteur de puissance de leurs installations électriques à l'aide de condensateurs conçus à cet effet (Exercice VI. 16).

Exercice VI. 5. Un atelier reçoit au niveau, de son compteur, de l'énergie électrique à travers une ligne dont la résistance totale est R . La charge fonctionne sous une tension d'alimentation $U = 220$ volts à la fréquence $f = 50$ Hz. L'atelier consomme à pleine charge une puissance $P = 95$ kilowatts avec un $\cos \varphi = 0,85$.

1°) On suppose d'abord que l'énergie, fournie à l'atelier, est transportée, sous forme monophasée sous une tension $U = 220$ volts. Quelle doit être la résistance R_1 de la ligne pour que les pertes ΔP_1 ne dépassent, en aucun cas, la moitié de la puissance P consommée à pleine charge. Quelle est la section du fil de ligne, en déduire la masse de cuivre utilisée.

A.N. Longueur de la ligne $l = 2$ km, résistivité électrique du cuivre $\rho_\Omega = 18 \cdot 10^9 \Omega \cdot m$, sa masse volumique $\rho_M = 8920$ kg/m³.

2°) On considère à présent le cas où cette énergie est transportée sous une tension $U = 5.500$ volts. Calculer la résistance R_2 de la ligne si les pertes ΔP_2 ne doivent pas dépasser 5% de la puissance P . En déduire la section du fil de ligne et la masse de cuivre utilisée.

Quels sont les avantages de ces conditions par rapport à celles de la première question.

Solution VI. 5.

1°) A partir de l'expression (50) qui donne les pertes

$$\Delta P = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

on a, avec $U_1 = 220$ volts et les conditions de ce premier cas,

⁵ En Algérie, le fournisseur d'électricité est la SONELGAZ.

$$R_1 = \frac{U_1^2 \cos^2 \varphi}{P^2} \Delta P_1 \quad \text{et avec} \quad \Delta P_1 = \frac{P}{2}, \quad \text{il vient} \quad R_1 = \frac{U_1^2 \cos^2 \varphi}{2P} = 0,184 \, \Omega$$

Calcul de la section S_1 du fil de ligne et de la masse m_1 de cuivre utilisée :

$$R_1 = \rho_\Omega \frac{l}{S_1} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \rho_\Omega \frac{l}{R_1} = 1,74 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \rho_M S_1 l = 3122 \text{ kg}$$

2°) Avec $U_2 = 5500$ volts et les conditions de ce deuxième cas, on a :

$$R_2 = \frac{5}{100} \frac{U_2^2 \cos^2 \varphi}{P} = 11,5 \, \Omega, \quad S_2 = 2,78 \text{ mm}^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 49 \text{ kg}$$

On utilise 64 fois moins de cuivre, en moyenne tension 5.500 volts, pour transporter la même puissance qu'en basse tension 220 volts avec 10 fois moins de pertes.

Ces pertes sont encore réduites si le fournisseur oblige le client à augmenter le facteur de puissance de son installation.

Remarque : **Transport de l'énergie électrique :**

L'énergie électrique est produite dans des centrales électriques par des alternateurs en moyenne tension (MT), 5500 - 11000 volts.

Elle est ensuite transportée dans des lignes sous hautes ou très hautes tensions 60 kV, 220 kV. puis abaissée en MT⁶ et consommée en basses tensions (BT) 220 - 380 volts

A chaque fois que l'on veut élever ou abaisser la tension électrique, on utilise des transformateurs. Une étude très simplifiée du transformateur est proposée sous forme d'exercice (**Exercice VI. 10**)

⁶ L'USTHB achète l'énergie électrique en MT 30 000 volts puis elle est abaissée pour être utilisée en BT à 220-380 V

Annexe 3

Courants triphasés

L'énergie électrique est produite, transportée et, en grande partie, consommée sous forme triphasée, d'où l'importance des courants triphasés.

1. Les systèmes triphasés équilibrés

1.1. Définitions :

Un système de tensions (ou courants) est triphasé et équilibré s'il est composé de trois tensions (ou courants)

- sinusoïdales
- de même amplitude
- de même fréquence
- et déphasées les unes par rapport aux autres de $2\pi/3$

1.2. Production de tensions triphasées :

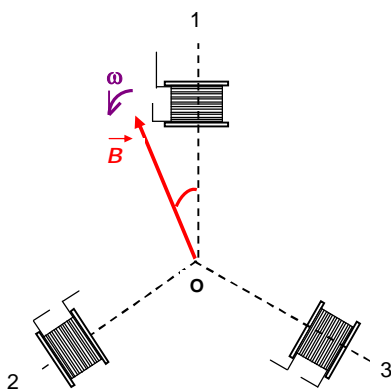


Figure 1.

Considérons :

- trois bobines identiques dont les axes sont fixes, décalés, l'un par rapport à l'autre, de $2\pi/3$ et placés comme l'indique la figure 1.
 - et un champ magnétique \vec{B} , uniforme et constant, tournant, autour de O, à la vitesse angulaire constante ω .
- Les flux magnétiques traversant chaque bobine, sont respectivement :

$$\Phi_1 = B S \cos(\omega t)$$

$$\Phi_2 = B S \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$\Phi_3 = B S \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

S est la surface totale des N spires d'une bobine.

Dans chaque bobine nait une force électromotrice induite.

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = \omega B S \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad e_1 = E \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \omega B S \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad e_2 = E \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2)$$

$$e_3 = -\frac{d\Phi_3}{dt} = \omega B S \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad e_3 = E \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Aux bornes des bobines apparaissent trois forces électromotrices sinusoïdales, de même amplitude

$$E_M = E \sqrt{2},$$

de même fréquence et déphasées de $2\pi/3$.

Elles constituent un système triphasé.

E est la valeur efficace de ces forces électromotrices.

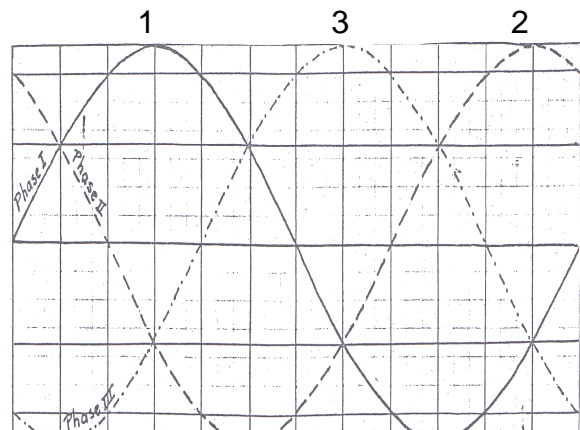


Figure 2.

On obtient le même résultat en faisant tourner, à la vitesse angulaire constante ω , un ensemble de 3 bobines solidaires, dont les axes sont décalés de $2\pi/3$, dans un champ magnétique uniforme et fixe.

Le principe de l'alternateur triphasé est basé sur ce phénomène d'induction électromagnétique. Dans un alternateur, le champ magnétique est créé par l'inducteur placé en général sur la partie tournante (le rotor) et les f.é.m. prennent naissance dans l'induit, système de bobines placées sur la partie fixe (le stator).

1.3. Courants triphasés.

Si on ferme les trois bobines sur une charge constituée de trois impédances identiques :

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$$

il passe dans chaque bobine de l'alternateur et dans chaque impédance un courant :

$$\begin{aligned} i_1 &= I \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2 &= I \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Ces trois courants forment, eux aussi, un système triphasé équilibré. Les tensions v_1 , v_2 , v_3 , aux bornes de chaque impédance, constituent un système de tensions triphasé.

1.4. Transport de l'énergie électrique.

Pour transporter l'énergie électrique, ainsi produite, on peut utiliser 6 conducteurs qui relient la source (alternateur), à la charge (les 3 impédances) de l'utilisateur, mais cette solution est onéreuse.

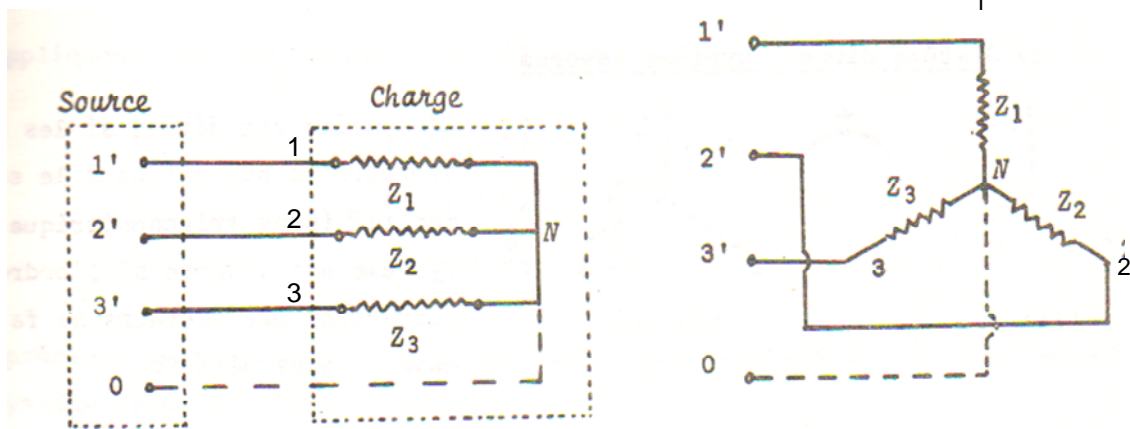
Il suffit de relier les 3 entrées des 3 bobines en un seul point O, et de monter la charge formée par les 3 impédances comme le montre la figure 3. Dans cette figure la charge est montée en étoile.

Au lieu de six conducteurs, on en utilise que quatre :

- trois fils pour les courants i_1 , i_2 , i_3 .
- et un fil neutre.

2. Montage de la charge en étoile.

Les deux charges triphasées, des figures 3 sont identiques. Elles sont montées en étoile.



Figures 3.

Les trois entrées 1, 2 et 3 des impédances sont respectivement reliées aux trois fils de ligne 1, 2 et 3, et les trois sorties, reliées entre elles, forment le neutre.

Remarque : Si les trois impédances sont identiques, la charge est équilibrée et les trois courants dans les lignes sont égaux, les formules (3) montrent que : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Le fil neutre n'est plus nécessaire et peut être supprimé.

Comme *en monophasé*, on représente chaque tension v et le courant i qu'elle crée par 2 vecteurs

$$\vec{V} \quad \text{et} \quad \vec{I}$$

déphasés d'un angle φ . Les modules de ces vecteurs représentent les valeurs efficaces de v et i

En *triphase équilibré*, on obtient un système de 3 vecteurs

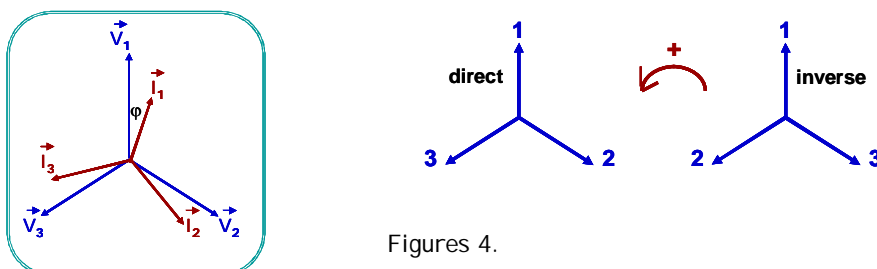
$$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$$

de même module décalés de $2\pi/3$ et un système de courants

$$\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$$

déphasé par rapport au précédent système d'un angle φ (Figure 4).

Les tensions entre phases et neutres v_1, v_2, v_3 sont également appelées "*tensions simples*"



Figures 4.

Le premier système représente les 3 tensions et le second les courants qui leur correspondent.

Le système triphasé est direct si les 3 vecteurs se suivent dans le sens positif. Le système est inverse dans le cas contraire

Les tensions entre lignes, ou tensions composées

$$\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$$

forment un système triphasé équilibré en avance de $\pi/6$ sur le système de tensions simples

$$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$$

En effet :

$$u_1 = v_1 - v_2 \quad \vec{U}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

$$u_2 = v_2 - v_3 \quad \vec{U}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_3$$

$$u_3 = v_3 - v_1 \quad \vec{U}_3 = \vec{V}_3 - \vec{V}_1$$

La figure 5 montre que les tensions entre les lignes U et les tensions entre phase et neutre V , sont reliées par :

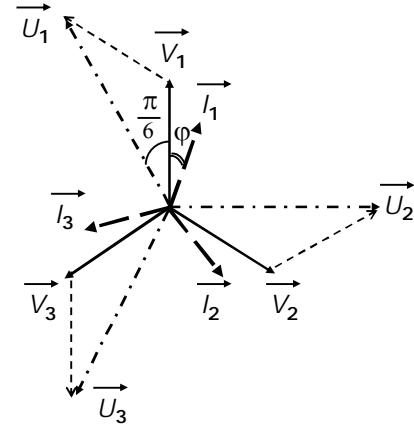


Figure 5.

$$U = 2V \cos \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad U = V \sqrt{3} \quad (4)$$

Dans le montage étoile le *courant dans la ligne* est égal au *courant dans la phase*

3. Montage de la charge en triangle.

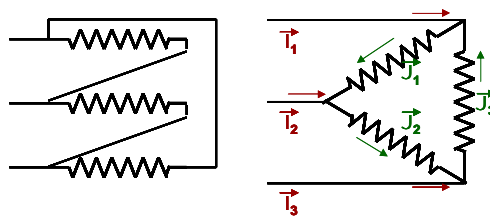
Les deux circuits représentés sur les figures 6 sont équivalents. Les tensions entre lignes :

$$\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$$

forment un système triphasé équilibré en avance de $\pi/6$ sur le système des tensions simples. Il en est de même des courants :

$$\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3$$

dans les impédances. Ces courants \vec{J} forment un système triphasé équilibré déphasé de φ par rapport aux tensions entre les lignes \vec{U} .



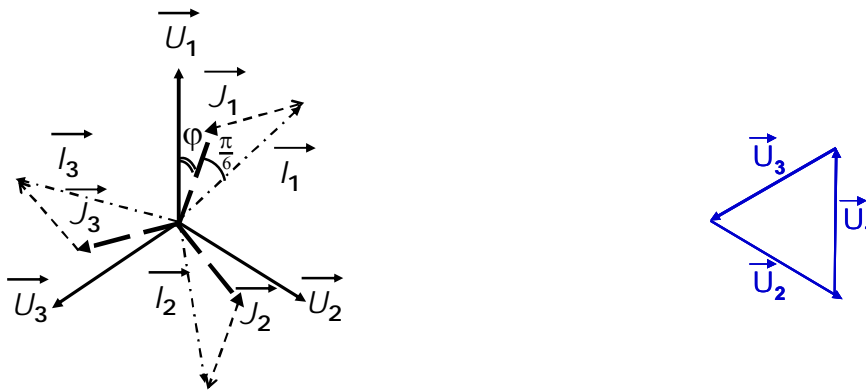
Figures 6.

Lorsque la charge est montée en triangle, les lois de Kirchhoff permettent d'écrire :

$$\vec{I}_1 = \vec{J}_1 - \vec{J}_3$$

$$\vec{I}_2 = \vec{J}_2 - \vec{J}_1$$

$$\vec{I}_3 = \vec{J}_3 - \vec{J}_2$$



Figures 7.

La figure 7 montre que les courants I dans les lignes forment un système triphasé équilibré déphasé de 30° par rapport au système des courants J . On a :

$$I = 2J \cos \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad I = J\sqrt{3} \quad (5)$$

Remarques :

1°) Dans un *montage en triangle*, il n'y a pas de point neutre.

2°) Lorsque les trois impédances ne sont pas identiques la charge est déséquilibrée, les courants n'ont plus la même amplitude et ils ne sont plus déphasés entre eux de 120° .

3°) L'étude des systèmes triphasés peut être généralisée en introduisant un nombre p de phases. Un système de tensions est p -phasé équilibré, s'il comporte p tensions sinusoïdales, de même amplitude, de même fréquence et déphasées les unes par rapport aux autres de $2\pi/p$

3. Puissances en triphasé.

Que le système soit équilibré ou déséquilibré, la puissance active consommée par une charge triphasée est :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3) dt$$

Lorsque la charge est équilibrée et montée en étoile, les puissances instantanées dans chaque phase sont ⁷:

$$p_1 = V_M I_M \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = V I \cos \varphi + V I \cos(2\omega t - \varphi)$$

$$p_2 = V_M I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = V I \cos \varphi + V I \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$p_3 = V_M I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) = V I \cos \varphi + V I \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

⁷ Le réseau est supposé équilibré.

A chaque instant la puissance totale consommée par la charge est :

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 3 V I \cos \varphi \quad \text{soit} \quad p = \sqrt{3} U I \cos \varphi$$

Cette puissance est constante, alors qu'en monophasé elle varie en fonction du temps.

Lorsque le système est équilibré, que la charge soit montée en étoile ou en triangle, la puissance active consommée est :

$$P = \sqrt{3} U I \cos \varphi \quad (6)$$

La puissance réactive s'exprime sous la forme :

$$Q = \sqrt{3} U I \sin \varphi \quad (7)$$

Et la puissance apparente :

$$S = \sqrt{3} U I \quad (8)$$

4. Avantages des systèmes triphasés.

Les systèmes triphasés présentent de nombreux avantages par rapport aux systèmes monophasés.

1°) Lors du transport de l'énergie électrique :

- Les pertes en ligne sont plus faibles en triphasé qu'en monophasé
- Avec une même masse de cuivre, l'énergie transportée en triphasé est supérieure à celle qui serait transportée en monophasé.

2°) Les systèmes triphasés permettent

- d'obtenir, à partir de bobines fixes, des champs magnétiques tournants
- de disposer, au niveau du secteur de deux tensions d'alimentation. En basse tension : 220 V & 127 V et actuellement 380 V & 220 V
- d'avoir un taux d'ondulation plus faible dans les redresseurs.

Exercices : Chapitre VI

Exercice VI . 6. Une résistance pure R est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I .

1°) Calculer la puissance P dissipée, par effet joule, dans cette résistance.

2°) Cette même résistance R est à présent parcourue par un courant sinusoïdal :

$$i(t) = I_M \sin(\omega t)$$

Trouver l'expression du courant I qui dissiperait la même puissance P dans la même résistance. P est la valeur moyenne de la puissance instantanée $p(t)$ calculée sur une période (Equation 35).

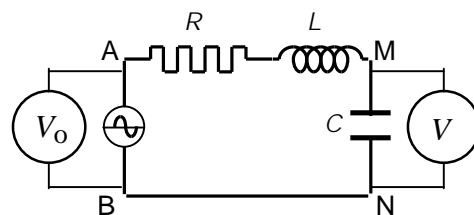
I est, par définition, la valeur efficace du courant $i(t)$.

Exercice VI . 7.

On veut mesurer le coefficient de qualité

$$Q = \frac{L\omega}{R}$$

d'une bobine à l'aide du montage représenté sur la figure, L désigne la self de la bobine et R sa résistance. C est un condensateur de capacité variable et e un générateur de courant alternatif.



Deux voltmètres, l'un placé aux bornes de la source entre A et B et l'autre branché entre M et N, indiquent respectivement les tensions V_0 et V .

1°) Calculer le rapport V/V_0 .

2°) Pour quelle valeur de C ce rapport est-il égal à Q ?

3°) Pour détecter la résonance on mesure à l'aide de deux voltmètres de résistance infinie.

On règle C de façon que V soit maximal et on pose $Q' = V_{Max}/V_0$. Quelle erreur commet-on en utilisant ce procédé ?

A.N. $V_0 = 10 \text{ mV}$ $V_{Max} = 5 \text{ V}$

Exercice VI .8.

Soient les circuits représentés par les figures ci-dessous :

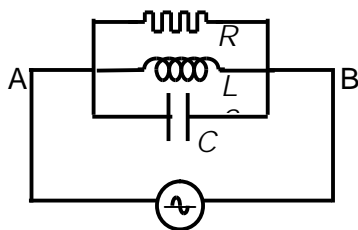


Fig. 1.

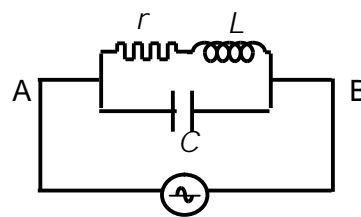


Fig. 2.

1°) Déterminer les pulsations ω_0 et ω'_0 pour lesquelles les admittances des circuits des figures 1 et 2 deviennent réelles respectivement.

1°) Montrer que ω'_0 s'exprime en fonction de ω_0 . On mettra ω'_0 sous la forme :

$$\omega'_0 = \omega_0 (1 - k)^{1/2}$$

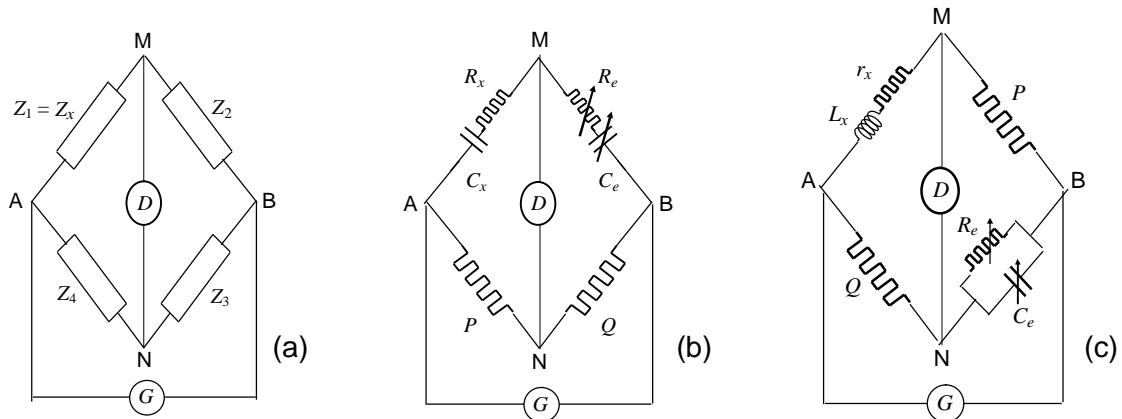
Calculer $\frac{\omega'_0}{\omega_0}$ pour

$$k = 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01.$$

Donner alors la condition pour que les deux circuits soient équivalents. Conclusion

Exercice VI.9. Ponts d'impédances.

Le pont de Wheatstone peut être utilisé en courant alternatif, pour la mesure des impédances. Les résistances R sont remplacées par des impédances Z , la source de courant continu par une source de courant alternatif G et le galvanomètre par un détecteur de zéro D . Ce dernier peut être un voltmètre électronique à amplificateur sélectif. Le générateur, utilisé ici, délivre une tension de 10 volts à la fréquence de 10 kHz.



1°) Ecrire la condition d'équilibre dans le cas général (figure a).

2°) On écrit les quatre impédances sous forme complexe : $Z = R + j X$. Exprimer la résistance R_x puis la réactance X_x de l'impédance inconnue en fonction des résistances et réactances des autres impédances.

3°) On veut mesurer, à l'aide du pont de Sauty représenté sur la figure b, l'impédance Z_x d'un condensateur constitué par sa capacité C_x et sa résistance de fuite R_x . L'impédance Z_e est constituée d'une résistance R_e et d'une capacité C_e variables montées en série. P et Q sont des résistances pures.

Calculer les valeurs de R_x , C_x et le facteur de pertes $\text{tg } \delta = R_x / X_x$

A.N : $C_e = 10^{-9} \text{ F}$, $R_e = 15 \Omega$, $P = 5690 \Omega$, $Q = 4410 \Omega$.

4°) Le pont de Maxwell représenté sur la figure (c), permet de mesurer l'impédance d'une bobine de self L_x et de résistance r_x . L'impédance Z_e est constituée d'une résistance R_e et d'une capacité C_e variables montées en parallèle. P et Q sont des résistances pures.

Calculer les valeurs de r_x et L_x .

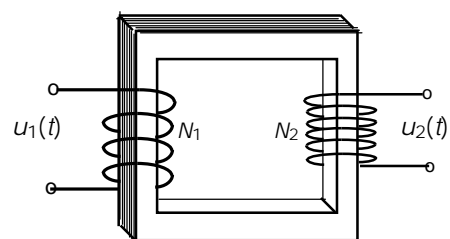
A.N : $C_e = 0,5 \mu\text{F}$, $R_e = 15 \text{ k}\Omega$, $P = 420 \Omega$, $Q = 250 \Omega$

Exercice VI.10. Transformateur

Un transformateur monophasé se compose d'un circuit magnétique en fer doux feuilleté sur lequel sont bobinés deux enroulements constitués de fils de cuivre. Le primaire, qui comporte N_1 spires, est soumis à une d.d.p sinusoidale :

$$u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

Le secondaire comporte N_2 spires. On admet, en première approximation, que le flux magnétique $\Phi(t)$, créé par le courant i_1 qui circule dans l'enroulement primaire, traverse entièrement l'enroulement secondaire. Il en résulte, dans ce dernier, une f.e.m induite $e_2(t)$.



1°) Pourquoi le circuit magnétique est-il feuilleté ? Montrer que $\Phi(t)$ et $e_2(t)$ sont des grandeurs sinusoïdales de même fréquence que $u_1(t)$.

2°) On part du flux magnétique $\Phi(t)$ qui circule dans le circuit magnétique. Chaque spire de l'un ou l'autre des deux enroulements est le siège d'une f.e.m induite. Ecrire, à partir de la loi de Lenz, les f.e.m induites $e_1(t)$ et $e_2(t)$ dans chaque enroulement.

On désigne par R_1 et R_2 les résistances des enroulements et $u_2(t)$ la d.d.p aux bornes du secondaire. Exprimer, pour chacun des enroulement N_1 et N_2 , les d.d.p :

$$u_1(t) \text{ en fonction de } N_1, R_1 \text{ et } i_1,$$

$$u_2(t) \text{ en fonction de } N_2, R_2 \text{ et } i_2.$$

3°) On néglige, en première approximation, les résistances R_1 et R_2 des enroulements. Montrer que, dans ce cas, le rapport des valeurs efficaces est tel que :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{où} \quad \frac{N_2}{N_1} \quad \text{est le rapport de transformation du transformateur.}$$

Représenter, sur un diagramme de Fresnel, les vecteurs $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{U}_1, \vec{U}_2$ après avoir porté $\vec{\Phi}$ à l'origine des phases .

N.B : Dans cette étude, nous avons négligé les résistances des enroulements, les fuites magnétiques et les pertes dans le fer (circuit magnétique).

Exercice VI .11. Un solénoïde portant n spires par mètre est considéré comme infiniment long. Au centre se trouve une spire circulaire, de rayon a , tendue par deux fils dans le prolongement du diamètre vertical de la spire, dont la constante de torsion est C .

On donne $n = 1000$, $a = 1 \text{ cm}$

1°) Calculer l'inductance mutuelle M des deux circuits quand la normale au plan de la spire fait un angle θ avec l'axe du solénoïde. Quelle est la valeur maximale M_0 de M ?

2°) Dans sa position initiale, la torsion du fil est nulle, la spire est telle que son axe est perpendiculaire à celui du solénoïde. On fait passer dans la spire et le solénoïde le même courant continu I . Calculer l'angle θ des axes des deux circuits à l'équilibre. Calculer la constante de torsion du fil pour que, avec $I = 1 \text{ A}$, on ait $\theta = 30^\circ$.

Dans tout ce qui suit La période des courants électriques T est considérée comme très petite devant celle de la spire.

3°) On envoie dans le solénoïde un courant $i = I_M \sin(\omega t)$ et dans la spire un courant $i' = I'_M \sin(\omega t - \varphi)$. Calculer le couple moyen Γ exercé sur la spire dont l'axe fait un angle θ avec celui du solénoïde. Exprimer ce couple en fonction de I, I' et M_0 .

4°) on envoie dans le solénoïde et la spire d'axes initialement perpendiculaires, le même courant de pulsation ω et d'intensité efficace I . Calculer l'angle θ des axes correspondant à l'équilibre pour un courant $i = 1 \text{ A}$.

Exercice VI .12. Puissance dissipée par courants de Foucault.

Un noyau de fer cylindrique, de section circulaire, de diamètre D est placé dans un champ magnétique uniforme dont la direction est parallèle à l'axe du cylindre. Ce champ, créé par un courant alternatif de fréquence f , atteint une valeur maximale B_M .

1°) Calculer la puissance dissipée, par unité de volume, par courants de Foucault.

2°) Calculer cette puissance dans le cas où le noyau est constitué par un ensemble de fils de fer de diamètre d chacun, isolés les uns des autres et en nombre tel que la section utile soit égale à celle du noyau massif.

A.N. $D = 10 \text{ cm}$, $d = 0,5 \text{ cm}$, $B_M = 1,5 \text{ T}$, $f = 50 \text{ Hz}$, résistivité du fer $\rho = 11 \mu\Omega \cdot \text{cm}$

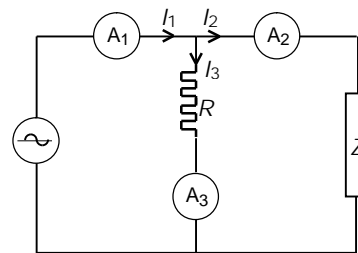
Exercice VI .13. Méthode des trois ampèremètres.

On veut mesurer la puissance P consommée par une charge Z , alimentée par une source

de courant alternatif, par la méthode des trois ampèremètres. Le montage est représenté sur la figure ci-contre.

- 1°) Exprimer P en fonction de la résistance R et des indications des trois ampèremètres, en utilisant une méthode graphique.
- 2°) Retrouver cette expression par le calcul en utilisant la notation complexe.

A.N. $i_1 = 17 \text{ A}$, $i_2 = 12 \text{ A}$, $i_3 = 8 \text{ A}$,
 $R = 10 \Omega$,

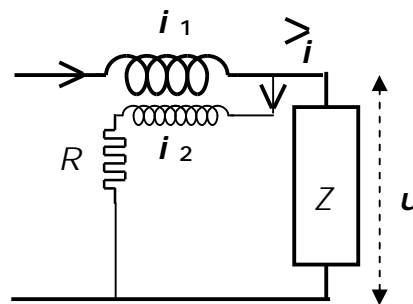
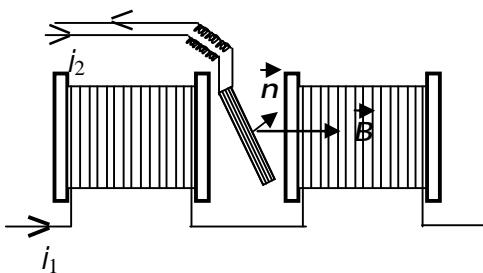


Exercice VI.14. Wattmètre électrodynamique.

Pour mesurer la puissance consommée par une charge d'impédance Z , on utilise un wattmètre comportant un élément moteur électrodynamique⁸. Le couple moteur est équilibré par un couple de rappel créé par un ressort de constante C .

A l'équilibre l'équipage mobile tourne d'un angle :

$$\alpha = \frac{1}{C} \frac{dM}{d\alpha} i_1 i_2$$



Cet équipage est solidaire d'une aiguille qui se déplace devant un cadran gradué en watts. La bobine fixe est montée en série avec la charge Z , elle est appelée pour cette raison "*bobine intensité*" ou "*bobine gros fil*". La bobine mobile, en série avec une grande résistance R , placée en dérivation, comme un voltmètre, aux bornes de Z . C'est la "*bobine tension*" ou "*bobine fil fin*". Un wattmètre électrodynamique comporte donc quatre bornes. Montrer que la déviation α est proportionnelle à la puissance consommée par Z . On négligera la self L_2 de la bobine tension et le coefficient d'induction mutuelle M des deux bobines.

Exercice VI.15.

On veut mesurer, à l'aide d'un oscilloscope, la puissance P consommée, en courant alternatif, par une charge Z .

A cet effet, on place en série Z et une capacité C , l'ensemble est alimenté par une tension alternative $v = V_M \cos(2\pi f t)$. Les tensions prélevées aux bornes de Z et de C sont respectivement appliquées aux entrées X et Y d'un oscilloscope.

Montrer que l'aire de l'oscillogramme est proportionnelle à la puissance P . Aucun courant n'est dérivé par l'oscilloscope.

⁸ Voir Exercice IV.6.

Exercice VI.16. Relèvement du facteur de puissance.

Un atelier, branché sur une source de courant monophasé 220 volts, 50 hertz, comporte une installation composée de moteurs électriques et de lampes, (il n'y a donc pas d'éléments capacitifs). Cette installation, dont le facteur de puissance est $\cos \varphi_1 = 0,78$, absorbe, à pleine charge, une puissance $P = 35$ kW.

1°) Calculer le courant I_1 absorbé à pleine charge. Faire apparaître, en utilisant la notation complexe (voir Ch VI, § 2.1), les parties réelle et imaginaire du courant complexe \bar{I}_1

2°) On veut relever le facteur de puissance de l'installation à $\cos \varphi_2 = 0,9$. Calculer la capacité des condensateurs que l'on doit brancher aux bornes de l'alimentation, et le nouveau courant qui circule dans l'atelier à pleine charge.

Annexe 4

Dimensions & Unités des grandeurs physiques.

Grandeurs fondamentales du système M.K.S.A

Longueur l [L] *mètre*, Masse m [M] *kilogramme*,
 Temps t [T] *seconde*, Intensité I [I] *ampère*.

Grandeurs dérivées utilisées dans ce cours

Grandeurs		loi	Dimensions	Unité
Vitesse	v	$v = l/t$	$L.T^{-1}$	mètre/seconde : m/s
Accélération	γ	$\gamma = v/t$	$L.T^{-2}$	mètre/s ² : m/s^2
Force	F	$F = m \gamma$	$M.L.T^{-2}$	newton : N
Travail, Energie	W E	$W = F.l$	$M.L^2.T^{-2}$	Joule : J
Puissance	P	$P = W/t$	$M.L^2.T^{-3}$	watt : W
Charge élec.	q	$q = I.t$	$T.I$	coulomb : C
Potentiel	V	$P = V.I$	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	volt : V
Champ elec.	E	$V = E.l$ E dérive de V	$M.L^1.T^{-3}.I^{-1}$	volt/mètre : V/m
Excitation élec	D	$D.S = q$ Th de Gauss	$L^{-2}.T.I$	coulomb/m ² C/m^2
Capacité	C	$q = C.V$	$M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$	farad : F
Permittivité el	ϵ	$D = \epsilon.E$	$M^{-1}.L^{-3}.T^4.I^2$	farad/mètre : F/m
Résistance el	R	$V = R.I$ Ohm	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$	ohm : Ω
Champ magn	B	$F = B.I.l$ Laplace	$M.T^{-2}.I^{-1}$	tesla : T
Excitation mag	H	$H.l = I$ Th d'Ampère	$L^{-1}.I$	ampère/mètre : A/m
Flux magn	Φ	$\Phi = B.S$	$M.L^2.T^{-2}.I^{-1}$	weber : Wb
Coef induction Sel induction	M L	$\Phi = M.I$ $\Phi = L.I$	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$	henry : H
Perméabilité m	μ	$B = \mu.H$	$M.L.T^{-2}.I^{-2}$	henry/mètre : H/m

N.B 1°) Dans ce tableau, les dimensions de chaque grandeur sont calculées à partir d'une loi connue où interviennent des grandeurs dont les dimensions ont été précédemment définies.

2°) L'unité de mesure d'une grandeur physique s'écrit toujours avec une lettre minuscule : coulomb, mètre, seconde, hertz, ampère etc...

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Alonso M., Finn, E.J. "*Physique générale T. 2 : Champs et Ondes*" , Inter Editions Paris 1977
- [2] Bendaoud M., "*Relativité* : Ed OPU Alger 1997.
- [3] Benson Harris *Electricité & Magnétisme* Edition du renouveau pédagogique 1999
- [4] Bruhat G. *Électricité*, Edition revue par G. Goudet Masson Paris 1963.
- [5] Caubarrere J.L., Fourny J., Ladjouze H., "*Électricité et Ondes* : Ed OPU Alger 1990.
- [6] Djelouah H *Electromagnétisme* Licence LMD S4, Ed. Les "Cours de la Faculté de Physique" 2012.
- [7] Cessac J , Tréherne G *Physique* 1^{ère} C, Ed. Fernand Nathan Paris 1966.
- [8] Feynman R, Leighton, Sands, "*Le Cours de Physique de Feynman : Électromagnétisme*" Inter Editions Paris 1979.
- [9] Maalem M.S., "*Électricité (T.1 & 3), Exercices Corrigés avec Rappel de Cours* : Ed. MMS Alger.
- [10] Pérez J-P. , Carles R. , Fleckinger R. *Electromagnétisme - Fondements et applications* Ed. Masson Paris 2001
- [11] Ravailé M. : *Electrostatique & Electrocinétique* Editions J.B. Baillère Paris 1964.
- [12] Séguin M., Descheneau J., Tardif B. : *Electricité & magnétisme* Editions du Renouveau pédagogique 2010.