

Chapitre IV

MAGNÉTOSTATIQUE

Nous avons étudié, au premier chapitre, l'interaction électrique qui intervient entre deux corps électrisés. Nous allons considérer, à présent, une autre interaction, l'interaction magnétique, qui fait intervenir le champ magnétique. La magnétostatique est la partie du magnétisme qui ne fait intervenir que des phénomènes indépendants du temps.

1. INTRODUCTION.

1. 1. Propriétés des aimants.

Dès l'antiquité les grecs avaient remarqué qu'une pierre de Magnésie¹, la magnétite, avait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer : d'où le mot magnétisme. Comme pour l'électricité (Ch I § 1.9), la contribution des grecs à l'étude du magnétisme fut purement linguistique.

Puis on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités : les *pôles*. Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, pôle nord et pôle sud, sont différents.

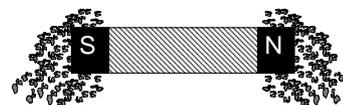
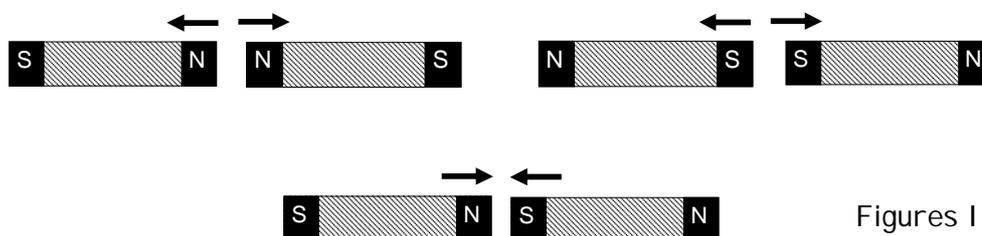


Figure IV.1

L'expérience montre que :

Deux pôles de même nom se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.



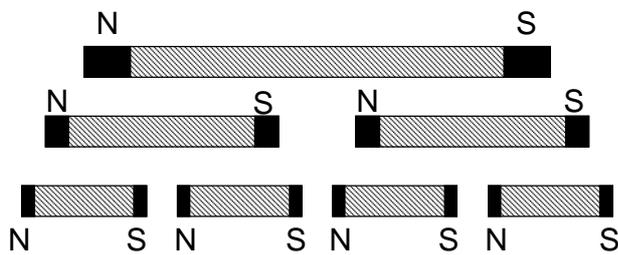
Figures IV.2

Au début du moyen âge, les chinois utilisèrent les propriétés de certains corps magnétiques et inventèrent les *premières boussoles*. Ce fut la première application du magnétisme.

¹ Magnésie : région de la Grèce antique en Asie Mineure (actuellement en Turquie)

L'expérience de l'aimant brisé montre que :

Il est impossible de séparer le pôle nord du pôle sud d'un aimant.



Figures IV.3

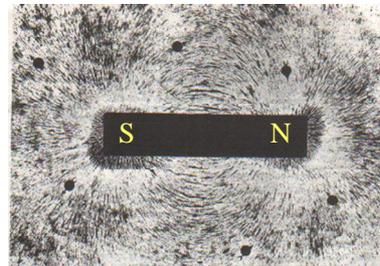
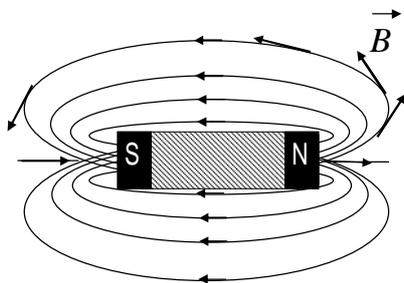
En effet si on casse un aimant en deux parties, on obtient deux autres petits aimants ayant chacun un pôle nord et un pôle sud. Si on répète cette opération, on obtient, à chaque fois, des aimants de plus en plus petits dotés chacun d'un pôle nord et d'un pôle sud.

1.2. Champ magnétique.

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un *champ magnétique* de la même manière qu'un champ gravitationnel existe au voisinage de la terre et un champ électrique autour d'une charge électrique. De même il existe, comme nous allons le voir, au voisinage d'un circuit électrique un champ magnétique.

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force.

Comme en électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique² noté \vec{B} . Ce vecteur est tangent aux lignes de champ.



Figures IV.4

Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud.

Dans le système M.K.S.A rationalisé, le champ magnétique est mesuré en *tesla* (T)³, en hommage au savant serbe Nikola Tesla (1856-1943), inventeur de l'alternateur.

Historiquement le concept de champ est d'abord introduit en magnétisme. Faraday, en répandant de la limaille de fer au voisinage d'un aimant, constate que les grains de fer s'orientent et forment une figure, puis ce concept est étendu à l'électricité (voir ch I).

² Il y a une différence entre le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} (voir le § 4.1.)

³ Voir l'annexe 4.

1.3. Force de Coulomb.

En 1885, Coulomb trouve, à l'aide de sa balance de torsion, une loi, analogue à celle de l'électrostatique⁴ qui donne la force d'interaction entre deux aimants selon le modèle newtonien. Il introduit alors le concept de masse magnétique. Mais cette théorie, étudiée jusqu'au milieu du vingtième siècle, a été abandonnée.

1.4. L'expérience d'Oersted et ses conséquences.

A la fin du dix huitième siècle, outre l'interaction gravitationnelle, on connaissait l'interaction électrique et l'interaction magnétique (action entre deux aimants). En 1820, Oersted découvre l'action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée. Cette découverte, rendue possible grâce à l'invention en 1800 de la pile électrique par Volta, va permettre aux savants du dix neuvième siècle, de développer une nouvelle science : l'électromagnétisme.

Dès 1820, Biot et Savart énoncent la loi qui donne la force, créée par un fil parcouru par un courant, qui agit sur le pôle d'un aimant⁵. La formule empirique de Biot a été démontrée par Laplace. A la même époque, Ampère trouve la force exercée par un aimant sur un courant (loi de Laplace). En outre, Ampère élabore une théorie qui explique le magnétisme par l'existence de courants électriques circulaires dans la matière aimantée. On comprend alors la raison pour laquelle il est impossible de séparer les deux pôles d'un aimant. Puis il démontre toutes les lois connues, celles de Coulomb, Biot et Laplace, à partir de l'interaction entre deux courants électriques. En 1905, Paul Langevin propose une théorie qui attribue le magnétisme aux mouvements des électrons qui gravitent dans l'atome sur des orbites fermées et qui correspondent aux courants circulaires imaginés par Ampère.

Au lieu de suivre l'ordre historique, et partir des lois de Biot et de Laplace, nous allons commencer par étudier l'action d'un champ magnétique sur une charge électrique en mouvement. Cette force, découverte par Lorentz, à la fin du dix neuvième siècle va nous permettre de retrouver la force de Laplace. Puis nous donnerons, sans démonstration, la loi de Biot à partir de laquelle on calcule les champs magnétiques créés par différents circuits électriques.

2. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR LE MOUVEMENT D'UNE CHARGE ELECTRIQUE.

2.1. Force de Lorentz.

A la fin du XIX^e siècle, le physicien hollandais Hendrik Lorentz donne l'expression de la force \vec{F} qui s'exerce sur une charge ponctuelle q , se déplaçant à la vitesse \vec{V} dans des champs électrique et magnétique \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (1)$$

En présence du seul champ magnétique \vec{B} ($\vec{E} = 0$), la force de Lorentz devient :

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2)$$

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en l'absence du champ électrique \vec{E} , une charge q animée d'une vitesse \vec{V} , est soumise à l'action d'une force $\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$.

⁴ Voir Ch. I § 2.1.

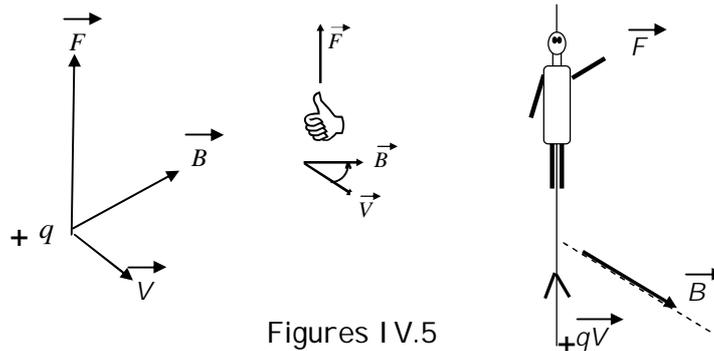
⁵ "Action de chaque élément μ du fil sur chaque molécule m de magnétisme austral ou boréal" Biot : Précis élémentaire de physique. 2^{ème} édition 1823 : Tome II p 122

Cette nouvelle définition du champ magnétique est obtenue à partir de la force de Lorentz. Cette force

- a pour module:

$$F = q V B \left| \sin(\vec{V}, \vec{B}) \right|$$

- sa direction est la perpendiculaire au plan formé par \vec{V} et \vec{B} ,
- Son sens est tel que, dans le cas d'une charge positive, les vecteurs \vec{V} , \vec{B} et \vec{F} forment un trièdre direct (règle de la main droite). Lorsque la charge est négative la force change de sens.



Figures IV.5

Le sens de cette force est également donné par la règle du bonhomme d'Ampère :

Le bonhomme d'Ampère, traversé des pieds vers la tête par la charge (+q) animée d'une vitesse V, voit fuir les lignes de champ, et a la force à sa gauche

2.2. Application : Mouvement d'une particule dans un champ magnétique.

Une particule, de masse m portant une charge électrique q , se déplace dans un champ magnétique uniforme \vec{B} avec une vitesse constante \vec{V} perpendiculaire à \vec{B} . Elle est donc soumise à une force dont l'expression, donnée en (2), est:

$$\vec{F} = q (\vec{V} \wedge \vec{B})$$

Cette force est perpendiculaire à \vec{V} et \vec{B} , et son module est:

$$F = qV B \quad (3)$$

Elle reste perpendiculaire à \vec{V} au cours du mouvement. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle. L'accélération étant centripète, le mouvement est circulaire et uniforme. La relation fondamentale de la dynamique permet d'exprimer le module de la force sous la forme:

$$F = m \frac{V^2}{R} \quad (4)$$

R est le rayon de la trajectoire circulaire. Avec (3) et (4), il vient :

$$m \frac{V^2}{R} = qV B$$

A partir de cette expression, on obtient :

- Le rayon du cercle décrit par la particule :

$$R = \frac{mV}{qB} \quad (5)$$

On note que plus le champ magnétique est intense, plus le rayon de la trajectoire est petit.

- Le module de la vitesse angulaire du mouvement $\omega = \frac{V}{R}$, qui s'écrit

$$\omega = \frac{q}{m} B, \quad (6)$$

ne dépend que du rapport q/m et de l'intensité du champ magnétique B .

Sens de la vitesse angulaire :

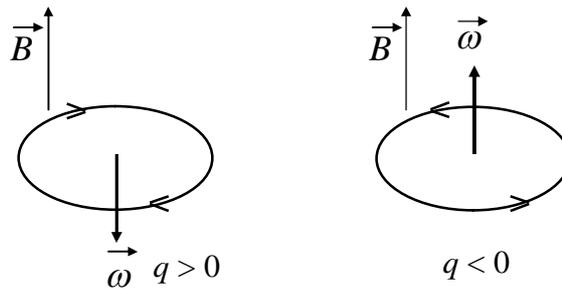
Dans un mouvement circulaire uniforme, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{\omega} \wedge \vec{V})$$

Avec (2) on a : $m(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$ soit $\vec{\omega} \wedge \vec{V} = -\frac{q}{m} \vec{B} \wedge \vec{V}$

d'où :

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} \quad (7)$$



Figures IV.6

Si la charge de la particule est positive ($q > 0$) $\vec{\omega}$ et \vec{B} sont de sens contraires.

Sinon ($q < 0$) $\vec{\omega}$ et \vec{B} ont le même sens.

Cas où la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au champ.

Dans ce cas, on décompose la vitesse en deux composantes :

$$\vec{V} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp}$$

\vec{V}_{\parallel} est parallèle à \vec{B} : cette composante n'est pas affectée par \vec{B} , la particule prend un mouvement rectiligne et uniforme.

\vec{V}_{\perp} est perpendiculaire à \vec{B} : le mouvement de la particule est, comme nous venons de le voir, circulaire et uniforme.

Le mouvement résultant est un mouvement hélicoïdal. La trajectoire est une hélice.

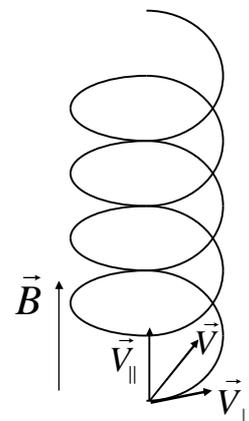


Figure IV.7

3. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR UN COURANT ELECTRIQUE.

3.1. Force de Laplace.

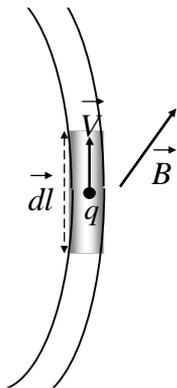
Lorsqu' un fil conducteur, parcouru par un courant I , est placé dans un champ magnétique \vec{B} , chaque élément $d\vec{l}$ du fil subit une force :

$$\vec{dF} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Cette force est perpendiculaire au plan formé par le champ \vec{B} et l'élément de courant considéré. Son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère⁶. Comme au § 2.1 :

Le bonhomme d'Ampère, parcouru par le courant I , des pieds vers la tête, a la force à sa gauche lorsqu'il regarde les lignes de champ.

Nous allons démontrer la loi de Laplace à partir de la force de Lorentz trouvée soixante dix ans après.



Considérons un élément de volume conducteur filiforme de longueur dl , de section S et parcouru par un courant I . Il est traversé à chaque instant par le même nombre N de charges et par conséquent par une même quantité infinitésimale de charges

$$dQ = Nq$$

Chaque charge $(+q)$ subit de la part du champ magnétique \vec{B} une force

$$q \vec{V} \wedge \vec{B}$$

et les N charges subissent une force :

Figure IV.8

$$\vec{dF} = Nq \vec{V} \wedge \vec{B} = dQ \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (9)$$

D'autre part $dQ = Nq = \rho dl S$ et $dQ \cdot \vec{V} = \rho \vec{V} dl S = I d\vec{l}$

Où ρ est la densité volumique de charges. L'expression (9) devient :

$$\vec{dF} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (10)$$

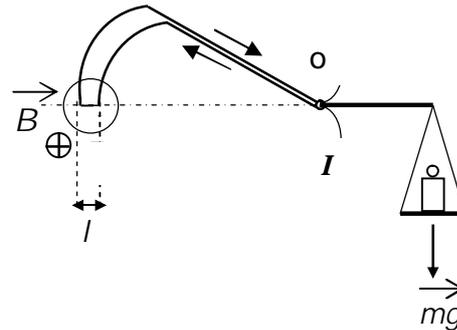
C'est l'expression de la loi de Laplace.

Exercice IV.1. Balance de Cotton

On veut mesurer l'intensité du champ magnétique B , dans l'entrefer d'un électro aimant, à l'aide de la balance de Cotton, représentée sur la figure ci-dessous. L'un des bras de la balance est constitué par un circuit électrique alimenté par un courant continu I . Il comporte deux conducteurs linéaires parallèles, deux conducteurs qui sont des secteurs circulaires centrés sur l'axe O de la balance et un conducteur linéaire de longueur l qui est horizontal lorsque la balance est à l'équilibre.

⁶ La force de Laplace est parfaitement définie à partir du produit vectoriel de la formule (10). Mais à l'époque d'Ampère on ne connaissait pas le calcul vectoriel. Ce dernier ne sera introduit qu'à la fin du 19^{ème} siècle par Gibbs et Heaviside. Il en est de même de la formule de Biot qui donne le champ magnétique.

- 1°) Dans quel sens doit-on faire circuler le courant, \vec{B} étant orienté vers l'arrière de la figure.
 2°) Calculer B sachant que : les bras de la balance ont même longueur L .
 $l = 2 \text{ cm}$, $I = 5,25 \text{ A}$, $m = 3,50 \text{ g}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Solution IV.1. 1°) Le courant doit circuler dans le sens indiqué par les flèches.
 2°) L'action sur les deux conducteurs rectilignes parallèles est nulle. Le moment des forces agissant sur les secteurs circulaires est nul car ces forces sont dirigées vers O.

A l'équilibre le moment, par rapport à l'axe de la balance, de la force de Laplace qui agit sur l , est égal et opposé à celui du poids. Les bras de la balance ayant même longueur, on a :

$$B I l = m g \quad \text{d'où} \quad B = \frac{m g}{I l} = 0,32 \text{ T}$$

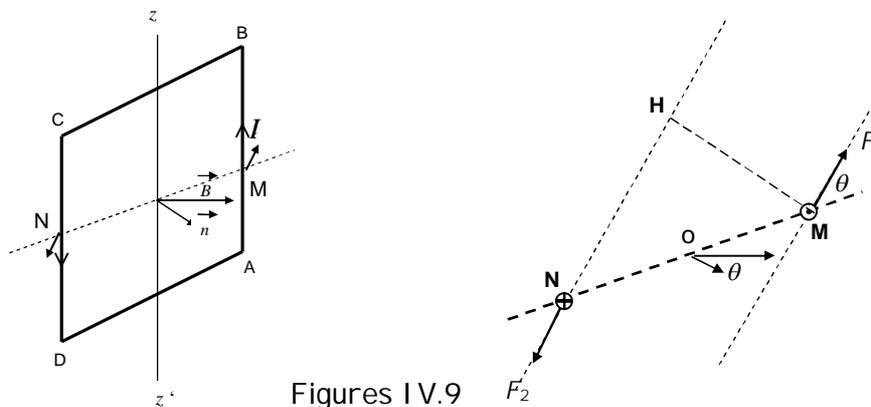
3. 2. Action d'un champ sur un circuit fermé. Moment magnétique.

On considère, pour simplifier, un circuit rectangulaire, de longueur $AB = l$ et de largeur $BC = a$, parcouru par un courant I . Ce circuit C , mobile autour d'un axe fixe zz' , est placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} , la normale à la spire C fait un angle θ avec \vec{B} .

Le côté AB est soumis, en M , à l'action d'une force de module :

$$F_1 = F = B I l$$

dont la direction est le sens sont donnés par la règle du bonhomme d'Ampère



Figures IV.9

De même CD est soumis, en N , à une force \vec{F}_2 égale et opposée à \vec{F}_1 . La résultante des forces qui agissent sur BC est nulle, il en est de même de AD .

Ainsi le circuit est soumis à un couple formé de \vec{F}_1 & \vec{F}_2 et dont le module est égal à :

$$\Gamma = F M H$$

Or

$$M H = M N \sin \theta = a \sin \theta$$

D'où: $\Gamma = I l a B \sin \theta$ On pose : $\vec{M} = I S \vec{n}$ avec $S = a l$

C'est le moment magnétique du circuit rectangulaire considéré.

Le couple, qui agit sur ce circuit, s'écrit

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (11)$$

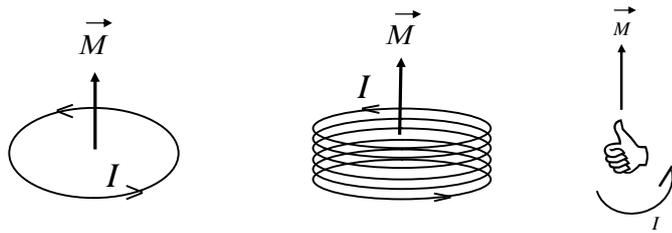
Ce résultat est général.

Un circuit, comportant N spires de surface S , parcouru par un courant I , possède un moment magnétique :

$$\vec{M} = N I S \vec{n} \quad (12)$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire porté par la normale aux spires.

Le moment magnétique est mesuré en ampère mètre carré (A.m²)



Figures IV.10

Placé dans un champ magnétique \vec{B} , le circuit est soumis à un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Moment magnétique d'un aimant.

De même une aiguille aimantée, ou un barreau aimanté sont caractérisés par leur moment magnétique \vec{M} .

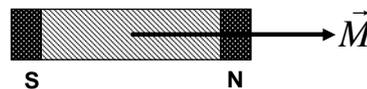


Figure IV.11

Placé dans un champ magnétique \vec{B} , l'aimant est soumis à un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

3.3. Energie d'un circuit placé dans un champ magnétique.

On montre⁷ que l'énergie potentielle d'un circuit parcouru par un courant I , de moment magnétique

$$\vec{M} = I S \vec{n}$$

placé dans un champ magnétique \vec{B} est :

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad (13)$$

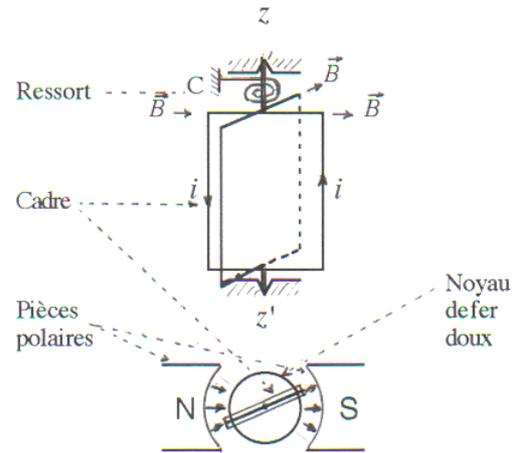
De même l'énergie d'un aimant de moment \vec{M} est :

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

⁷ Considérer, à titre d'exercice, le cas d'un cadre rectangulaire parcouru par un courant (Voir § 3.2)

Exercice IV.2. Un élément moteur magnéto-électrique comporte un cadre mobile, constitué de N spires rectangulaires de longueur l , et de largeur $2a$.

Ce cadre tourne autour d'un axe zz' . Il est parcouru par un courant i et il est plongé dans un champ magnétique \vec{B} radial créé par un aimant permanent dont la forme est indiquée sur la figure ci-contre.



1°) Calculer le couple moteur Γ_m , qui agit sur le cadre.

2°) Ce couple moteur est équilibré par un couple de rappel Γ_r dû à un ressort de constante C . Montrer que le courant i est proportionnel à la rotation du cadre α .

A.N. $B = 0,3 \text{ T}$; $a = 0,5 \text{ cm}$; $l = 2 \text{ cm}$; $i = 10 \text{ mA}$; $C = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ N.m/rad}$; $N = 200$.

Solution IV.2. 1°) Le moment, par rapport à l'axe de rotation, des forces de Laplace qui agissent sur les côtés horizontaux du cadre, est nul.

Le champ étant radial, quelque soit la position du cadre, les forces, qui agissent sur chaque côté vertical, sont perpendiculaires au plan du cadre et ont même module :

$$F_1 = F_2 = Bil \quad \text{et sont opposées} \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Elles forment un couple dont le moment par rapport à $z'z$, pour les N spires, est :

$$\Gamma_m = N Bil(2a) = NBSi$$

où S est la surface d'une spire.

2°) A l'équilibre ce couple moteur est égal et opposé au couple de rappel $\Gamma_r = -C\alpha$ exercé par le ressort. D'où

$$\alpha = \frac{NBS}{C} i = 0,52 \text{ rad} \quad \text{soit} \quad \alpha \approx 30^\circ$$

Exercice IV.3. On veut mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_0 à l'aide d'un pendule formé d'un barreau magnétique de moment magnétique M et de masse m .

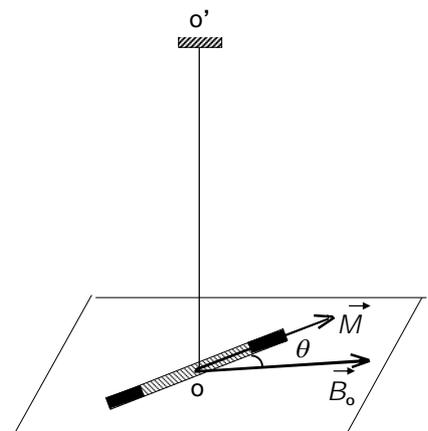
Ce dernier (figure ci-contre), suspendu en son milieu O à un fil sans torsion, est mobile, dans le plan horizontal, autour d'un axe vertical OO' . L'aimant a la forme d'un parallélépipède rectangle. On fait tourner ce pendule d'un angle θ_M et on l'abandonne à lui-même.

1°) Sachant qu'aucun couple de torsion n'agit sur le système, écrire l'équation du mouvement dans le cas où les frottements sont négligeables. En déduire la période d'oscillation T du pendule dans le cas des faibles amplitudes. ($\sin \theta \approx \theta$).

A.N. $T = 8,2 \text{ s}$, $M = 2 \text{ A.m}^2$, $J = 0,64 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

2°) Retrouver la période T à partir d'une étude dimensionnelle.

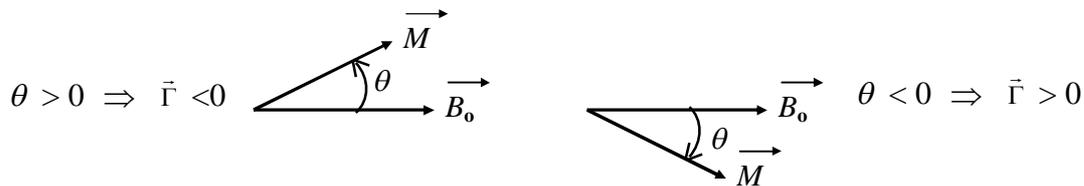
J désigne le moment d'inertie du pendule par rapport à OO'



Solution IV. 3. Les frottements et le couple de torsion étant nuls, le couple d'inertie est équilibré par le couple magnétique :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = - M B_0 \sin \theta$$

Le couple s'oppose toujours au déplacement. En effet :



L'équation du mouvement s'écrit :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - M B_0 \sin \theta \quad \text{si} \quad \sin \theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{M B_0}{J} \theta = 0$$

C'est l'équation d'un pendule oscillant autour de son axe : $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$

d'où $\omega^2 = \frac{M B_0}{J}$ soit $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M B_0}} \Rightarrow B_0 = 2.10^{-5}$ tesla

2°) Calcul dimensionnel :

La période T dépend de J, M et B . soit : $T = J^x M^y B^z$

Cette expression doit être dimensionnellement homogène, les deux membres ont donc pour dimension un temps. En remplaçant chaque grandeur par sa dimension, on obtient :

$$T = (M.L^2)^x (I.L^2)^y (M.T^{-2}.I^{-1})^z = M^{(x+z)}.L^{(2x+2y)}.T^{(-2z)}.I^{(y-z)}$$

D'où :

$$\begin{cases} 0 = x + z \\ 0 = x + y \\ 1 = -2z \\ 0 = y - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = +1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -1/2 \end{cases} \rightarrow T = k \sqrt{\frac{J}{M B_0}}$$

Le calcul dimensionnel ne peut pas donner la valeur du coefficient sans dimension k

4. CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN COURANT.

4.1. Loi de Biot et Savart.

Les physiciens français Biot et Savart ont trouvé l'expression du champ magnétique obtenu lors de l'expérience d'Oersted.

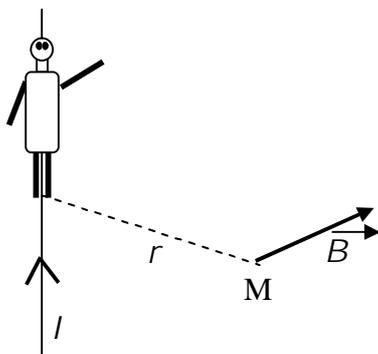


Figure IV. 12.

Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie, parcouru par un courant I , crée, en un point M de l'espace situé à une distance r du fil, un champ magnétique dont :

- la direction est telle que les lignes de champ soient des cercles axés sur le fil.
- le sens est donné par la règle du "bonhomme d'Ampère": celui-ci, lorsqu'il est parcouru par I , des pieds vers la tête, voit en M le champ à sa gauche.
- le module est:

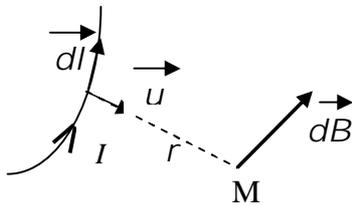
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \tag{14}$$

où μ_0 est la *perméabilité magnétique* du vide.

Dans le système MKSA, $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$ henry par mètre: H/m (Annexe 4)

Dans le cas d'un circuit fermé de forme quelconque, chaque élément de courant

$I dl$, crée en M un champ élémentaire :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (15)$$

C'est l'expression de la loi de Biot & Savart dans le cas général.

Le vecteur \vec{u} est orienté, comme le montre la figure, de la source vers le point M.

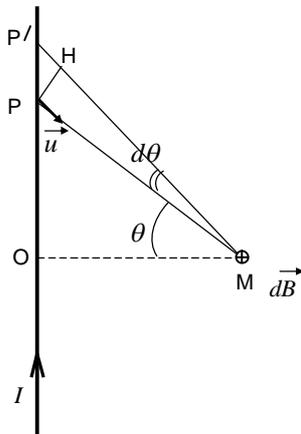
N.B. Cette loi sera démontrée en 2^{ème} et 3^{ème} années de licence.

Figure IV.13

Exercice IV. 4. Retrouver l'expression (14) du champ créé par un fil rectiligne de longueur infinie. A.N : $I = 5$ A et $OM = a = 50$ cm

Solution IV. 4. Le champ magnétique $d\vec{B}$, créé au point M, par un élément $PP' = dl$ du fil considéré, est donné par l'expression (15)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$



où $r = PM$

Ce champ est perpendiculaire en M au plan formé par \vec{dl} et \vec{u} . Son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère (voir la figure ci-contre). Son intensité est:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cos \theta}{r^2}$$

d'après la figure :

$$r = \frac{a}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad PH = r d\theta$$

$$\Rightarrow dl = \frac{r d\theta}{\cos \theta} \quad \text{d'où}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cos \theta d\theta \quad \text{et} \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 2 \mu T$$

Remarque : Il existe une différence notable entre la nature vectorielle du champ électrique \vec{E} et celle du champ magnétique \vec{B} . \vec{E} est un vecteur polaire (un vrai vecteur), il est dirigé suivant la droite qui joint la charge source au point M origine du champ. Par contre \vec{B} est un vecteur axial ou pseudo vecteur, qui est défini à partir d'un produit vectoriel (loi de Biot).

Pour les différencier certains auteurs utilisent, pour un vecteur axial, la notation :



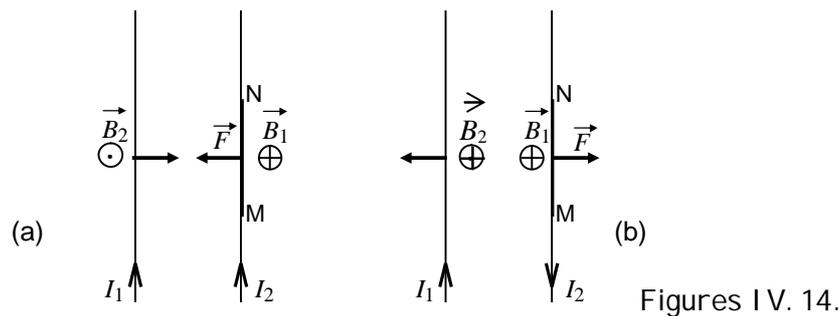
La théorie de la relativité, qui sera étudiée en L3, montre que ces deux grandeurs, le champ électrique et le champ magnétique, de l'espace tridimensionnel, ne sont en fait que deux parties d'une seule et même grandeur physique, de l'espace à quatre dimensions : "le tenseur électromagnétique". On parle alors de champ électromagnétique.

4.2. Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles : Définition de l'ampère.

Considérons deux fils conducteurs rectilignes, parallèles, de longueur infinie, séparés par une distance d et parcourus par des courants I_1 et I_2 . Calculons la force qu'exerce le premier fil sur une longueur $MN = l$ du second fil.

1°) Les deux courants I_1 et I_2 ont le même sens (figure IV.14.a): calculons le champ magnétique \vec{B}_1 , créé au milieu O de MN par le premier fil. Ce champ est perpendiculaire au plan des deux fils et orienté comme le montre la figure (règle du bonhomme d'Ampère). D'après la loi de Biot, il a pour module

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1$$



Figures IV. 14.

Ce champ exerce, sur la longueur $MN = l$, une force \vec{F} dirigée et orientée comme l'indique la figure. Son module est en vertu de la loi de Laplace:

$F = B_1 I_2 l$ soit en remplaçant B_1 par sa valeur :

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 l \quad (16)$$

Si on fait le même raisonnement pour calculer la force exercée par le second fil sur une même longueur l du premier, on trouve une force égale et opposée.

La figure montre que l'interaction entre les deux fils, parcourus par des courants de même sens, se traduit par une attraction.

2°) Les deux courants I_1 et I_2 sont de sens contraires (figure IV.14.b). Le même raisonnement montre que, dans ce cas, l'interaction se traduit par une répulsion.

Remarque : Ampère avait trouvé une formule générale qui donne la force d'interaction entre deux éléments $I_1 d\vec{l}_1$ et $I_2 d\vec{l}_2$. A partir de cette formule, il a pu retrouver toutes les lois de l'électromagnétisme

Définition de l'ampère : L'unité de l'intensité électrique, l'*ampère*, est définie à partir de cette interaction.

Considérons le cas où les deux courants ont le même sens et la même intensité $I_1 = I_2 = I$; les distances l et d sont égales à l'unité de longueur du système MKSA $l = d = 1$ mètre. Dans ce système, on pose $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (unité MKSA). La force qui agit sur MN est :

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} I^2 = 2 \cdot 10^{-7} I^2 \text{ newton} \quad (17)$$

Le courant I a pour valeur l'unité d'intensité MKSA si $F = 2 \cdot 10^{-7}$ newton. Dans le système d'unités MKSA l'unité de l'intensité est l'ampère.

L'ampère est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force $F = 2 \cdot 10^{-7}$ Newton par mètre de longueur.

Il est difficile de mesurer l'Ampère absolu à partir de cette méthode, d'où l'utilisation d'électrodynamomètres absolus. L'électrodynamomètre de Pellat fut l'un des premiers appareils construits (exercice IV.12)

4.3. Champ créé par une spire circulaire en un point de son axe.

Un élément $d\vec{l}$ d'une spire, parcourue par un courant I , produit en un point M de l'axe de la spire, un champ magnétique $d\vec{B}$. Il est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et \vec{u} , son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère et son module est

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

En raison de la symétrie du problème, toutes les composantes perpendiculaires à l'axe s'éliminent, et les composantes suivant oz

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin \theta$$

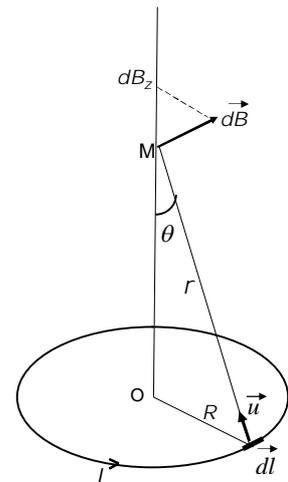


Figure IV. 15

s'ajoutent. Le champ résultant est porté par l'axe de la spire et a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} I \int_0^{2\pi R} dl \quad \text{soit} \quad B = \frac{\mu_0}{2} \frac{\sin \theta}{r^2} I R$$

R étant le rayon de la spire et sachant que $\sin \theta = \frac{R}{r}$ on a :

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{r^3} I \quad \text{soit} \quad B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} I \quad (18)$$

Au centre de la spire, le champ a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0}{2R} I \quad (19)$$

4.4. Dipôle magnétique.

On peut écrire l'expression (18) du champ sur l'axe de la spire sous la forme :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} I \quad \text{c'est-à-dire} \quad B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

où $M = \pi R^2 I$ est le module du moment magnétique de la spire.

Si le rayon R de la spire est très petit, il peut être négligé devant z , on a alors :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{z^3} \quad (20)$$

On retrouve une expression analogue à celle du champ électrique créé par un dipôle sur son axe (*exercice I.4*)

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

C'est la raison pour laquelle on dit qu'une spire, de très faible rayon, parcourue par un courant, constitue un *dipôle magnétique*.

Si on calcule le champ magnétique créé par un tel dipôle, on trouve⁸ un vecteur \vec{B} dont les composantes radiale et tangentielle sont :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{r^3} \cos\theta \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{r^3} \sin\theta \quad (21)$$

Nous avons trouvé dans le cas du dipôle électrique des expressions analogues (ch I § 7.2)

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \cos\theta \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin\theta$$

4.5. Notions élémentaires sur l'aimantation de la matière.

Nous avons expliqué, au premier chapitre, la polarisation électrique de la matière par l'action d'un champ électrique extérieur sur les moments dipolaires des atomes et des molécules qui constituent le milieu. Or, une petite spire, parcourue par un courant I constitue un dipôle magnétique. On pourrait alors, grâce à un raisonnement par analogie, expliquer l'aimantation de la matière par l'existence de moments magnétiques et par leurs interactions avec un champ magnétique extérieur. Nous avons vu au paragraphe 1.4. que, historiquement, Langevin avait expliqué le magnétisme par l'action du champ magnétique sur le mouvement orbital des électrons dans l'atome, mouvement qui correspond aux courants circulaires de la théorie d'Ampère. Cependant, la physique classique ne peut pas donner une explication complète du magnétisme ; il faut alors recourir à la physique quantique. En plus des moments orbitaux, on doit tenir compte des moments de *spin* de l'électron. Or le spin est un concept purement quantique. Le magnétisme sera étudié en troisième année de Licence (S6)

Le diamagnétisme : C'est un phénomène analogue à la polarisation induite, l'action du champ se traduit par l'apparition d'un moment magnétique induit. Ce moment est proportionnel au champ et *s'oppose à lui*, ce qui contraste avec la polarisation électrique.

Le paramagnétisme : Les constituants du milieu (atomes, molécules) possèdent un moment permanent ; mais en raison de l'agitation thermique, le matériau n'est pas aimanté. L'action d'un champ magnétique se traduit par un effet d'orientation des moments et une aimantation du matériau orienté dans le même sens que le champ. Ce phénomène dépend de la température. On peut noter une analogie avec la polarisation dipolaire.

Le ferromagnétisme : Certains matériaux (fer, nickel, cobalt) gardent une aimantation lorsque le champ est supprimé ; ils constituent des aimants. Ce phénomène dépend de la température ; pour chaque matériau ferromagnétique, il existe une température, appelée "température de Curie" T_c , au dessus de laquelle il perd son aimantation et devient paramagnétique. Voici quelques valeurs de T_c :

Fe $\Rightarrow T_c = 770^\circ \text{C}$, Co $\Rightarrow T_c = 1115^\circ \text{C}$, Ni $\Rightarrow T_c = 354^\circ \text{C}$.

N.B : La perméabilité magnétique μ d'un milieu magnétique est supérieure à celle du vide ($\mu > \mu_0$)

⁸ Ce calcul peut être fait en L2 à partir des potentiels vecteurs. Voir le cours d'*Electromagnétisme* S4 [6] §3.2.5

5. THEOREME D'AMPERE.

5.1. Vecteur excitation magnétique.

Comme en électrostatique, on introduit un vecteur "excitation magnétique" \vec{H} tel que :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (22)$$

μ est la perméabilité magnétique du milieu.
Dans le vide on a:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (23)$$

N.B. Le vecteur \vec{H} a été longtemps appelé "champ magnétique" et le vecteur \vec{B} "induction magnétique". Or c'est le vecteur \vec{B} qui est à l'origine de la force qui agit sur une charge q (force de Laplace) ; c'est donc \vec{B} qui est le champ.

5.2. Circulation de l'excitation magnétique le long d'un contour fermé.

Considérons un fil conducteur rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant I . Il crée, à une distance r , un champ magnétique tangent à une ligne de champ et de module (14) :

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

L'excitation magnétique \vec{H} est parallèle à \vec{B} et son module est

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi r}$$

Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil dans des plans perpendiculaires

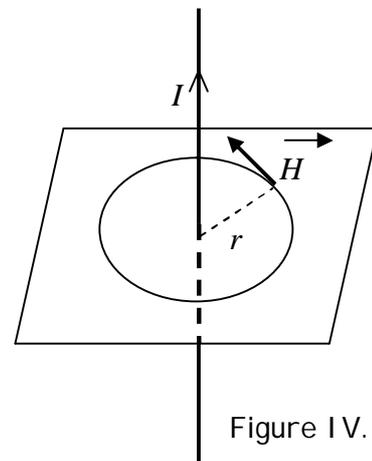


Figure IV. 16

Si on calcule la circulation du vecteur \vec{H} le long d'une ligne de champ, on trouve :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (24)$$

En effet, en remplaçant \vec{H} par sa valeur

$$\oint_C \frac{I}{2\pi r} dl = \frac{I}{2\pi r} \oint_C dl = I$$

Le rayon r du cercle est constant et l'intégrale donne le périmètre du cercle. Ce résultat, trouvé ici dans un cas particulier, est général, le contour C étant quelconque. D'où le théorème d'Ampère :

La circulation du vecteur \vec{H} le long d'un contour fermé C quelconque est égale à la somme algébrique des courants qui se trouvent à l'intérieur de C .

Soit :

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_n I_n \quad (25)$$

En introduisant la densité de courant \vec{J} , on obtient :

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (26)$$

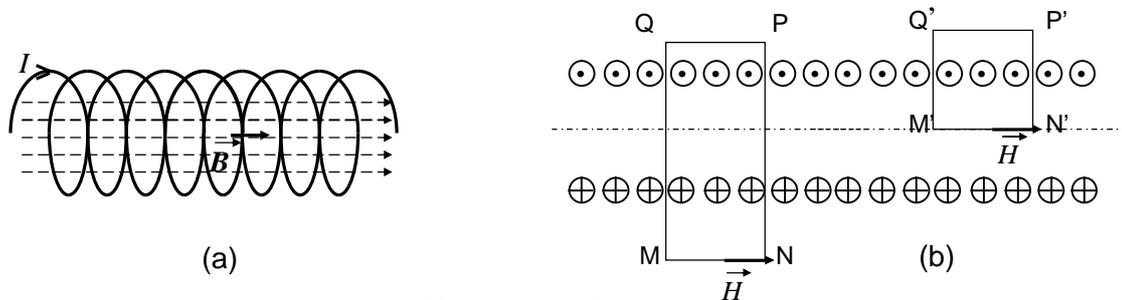
S est une surface quelconque qui s'appuie sur le contour C . C'est la formulation mathématique du théorème d'Ampère.

Remarque : Le théorème d'Ampère équivaut au théorème de Gauss trouvé en électrostatique : dans le premier cas le vecteur excitation \vec{H} est relié aux courants sources \vec{J} , et dans le deuxième, \vec{D} est relié aux charges sources ρ .

5.3. Application : Champ créé par un solénoïde de longueur infinie.

Un solénoïde est constitué d'un fil conducteur enroulé sur un cylindre de longueur L . Chaque tour du fil constitue une spire circulaire de rayon R . Un courant électrique d'intensité I , qui parcourt le fil, entraîne l'apparition, dans l'espace environnant, d'un champ magnétique \vec{B} (figure IV.17.a)

Nous allons utiliser le théorème d'Ampère pour calculer \vec{B} dans le cas d'un solénoïde de longueur infinie. En raison de la symétrie du problème, les lignes de champ sont parallèles à l'axe du solénoïde.



Figures IV. 17

Calcul de \vec{H} à l'extérieur du solénoïde : On choisit un contour rectangulaire MNPQ (figure.IV.17. b). La circulation, le long de ce contour, du vecteur \vec{H} est

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i \quad \text{soit} \quad \vec{H} \cdot \overline{MN} + \vec{H} \cdot \overline{NP} + \vec{H} \cdot \overline{PQ} + \vec{H} \cdot \overline{QM} = \sum_i I_i = 0$$

les 2^{ème} et 4^{ème} termes sont nuls car les deux vecteurs sont perpendiculaires. Par conséquent \vec{H} a la même valeur le long de MN et de PQ. A l'extérieur \vec{H} est uniforme et cela quelles que soient les positions de MN et PQ, il est donc nul comme à l'infini. Calcul de \vec{H} à l'intérieur du solénoïde : On considère, à présent, le contour M'N'P'Q' :

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I \quad \text{soit} \quad \vec{H} \cdot \overline{M'N'} + \vec{H} \cdot \overline{N'P'} + \vec{H} \cdot \overline{P'Q'} + \vec{H} \cdot \overline{Q'M'} = N_1 I$$

où N_1 est le nombre de spires à l'intérieur de ce contour.

Seul le premier terme n'est pas nul ; les 2^{ème} et 4^{ème} sont nuls comme précédemment et le 3^{ème} parce que $\vec{H} = 0$ à l'extérieur du solénoïde. Donc, à l'intérieur du solénoïde, l'excitation magnétique a pour module :

$$H = \frac{N_1}{MN} I \quad \Rightarrow \quad H = nI$$

n est le nombre de spires par unité de longueur. A l'intérieur du solénoïde l'intensité du champ magnétique est

$$B = \mu_0 n I \quad (27)$$

Le calcul de \vec{B} sur l'axe d'un solénoïde, de longueur finie, sera traité en exercice (Ex IV . 10)

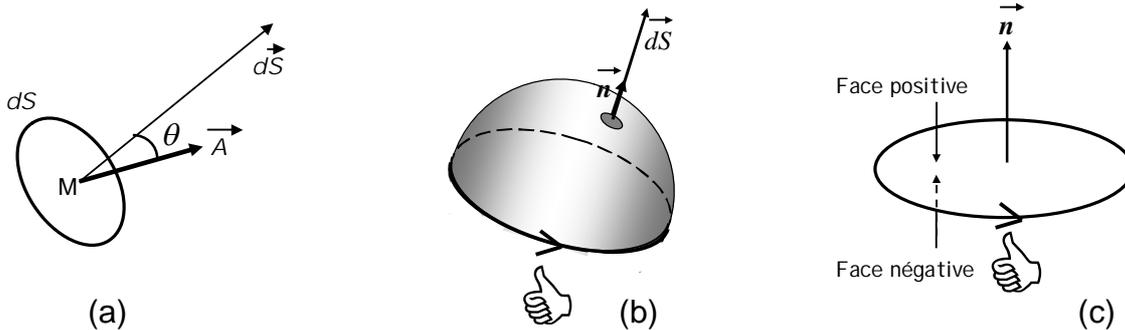
6. FLUX MAGNETIQUE.

6.1. Flux du champ magnétique à travers une surface.

Nous avons défini, au paragraphe 9.1. du premier chapitre, le concept mathématique de " flux d'un vecteur \vec{A} à travers un élément dS d'une surface S ". par la quantité scalaire⁹

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A dS \cos\theta$$

où $d\vec{S} = dS \vec{n}$ et \vec{n} un vecteur unitaire porté par la normale à dS (figure IV.18.a)



Figures IV. 18

Le flux global à travers la surface S est obtenu par intégration :

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (28)$$

Rappelons que, dans le cas d'une surface fermée, la normale est orientée de l'intérieur vers l'extérieur (Voir Ch I § 9.1.).

Lorsque la surface est ouverte (figure IV.18. b), on choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite. La figure IV.18.c représente une spire sur laquelle on a choisi une face positive et une face négative.

En électromagnétisme, on définit le flux du vecteur champ magnétique \vec{B} à travers une surface S par :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (29)$$

Le flux du vecteur champ magnétique Φ appelé " flux magnétique" a , comme nous le verrons au chapitre suivant, une très grande importance en électromagnétisme.

Dans le système MKSA, le flux magnétique est mesuré en "weber " (Wb), le champ magnétique \vec{B} en *weber/m²* (Wb/m²), ou en *tesla* (T).

⁹ Nous avons étudié le flux du vecteur excitation électrique \vec{D} (Ch. I), le flux du vecteur densité électrique \vec{j} qui représente l'intensité I du courant (Ch. III) et ici le flux magnétique Φ . De même en hydraulique le débit d'une conduite représente le flux du vecteur vitesse \vec{v} à travers une section de cette conduite..

6.2. Equation de conservation du flux magnétique.

La topographie d'un champ magnétique, qu'il soit créé par des aimants ou des courants électriques, montre que, dans tous les cas, les lignes de champ sont des courbes fermées.

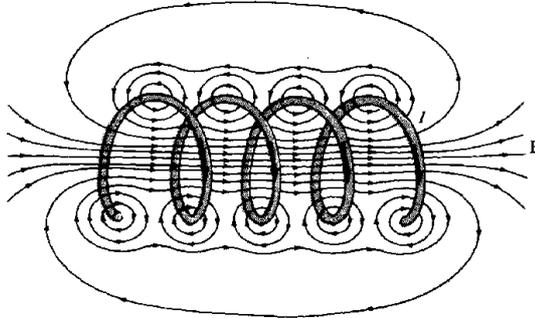


Figure IV. 19 Topographie du champ magnétique créé par un fil conducteur plié en hélice

www.epsic.ch/.../Theorie/matmag/Image370a.gif

Il en résulte que le flux du vecteur \vec{B} à travers une surface S fermée est nul. Par conséquent, le "flux magnétique" Φ est conservatif, ce qui se traduit mathématiquement par

$$\Phi = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (30)$$

C'est l'une des quatre équations de Maxwell écrite sous forme intégrale.

La loi de conservation du flux magnétique permet de montrer que :

Le flux du vecteur champ magnétique \vec{B} à travers toute surface s'appuyant sur un même contour est le même.

En effet, considérons un contour C avec le sens de parcours indiqué sur la figure IV.20 et, dans une première étape, deux surfaces S_1 et S_2 placées de part et d'autre de C et s'appuyant sur ce contour. L'ensemble formé par S_1 et S_2 constitue une surface fermée S . En orientant cette surface vers l'extérieur, la loi de conservation du flux donne :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad (31)$$

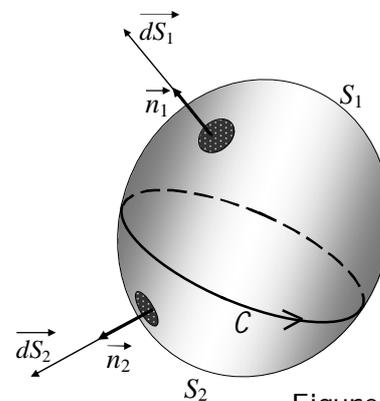


Figure IV. 20

Φ , Φ_1 , et Φ_2 désignent respectivement les flux qui traversent les surfaces S , S_1 et S_2 .

L'expression (31) montre que :

$$\Phi_1 = - \Phi_2$$

Le signe (-) provient de la convention d'orientation de la normale. Le flux est le même dans les deux cas.

Considérons à présent une troisième surface S'_1 qui s'appuie sur C et qui constitue avec S_2 une surface fermée S' , le même raisonnement aboutirait à l'égalité :

$$\Phi'_1 = - \Phi_2 \quad \text{Donc :} \quad \Phi'_1 = \Phi_1$$

6.3. Expression du travail des forces en fonction du flux coupé.

Considérons d'abord le cas particulier du circuit représenté sur la figure IV.21 : Une barre conductrice MN se déplace sur des rails parallèles conducteurs. L'ensemble est alimenté par une source de courant continu qui débite à travers le circuit, ainsi formé, un courant I . Ce circuit est placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à la barre MN et faisant un angle θ avec la normale au plan du circuit.

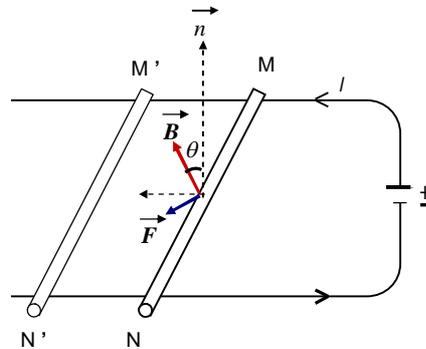


Figure IV. 21

Le conducteur MN, est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F} = I \overline{MN} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| = I |\overline{MN}| |\vec{B}| \quad \text{soit} \quad F = IMNB \quad (32)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire \overline{dM} de MN, le travail de la force \vec{F} est

$$dW = \vec{F} \cdot \overline{dM} \quad \text{soit} \quad dW = F dM \cos \theta \quad (33)$$

En remplaçant dans (33) F par sa valeur trouvée en (32), il vient :

$$dW = IMN dM B \cos \theta \quad \text{soit} \quad dW = I dS B \cos \theta$$

dS est la surface balayée par le conducteur MN au cours de ce déplacement.

Si on fait intervenir le flux coupé par le conducteur :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad d\Phi = B dS \cos \theta$$

On a :

$$dW = I d\Phi \quad (34)$$

\vec{n} est un vecteur unitaire porté par la normale à la surface balayée.

Ce résultat, trouvé dans un cas particulier, est général.

Considérons un circuit électrique, parcouru par un courant continu I et placé dans un champ magnétique \vec{B} . Chaque élément $d\vec{l}$ du circuit est soumis à une force de Laplace :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (35)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire \overrightarrow{dM} de l'élément \overrightarrow{dl} , le travail de la force \overrightarrow{F} est

$$dW = d\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dM}$$

Soit avec (35) :

$$dW = (I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{dM}$$

En utilisant les propriétés du produit mixte, il vient :

$$dW = I (\overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{dl}) \cdot \overrightarrow{B}$$

Or le produit vectoriel $(\overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{dl}) = \overrightarrow{dS}$ représente l'aire du parallélogramme balayé par \overrightarrow{dl} .

Donc

$$dW = I \overrightarrow{dS} \cdot \overrightarrow{B} \quad \text{soit} \quad dW = I d\Phi$$

Ainsi :

Lorsqu'un élément de courant se déplace dans un champ magnétique, le travail de la force, qui s'exerce sur lui, est égal au produit du courant par le flux coupé.

6.4. Expression du travail en fonction de la variation du flux à travers un circuit.

On retrouve la même expression dans le cas d'un circuit électrique fermé, de forme quelconque, parcouru par un courant I .

$$dW = I d\Phi$$

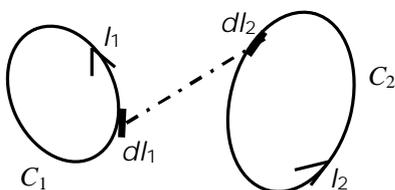
$d\Phi$ désigne la variation du flux magnétique. Cette variation du flux peut être due

- soit à une variation de la surface du circuit,
- soit à une variation du champ,
- soit à une variation de l'angle θ .

6.5. Induction mutuelle de deux circuits.

Considérons deux circuits C_1 et C_2 parcourus respectivement par les

courants I_1 et I_2 . Le flux magnétique Φ_1 envoyé par C_1 à travers C_2 est :



$$\Phi_1 = M I_1 \quad (36)$$

De même le flux magnétique Φ_2 envoyé par C_2 à travers C_1 est :

$$\Phi_2 = M I_2 \quad (37)$$

Figure IV. 22

M est le *coefficient d'induction mutuelle* ou *l'inductance mutuelle*

6.6. L'inductance d'un circuit électrique.

Considérons un circuit électrique fermé parcouru par un courant I . Ce courant crée dans le voisinage un champ magnétique \overrightarrow{B} proportionnel à I . Le flux de ce

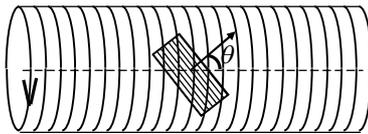
champ à travers le circuit, appelé flux propre, est proportionnel à \vec{B} , donc à I . On peut alors écrire :

$$\Phi = L I \quad (38)$$

L est " l'inductance " du circuit électrique.

M et L sont mesurés, dans le système MKSA, en *henry* (H).

Exercice IV.5. On considère un solénoïde, dont la longueur l est très grande par rapport



au rayon R des spires de façon à l'assimiler à un solénoïde infini. Il comporte N spires de surface S et il est parcouru par un courant I . Une petite bobine de section S' , comportant N' spires et parcourue par un courant I' , est placée comme l'indique la figure. Son axe fait un angle θ avec celui du solénoïde

1°) Calculer le coefficient d'induction mutuelle M de ces deux bobines.

2°) On enlève la petite bobine et on ne considère que la première. Calculer son coefficient de self induction L .

A. N : $l = 25 \text{ cm}$, $R = 2 \text{ cm}$, $N = 500$, $S' = 3,15 \text{ cm}^2$, $N' = 50$, $\theta = 60^\circ$

Solution IV.5. 1°) Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde a pour intensité :

$$B = \mu_0 \frac{N I}{l}$$

Le flux de ce champ à travers la bobine est :

$$\Phi = N' B S' \cos \theta = \mu_0 \frac{N I}{l} N' S' \cos \theta = M I \quad \Rightarrow \quad M = \mu_0 \frac{N}{l} N' S' \cos \theta$$

A.N : $M = 1,96 \cdot 10^{-5} \text{ H}$

2°) Le flux magnétique envoyé par le solénoïde à travers ses propres spires est :

$$\Phi = N B S = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} S \quad \Rightarrow \quad L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

Ainsi :

Le coefficient de self induction ou auto induction d'une bobine de grande longueur l comportant N spires de surface S est :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad (39)$$

6.7. Calcul des forces appliquées à un circuit électrique.

On peut calculer la résultante des forces appliquées à un circuit électrique fermé parcouru par un courant I . Nous avons trouvé, en (34), que le travail dW de la force électromagnétique \vec{F} au cours d'un déplacement élémentaire est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{M} = I d\Phi$$

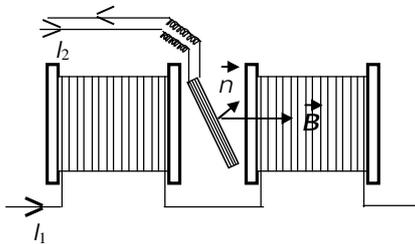
où $d\Phi$ est la variation du flux magnétique au cours de ce déplacement. On peut alors déterminer, comme en électrostatique, les composantes de \vec{F} . En coordonnées cartésiennes on a :

$$F_x = I \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ; \quad F_y = I \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ; \quad F_z = I \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (40)$$

Dans le cas d'un système en rotation autour d'un axe $\vec{\Delta}$, le moment des forces par rapport à cet axe est :

$$M_{\Delta} = I \frac{d\Phi}{d\theta} \quad (41)$$

Exercice IV.6. Un élément moteur électrodynamique comporte une bobine fixe, représentée sur la figure en deux parties, d'inductance L_1 , parcourue par un courant I_1 et une bobine, d'inductance L_2 , mobile autour d'un axe Δ , parcourue par un courant I_2 .



L'axe Δ est perpendiculaire en O au plan de la figure. Le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines est M .

1°) Calculer le couple moteur Γ_m qu'exerce la bobine fixe sur la bobine mobile.

2°) Le couple moteur est équilibré par un couple de rappel Γ_r dû à un ressort de constante C .

Calculer, à l'équilibre, l'angle de rotation θ de l'équipage mobile.

Solution IV. 6. 1°) Le couple moteur est d'après (41) $\Gamma_m = M_{\Delta} = I_2 \frac{d\Phi}{d\theta}$

Le flux envoyé par la bobine fixe à travers la bobine mobile est donné par (36) : $\Phi = M I_1$

D'où :

$$\Gamma_m = \frac{dM}{d\theta} I_1 I_2$$

En effet, au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$, seul le coefficient d'induction mutuelle M varie, les selfs L_1 et L_2 restent constantes.

2°) A l'équilibre, ce couple moteur est équilibré par le couple de rappel dû au ressort :

$$\Gamma_r = C \theta$$

d'où

$$\theta = \frac{1}{C} \frac{dM}{d\theta} I_1 I_2$$

N.B. Cet élément moteur est utilisé dans les wattmètres, pour les mesures de puissances. La bobine fixe est placée en série, comme un ampèremètre, avec le récepteur et la bobine mobile en dérivation comme un voltmètre (**Exercice VI.14**).

Annexe 2

Le champ magnétique terrestre.

Dès l'antiquité, les chinois avaient remarqué l'existence d'un champ magnétique au voisinage de la Terre et ont construit, au V^{ème} siècle, les premières boussoles à aiguille aimantée¹⁰.

Le champ magnétique terrestre est équivalent à un champ qui serait créé par un immense barreau aimanté dont le milieu serait situé près du centre de la terre

Une aiguille aimantée (boussole) placée au voisinage de la terre s'oriente approximativement vers le pôle nord géographique. Les lignes du champ terrestre sortent du pôle nord magnétique dans l'hémisphère sud et reviennent au pôle sud de l'aimant situé dans l'hémisphère nord. Ainsi, en réalité, c'est le pôle sud magnétique qui se trouve, comme le montre la figure 1, près du pôle nord géographique et non l'inverse. Cette erreur, introduite au début de l'histoire du magnétisme, n'a pas été corrigée.

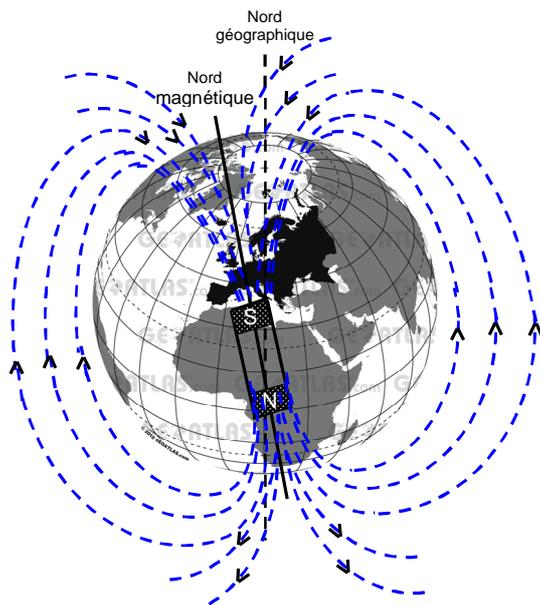


Figure 1.

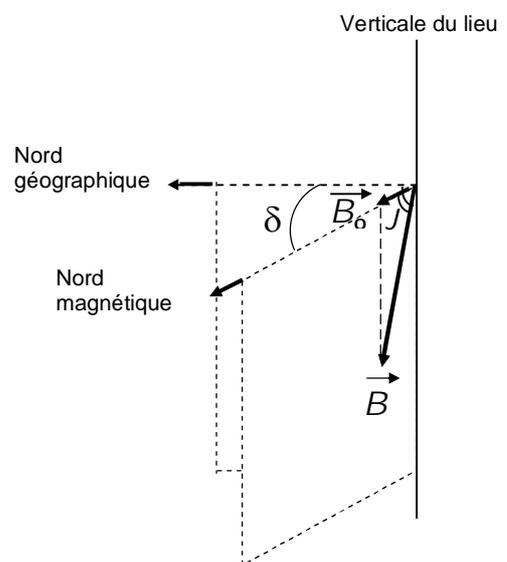


Figure 2.

La valeur du champ magnétique terrestre \vec{B} en un lieu donné est déterminé à partir des mesures de sa composante horizontale \vec{B}_0 , la déclinaison δ et l'inclinaison J (figure 2).

La composante horizontale B_0 est la projection du champ magnétique terrestre \vec{B} sur un plan perpendiculaire à la verticale du lieu considéré.

La déclinaison magnétique δ est l'angle formé par les plans méridiens géographique et magnétique. C'est l'erreur que l'on commet en repérant le nord géographique à l'aide d'une boussole.

L'inclinaison magnétique J est l'angle formé par \vec{B} et \vec{B}_0

Ces trois grandeurs, \vec{B}_0 , δ et J varient en fonction du lieu considéré, et, en un même lieu, elles évoluent en fonction du temps. Des mesures effectuées à Tamanrasset¹¹ ont donné :

$$\begin{array}{lll} \delta = -2^\circ, & J = 27^\circ 22', & B = 37\,345 \text{ nT en } 1994 \\ \delta = -1^\circ, & J = 27^\circ 15', & B = 37\,560 \text{ nT en } 2006 \end{array}$$

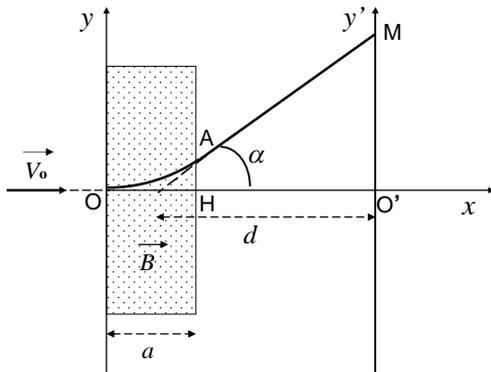
L'existence du champ magnétique terrestre assure la protection de la vie sur Terre en déviant les particules à très hautes énergies.

¹⁰ Michel Soutif : Histoire de la physique, pages 124 à 128, Ed. Focus 2003

¹¹ Observations magnétiques Bulletin N° 25

Exercices : Chapitre IV

Exercice IV. 7. Déflexion magnétique.



Un électron, de masse m portant une charge électrique $-e$, animée d'une vitesse constante V_0 parallèle à l'axe \vec{ox} (figure ci-contre), entre dans un champ magnétique B parallèle à oz et qui reste uniforme dans une zone rectangulaire de largeur a . En dehors de cette zone le champ est nul.

1°) Quel est le sens du champ magnétique dans la figure ci-contre.

2°) Déterminer la trajectoire de la particule dans le champ magnétique ($0 < x < a$), calculer son rayon R

3°) A la sortie du champ la particule poursuit son trajet et aboutit, en M, sur l'écran d'un oscilloscope cathodique. Calculer la déviation α de la trajectoire de la particule et la position, $y' = O'M$, du spot sur l'écran

N.B. Les ordres de grandeur des paramètres du problème permettent de remplacer, dans les calculs, la longueur de l'arc OA par la distance a .

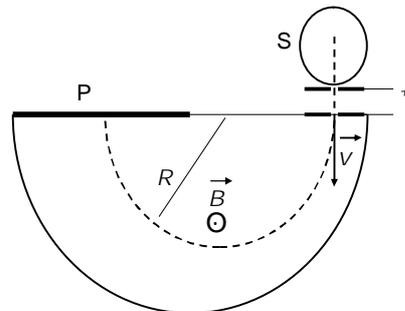
Les vitesses considérées sont faibles vis-à-vis de celle de la lumière

A.N. , $V_0 = 3 \cdot 10^6$ m/s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,
 $B = 10^{-3}$ T, $a = 5$ mm, $d = 5$ cm.

Exercice IV. 8. Spectromètre de Dempster.

Le spectromètre de Dempster, représenté sur la figure ci-contre, comporte une source d'ions S. Ces ions transitent, à travers deux fentes fines, dans la région I où ils sont accélérés par une différence de potentiel V . Dans le cas considéré ici des ions $^{79}\text{Br}^-$ sont accélérés par une d.d.p $V = 2 \cdot 10^3$ Volts. Ils pénètrent, avec une vitesse \vec{V} dans la région II où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à la vitesse (voir figure).

Après avoir décrit une trajectoire, représentée en pointillés sur la figure, ils tombent sur une plaque photographique P où ils laissent une trace.



1°) Quelle est la nature du mouvement des ions dans les régions I et II. En déduire leur vitesse à la sortie de la région I, sachant que la vitesse initiale est nulle.

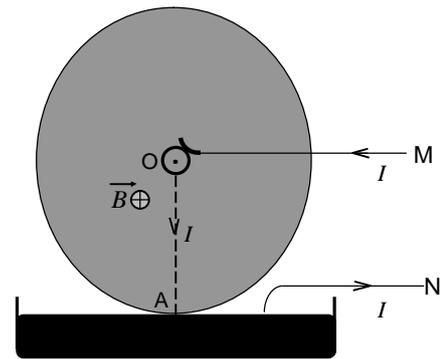
2°) Quelle intensité faut-il donner à \vec{B} pour que ces ions décrivent une trajectoire circulaire de rayon $R = 57.24$ cm.

3°) Quelle est la variation ΔR du rayon de la trajectoire circulaire lorsque les ions $^{79}\text{Br}^-$ sont remplacés par des ions $^{81}\text{Br}^-$.

On donne : $B = 0.1$ Tesla, $m_{79} = 1.3104 \cdot 10^{-25}$ kg et $m_{81} = 1.3436 \cdot 10^{-25}$ kg

Exercice IV. 9. Roue de Barlow

Un disque métallique circulaire, de rayon R , peut tourner librement autour de son axe perpendiculaire en O au plan du disque. Celui-ci est placé dans un champ magnétique uniforme parallèle à l'axe et orienté comme l'indique la figure. L'extrémité inférieure A du disque est en contact avec la surface libre d'un bain de mercure contenu dans un récipient. L'ensemble est parcouru par un courant continu I . Celui-ci arrive en M , traverse le disque, grâce à un frotteur qui assure le contact avec l'axe de rotation, passe à travers le mercure, puis il revient à la source en N .



On suppose que, dans le disque, le courant électrique I circule en ligne droite entre O et A ¹².

- 1°) Quel est le sens de rotation du disque ?
- 2°) Calculer le moment, par rapport à l'axe, de la force de Laplace qui s'exerce sur le disque.
- 3°) Quelle est la puissance du moteur, ainsi constitué, sachant que le disque effectue N tours par minute.

A.N. $R = 10 \text{ cm}$, $I = 5 \text{ A}$, $B = 0,5 \text{ T}$, $N = 120 \text{ tours/mn}$

Exercice IV. 10. Solénoïde de longueur finie.

On considère un solénoïde de longueur finie L et comportant N spires de rayon R et parcourues par un courant I .

- 1°) Calculer le champ magnétique \vec{B} en un point M de l'axe $\overrightarrow{x'x}$ du solénoïde en fonction du nombre n de spires par unité de longueur, de l'intensité du courant I et des angles θ_1 et θ_2 sous lesquels on voit, depuis le point M , les deux spires terminales du solénoïde.
- 2°) Retrouver la valeur du champ magnétique en M dans le cas d'un solénoïde de longueur infinie.

Exprimer le champ magnétique \vec{B}_o en fonction de μ_0 , n , I , L et R lorsque le point M se trouve en O au milieu du solénoïde

- 3°) Pour quelle valeur de R/L a-t-on une précision de 1% lorsqu'on assimile la valeur \vec{B}_o du champ en O à celle $\vec{B}_{o\infty}$ obtenue dans le cas d'un solénoïde de longueur infinie.

4°) Le solénoïde considéré comporte $N = 300$ spires, de rayon $R = 1 \text{ cm}$, parcourues par un courant $I = 2 \text{ A}$. Sa longueur est $L = 16 \text{ cm}$. Calculer la valeur du champ en O , milieu du solénoïde et origine de l'axe $\overrightarrow{x'x}$.

Tracer la courbe $B(x)$ qui représente la variation du champ le long de l'axe $\overrightarrow{x'x}$.

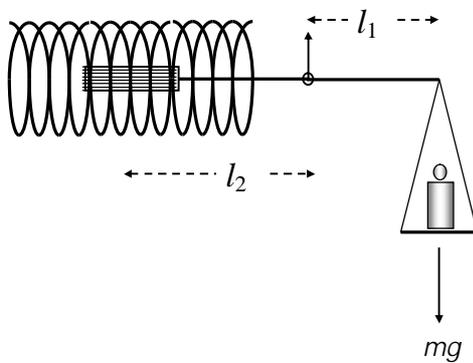
Exercice IV. 11. Spire carrée.

- 1°) Calculer le champ créé par un fil rectiligne de longueur L finie, parcouru par un courant I , en un point M situé à une distance D du fil.
- 2°) En déduire le champ magnétique sur l'axe d'une spire carrée, de côté $L = 2a$, parcourue par un courant I . Quelle est la valeur de ce champ au centre de la spire ?

¹² Pour le calcul exact voir Perez page 243. Il montre que le résultat est indépendant de la topographie des lignes de courant.

Exercice IV.12. Electro-dynamomètre de Pellat.

La balance électrodynamique (électrodynamomètre de Pellat), représentée sur la figure ci-dessous, sert à la mesure de l'ampère absolu. L'un des bras de la balance est solidaire d'une petite bobine placée à l'intérieur d'un solénoïde. Ce solénoïde, dont l'axe est horizontal, com-



-porte N spires de surface S parcourues par un courant I ; sa longueur L est très grande par rapport au diamètre des spires. La petite bobine, constituée de N' spires de surface S' , est parcourue par le même courant I . Son axe est, lorsque la balance est équilibrée, perpendiculaire à celui du solénoïde.

Quelle masse doit-on placer sur le plateau de la balance pour mesurer, à l'équilibre, un courant de 1 ampère ?

AN : $N = 10\,000$ spires , $N' = 100$ spires ,
 $S = 10\text{ cm}^2$, $l = 20\text{ cm}$

Chapitre V

L'INDUCTION ELECTROMAGNÉTIQUE

Nous n'avons considéré, jusqu'à présent, que des régimes stationnaires : en électrostatique et dans le cas des courants continus. La variation, en fonction du temps, des charges sources entraîne un phénomène de propagation des champs, il en résulte des effets de capacité entre conducteurs et une modification du théorème d'Ampère¹. Lorsque cette variation est lente, c'est-à-dire lorsque les dimensions des circuits électriques sont très faibles par rapport aux longueurs d'onde qui interviennent dans la propagation², on peut considérer que le courant électrique est, à un instant donné, le même le long de tout le circuit. En outre, les effets de capacité sont localisés à la surface des armatures des condensateurs : c'est le cas des "régimes quasi stationnaires" que nous allons considérer dans les deux chapitres qui suivent.

1. LES PHENOMENES D'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE.

Les phénomènes d'induction électromagnétique ont été découverts en 1831 simultanément par Faraday et Henry. Cette découverte a été à l'origine de l'invention des génératrices à courants continus et à courants alternatifs et, par conséquent, de la production de l'énergie électrique.

1. 1. Mise en évidence des phénomènes d'induction.

Ce phénomène d'induction est mis en évidence à partir de la réalisation de quelques expériences simples :

Expérience 1 :

On prend une bobine, formée par un fil conducteur déformable, placée dans un champ magnétique constant et reliée à un galvanomètre à zéro central (Figure V.1).

On constate que la déformation du fil entraîne l'apparition d'un courant dans le galvanomètre. Ce courant s'annule dès que cesse la déformation et dépend de la vitesse avec laquelle on effectue la déformation.

On redonne au fil sa forme initiale, un courant circule dans le sens inverse, tant que dure cette opération.

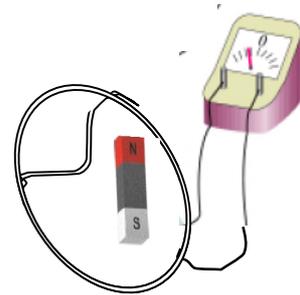


Figure V.1

¹ Le théorème de Maxwell Ampère, qui intervient en régimes variables, est étudié en S4. Quant aux lignes à constantes réparties, elles sont au programme du S5.

² Les courants alternatifs industriels sont produits à la fréquence $f = 50$ Hz, les longueurs d'onde correspondantes sont égales à $\lambda = c / f = 3.10^8 / 50 = 6000$ km. Les dimensions des circuits électriques étant nettement inférieures à cette valeur, le phénomène de propagation peut être négligé. Aux Etats Unis, les fréquences industrielles sont égales à 60 Hz.

Expérience 2 :

La figure V.2 représente une bobine indéformable reliée à un galvanomètre. Si on approche un aimant, le galvanomètre dévie et met en évidence la circulation d'un courant dans le circuit. Ce courant a un sens tel que la bobine présente une face Nord N' au pôle nord N de l'aimant. Ainsi les forces électromagnétiques, créées par le courant induit, s'opposent au mouvement de l'aimant. Dès que le mouvement cesse, le courant induit s'annule.

Si on éloigne l'aimant le courant circule dans le sens inverse.

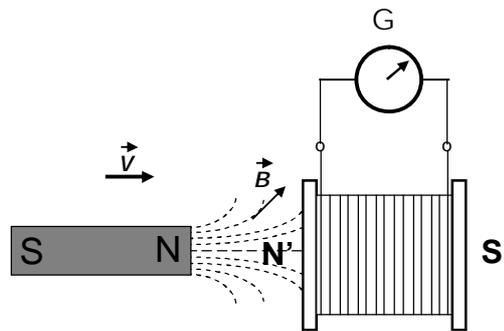


Figure V.2

Cette expérience peut être réalisée en remplaçant l'aimant par une bobine parcourue par un courant.

Expérience 3 :

On reprend l'expérience précédente avec deux bobines montées comme le montre la figure V.3. La première est reliée au galvanomètre et la seconde est placée en série avec un générateur, un rhéostat et un interrupteur. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, un courant apparaît dans le galvanomètre, puis s'annule. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur le courant circule dans le sens contraire.

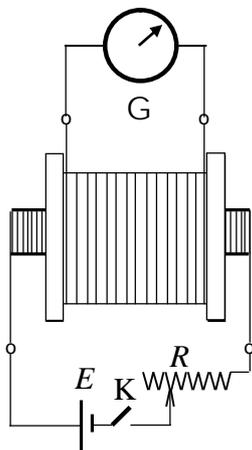


Figure V.3

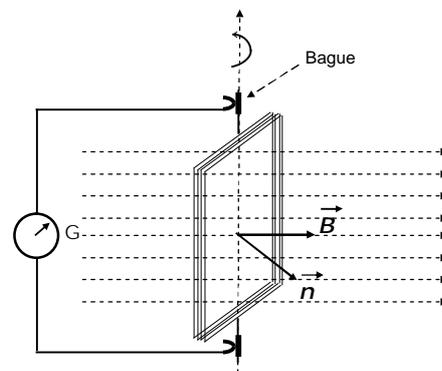


Figure V.4

Expérience 4 :

Un cadre rectangulaire, constitué de N spires conductrices, peut tourner librement autour d'un axe verticale dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} (figure V.4). Ses deux extrémités sont reliées à des bagues solidaires de l'axe de rotation. Sur ces bagues viennent frotter deux électrodes (balais) qui constituent les extrémités d'un circuit comportant un galvanomètre G . La rotation du cadre entraîne l'apparition d'un courant dans le galvanomètre. Le sens du courant induit est tel que les forces qu'il crée s'opposent à la rotation du cadre.

1. 2. Lois de l'induction.

Toutes ces expériences ont mis en évidence l'apparition d'un courant dans un circuit qui ne comporte aucun générateur. Ces courants résultent de la naissance d'une force électromotrice induite e . Selon le cas, on remarque que le sens et la grandeur du courant dépendent de la variation, en fonction du temps,

- de la surface du circuit (expérience 1).
- du champ magnétique dans lequel est plongé le circuit (expériences 2 & 3).
- de l'orientation du circuit par rapport au champ magnétique (expérience 4).

Par conséquent :

1°) Chaque fois que le flux magnétique Φ , qui traverse un circuit, varie, une force électromotrice e prend naissance dans le circuit. Sa durée Δt est égale à celle de la variation du flux $\Delta\Phi$.

2°) Le sens du courant induit est tel que les forces électromagnétiques, qui en résultent, s'opposent à la cause qui a créé ce courant. C'est la loi de Lenz.

3°) La force électromotrice induite, e , est égale et opposée à la vitesse de variation du flux magnétique à travers la surface du circuit et s'écrit :

$$e = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (1)$$

La f.é.m instantanée est :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

Exercice V.1. On considère le dispositif décrit dans l'expérience 4 et représenté sur la figure V.4. Le cadre, de longueur $L = 12$ cm et de largeur $l = 6$ cm, comporte $N = 250$ spires. Le champ magnétique, constant et uniforme, a pour intensité $B = 0,1$ tesla. Le cadre est initialement perpendiculaire au champ ($\theta = (\vec{n}, \vec{B}) = 0$), puis on lui impose une brusque rotation durant $\Delta t = 0,2$ s, θ passe alors de 0 à π .

1°) Calculer la valeur moyenne de la force électromotrice induite.

2°) La résistance du circuit est $R = 10 \Omega$, calculer la quantité d'électricité transportée, à travers ce circuit, pendant la durée de la variation du flux.

Solution V.1. 1°) Lorsque θ varie de 0 à π , le flux magnétique varie de Φ_M à $-\Phi_M$

$$\Delta\Phi = -2\Phi_M = -2NSB = -0,36 \text{ Wb}$$

Il en résulte une force électromotrice induite, dont la valeur moyenne est :

$$e_m = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1,8 \text{ V}$$

2°) La quantité d'électricité transportée pendant un temps dt est :

$$dq = i(t) dt \quad \text{où} \quad i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad dq = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = - \frac{1}{R} d\Phi$$

D'où :

$$\Delta q = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{2\Phi_M}{R} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ Cb}$$

La quantité d'électricité transportée ne dépend pas de la durée de la variation du flux.

2. LOI DE LENZ-FARADAY.

Nous avons déjà vu, au chapitre IV, qu'un courant électrique peut engendrer un champ magnétique. D'un autre côté, les expériences, que nous venons de décrire, montrent qu'un champ magnétique peut induire, sous certaines conditions, un courant dans un circuit électrique. La loi de Faraday donne le module de la force électromotrice induite e et la loi de Lenz précise son signe.

Nous allons, dans ce qui suit, démontrer la loi de Lenz-Faraday dans un cas particulier.

2. 1. Cas d'un circuit fermé placé dans un champ constant et uniforme.

On considère un circuit fermé, formé d'une barre métallique MN qui se déplace sur un rail conducteur en U (figure V.5), placé dans un champ magnétique constant uniforme et perpendiculaire au plan du circuit. Il est possible de retrouver la loi de Lenz-Faraday à partir de cet exemple.

La tige conductrice MN se déplace, dans le champ \vec{B} à la vitesse \vec{v} . Il en résulte un déplacement de charges électriques, le long de la tige, à la vitesse \vec{v}_q . La vitesse d'une charge q par rapport au champ est :

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}_q \quad (3)$$

Elle est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q (\vec{V} \times \vec{B}) = q ((\vec{v} + \vec{v}_q) \times \vec{B}) \quad (4)$$

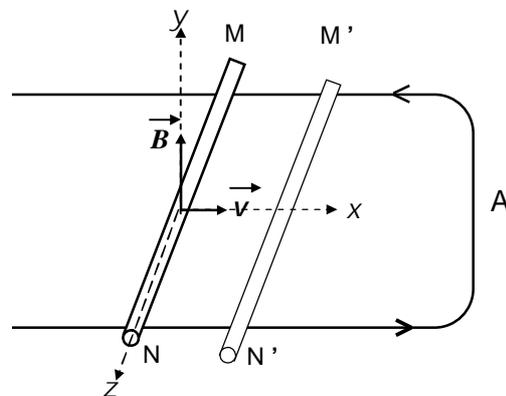


Figure V.5

Lors d'un déplacement \vec{dz} de la charge q à travers la tige, le travail de la force \vec{F} est :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dz} = q ((\vec{v} + \vec{v}_q) \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} \quad (5)$$

Or \vec{v}_q est parallèle à \vec{dz} par conséquent :

$$dW = q (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} \quad (6)$$

Ce travail équivaut à celui qui est produit par une force électromotrice élémentaire "de" telle que :

$$dW = q de \quad (7)$$

Avec (6) et (7) on obtient :

$$de = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} \quad (8)$$

\vec{v} est la vitesse de déplacement de la tige MN.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (9)$$

dx est le déplacement élémentaire de la tige le long des rails. L'équation (8) devient :

$$de = \frac{1}{dt} [(\vec{dx} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz}] \quad \text{soit} \quad de = - \frac{1}{dt} [(\vec{dx} \times \vec{dz}) \cdot \vec{B}]$$

La force électromotrice qui prend naissance aux extrémités de la tige mobile est

$$e = - \frac{1}{dt} [(\vec{dx} \times \vec{l}) \cdot \vec{B}] \quad (10)$$

En introduisant le flux coupé par la tige au cours de son déplacement :

$$d\Phi = (\vec{dx} \times \vec{l}) \cdot \vec{B},$$

il vient :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (11)$$

La loi de Lenz- Faraday est démontrée, ici, dans un cas particulier, mais elle est valable dans tous les cas.

2. 2. Champ électromoteur.

L'expression (4) de la force qui met les charges en mouvement:

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{peut s'écrire} \quad \vec{F} = q \vec{E}_m \quad (12)$$

Où

$$\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B} \quad (13)$$

est le *champ électromoteur*.

Comme dans le cas des générateurs, étudiés au chapitre III, on introduit un champ électromoteur qui est à l'origine de la force électromotrice.

Calculons la circulation du champ électromoteur le long d'un contour fermé. On prend comme contour C le circuit de la figure V.5, constitué de la tige MN et du conducteur en U.

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \int_M^N (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dz} + \int_{NAM} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

La dernière intégrale est nulle car la vitesse est nulle et avec (8), on peut écrire :

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \int_M^N de = e$$

La circulation du champ électromoteur le long de C est égale à e : elle n'est pas nulle, donc le champ électromoteur ne dérive pas d'un potentiel.

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} \quad (14)$$

D'autre part, on sait que le champ électrostatique \vec{E}_s dérive d'un potentiel, soit

$$\oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0 \quad (15)$$

Si on considère le champ électrique total :

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$$

on a, avec (14) et (15)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = e \quad (16)$$

2. 3. Loi de Lenz-Faraday en fonction de la vitesse.

On peut également obtenir l'expression de la f.é.m. induite en faisant apparaître la vitesse de déplacement de la tige :

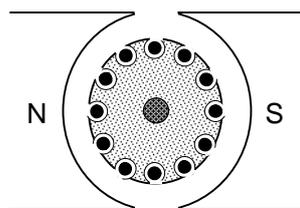
$$e = \frac{IBdx}{dt} = IB \frac{dx}{dt} = Blv \quad (17)$$

Le signe de la force électromotrice e est donné par la loi de Lenz. La figure V.5 montre que le sens du courant est tel que la force F qu'il crée s'oppose au mouvement.

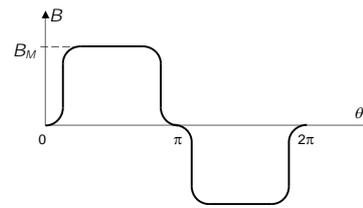
Exercice V. 2. Une dynamo est une machine électrique dont le principe est basé sur l'induction électromagnétique et dont le rôle est de produire des courants continus. Elle comporte :

- un inducteur fixe, le stator, qui crée un champ magnétique B
- un induit, le rotor, qui tourne autour de son axe à raison de n tours par minute.

Le rotor est constitué d'un cylindre en fer doux qui porte sur sa périphérie des encoches où sont logées des barres en cuivre (figure a).



(a)



(b)

Le déplacement de ces barres dans le champ magnétique entraîne, dans chacune d'elles, l'apparition d'une force électromotrice induite e . La variation de l'intensité du champ magnétique dans l'entrefer est représentée sur la figure b. Ces barres alimentent un récepteur électrique par l'intermédiaire d'un collecteur placé sur l'arbre de la machine.

Sachant que la longueur de chaque barre est $L = 25$ cm, le diamètre du rotor est $d = 20$ cm et sa vitesse de rotation $n = 3000$ tours/mn, calculer la f.é.m e , qui prend naissance dans chaque barre, dans la région où $B = B_M = 1$ tesla.

Solution V. 2. : La vitesse de la barre est : $v = 2\pi \frac{n}{60} \frac{d}{2} = 31,4$ m/s

et la f.é.m induite : $e = B L v = 7,85$ volts

2. 4. Equation de Maxwell-Faraday³.

Dans l'exemple précédent (§.2.1) C est un circuit électrique dont la surface varie et qui est placé dans un champ constant. Ce circuit, constitué de conducteurs, existe physiquement.

D'après la loi de Lenz- Faraday (11) on a :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{soit} \quad e = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Avec (16) il vient :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad (18)$$

Considérons, à présent, une région de l'espace où règnent des champs variables \vec{E} et \vec{B} . On choisit un contour quelconque C et une surface arbitraire S s'appuyant sur ce contour. C n'est plus, dans ce cas, un circuit électrique, c'est une courbe fermée imaginaire. Comme S ne dépend pas ici du temps, l'équation (18) s'écrit alors :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \quad (19)$$

C'est l'équation de Maxwell-Faraday.

3. MUTUELLE INDUCTION ET SELF INDUCTION.

Nous avons défini au chapitre IV § 6.5 l'induction mutuelle M entre deux circuits électriques C_1 et C_2 parcourus respectivement par des courants i_1 et i_2 . Considérons le dispositif représenté sur la figure V.6. Les deux circuits étant immobiles, le galvanomètre indique $i_2=0$. Fermons l'interrupteur K , un courant i_1 va circuler dans le circuit C_1 , celui-ci envoie, à travers C_2 , un flux magnétique :

$$\Phi = M i_1$$

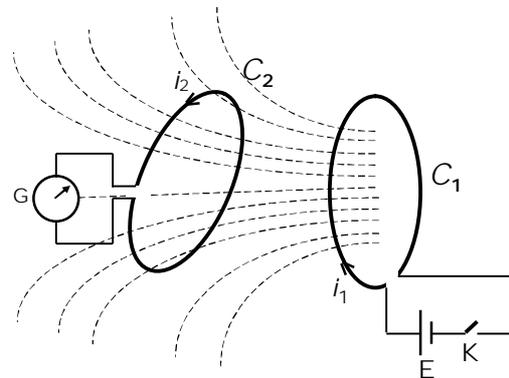


Figure V.6

Au cours du temps dt que dure cette fermeture, le courant i_1 passe de 0 à i_{1M} . Il en résulte, à travers C_2 , une variation du flux $d\Phi$ et l'apparition d'une force électromotrice induite :

$$e_2 = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (M i_1) \quad (20)$$

Comme les deux circuits sont immobiles, M ne dépend pas du temps ; d'où

$$e_2 = - M \frac{di_1}{dt} \quad (21)$$

³ Ce paragraphe n'est pas au programme du module, l'équation de Maxwell Faraday sera établie en S4 [6].

De même, si on fait varier i_2 dans C_2 , on constate, dans C_1 , la naissance d'une f.é.m. induite :

$$e_1 = - M \frac{di_2}{dt} \quad (22)$$

Le coefficient d'induction mutuelle M est le même dans ces deux expressions.

Considérons, à présent, une bobine, montée comme le montre la figure V.7. Comme précédemment, lors de la fermeture ou de l'ouverture de l'interrupteur K, la bobine est traversée par un flux proportionnel à i :

$$\Phi = L i$$

La variation du courant i entraîne l'apparition d'une f.é.m. induite :

$$e = - L \frac{di}{dt} \quad (23)$$

L est l'*inductance* ou le *coefficient de self induction* de la bobine (voir Ch IV § 6.6)

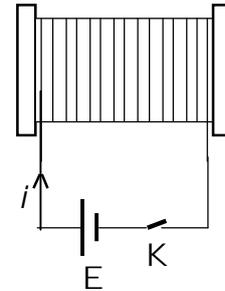
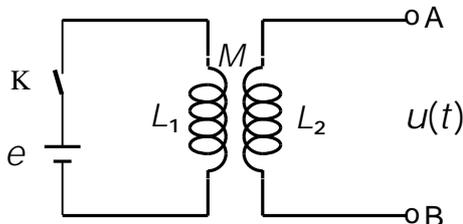


Figure V.7

Exercice V. 3. Induction mutuelle.

La figure ci-dessous représente un dispositif constitué de deux circuits électriques couplés par induction mutuelle. Le premier (circuit primaire) est alimenté par une source de force électromotrice continue e et comporte une bobine d'inductance L_1 . Le secondaire se compose d'une bobine d'inductance L_2 et peut être fermé sur une résistance R placée entre A et B. Le coefficient d'induction mutuelle est M .



- 1°) Ecrire les équations des courants lorsque le secondaire est fermé sur une résistance R .
- 2°) Le secondaire, étant ouvert, on ferme l'interrupteur K. Quelle est la valeur maximale de la f.é.m. induite dans la deuxième bobine ?

A.N : $e = 8\text{V}$, $L_1 = 0,02\text{ H}$, $M = 0,001\text{ H}$.

Solution V. 3. 1°) La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$e = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$Ri_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

2°) Lorsque le circuit est ouvert, $i_2 = 0$ et les équations précédentes deviennent

$$\left. \begin{array}{l} e = L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2 = e_2 = M \frac{di_1}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow e_2 = \frac{M}{L_1} e = 0,4\text{ V}$$

4. APPLICATIONS DES PHENOMENES D'INDUCTION.

4.1. Générateur de courant alternatif.

Une bobine, comportant N spires, tourne autour d'un axe $z'z$ vertical, à la vitesse angulaire ω constante, dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant. Le champ est perpendiculaire à $z'z$ (figure V.8). A l'instant t , la normale \vec{n} à la bobine fait avec \vec{B} un angle $\theta = \omega t$

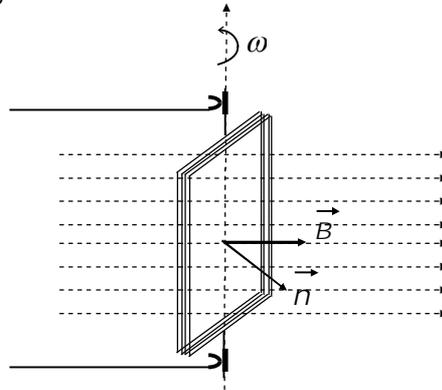


Figure V.8

Le flux magnétique embrassé à cet instant par la bobine est :

$$\Phi(t) = \Phi_M \cos \omega t \quad \text{où} \quad \Phi_M = N S B$$

Il en résulte dans la bobine une f.é.m induite :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_M \sin(\omega t) = E_M \sin(\omega t) \quad (24)$$

C'est le principe de l'alternateur monophasé.

Exercice V. 4. On considère le dispositif décrit dans le paragraphe précédent et représenté sur la figure V.8. Le cadre a une longueur $L = 12$ cm, une largeur $l = 6$ cm, et comporte $N = 250$ spires. Le champ magnétique a pour intensité $B = 0,1$ tesla. Le cadre tourne en effectuant $n = 3000$ tours par minute.

1°) Calculer la force électromotrice induite dans le cadre.

2°) Le cadre est, à présent, fermé, par l'intermédiaire d'un système "bagues balais" décrit plus haut, sur une résistance pure R . Il en résulte un courant électrique dont la valeur instantanée est i . Sachant que le cadre a une résistance r et une self L , trouver, à partir de la loi d'Ohm, la relation entre i , t , R , r et L

On néglige par la suite r et L , calculer le courant i sachant que $R = 100\Omega$.

3°) Trouver l'expression du couple électromagnétique qui s'exerce sur le cadre. Calculer sa valeur moyenne sur une période.

4°) Ce couple est opposé au couple moteur, calculer la puissance moyenne qu'il faut fournir pour maintenir le mouvement du cadre.

Solution V. 4. L'expression de la f.é.m induite a été trouvée en (24)

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = E_M \sin(\omega t)$$

avec $E_M = 2\pi f \cdot N B S$ où $f = 3000 : 60 = 50$ tours par seconde, soit une période :

$$T = 1/f = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s} \quad \text{d'où} \quad E_M = 56,52 \text{ volts}$$

2°) La loi d'Ohm permet d'écrire $e - L \frac{di}{dt} - r i = R i$ où $u(t) = R i$

est la d.d.p aux bornes de R . Si $L \neq 0$ et $r \neq 0$ l'équation précédente devient :

$$e(t) = u(t) = R i$$

$$u(t) = U_M \sin(\omega t) \Rightarrow i(t) = \frac{u}{R} = \frac{E_M}{R} \sin(\omega t) \Rightarrow I_M = \frac{E_M}{R} = 0,56A$$

3°) Le couple électromagnétique qui s'exerce sur le cadre a pour expression:

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} \text{ où } \vec{M} = N i S \vec{n} \text{ est le moment magnétique du cadre.}$$

La valeur de son module à l'instant t est : $\Gamma = N i S B \sin \theta = N S B I_M \sin^2 \omega t$

et sa valeur moyenne est :

$$\Gamma_m = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma dt = N S B I_M \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} N S B I_M = 0.05 Nm.$$

4°) Expression de la puissance instantanée qu'il faut fournir au cadre

$$p(t) = u(t) i(t) = U_M I_M \sin^2 \omega t$$

Valeur moyenne de la puissance.

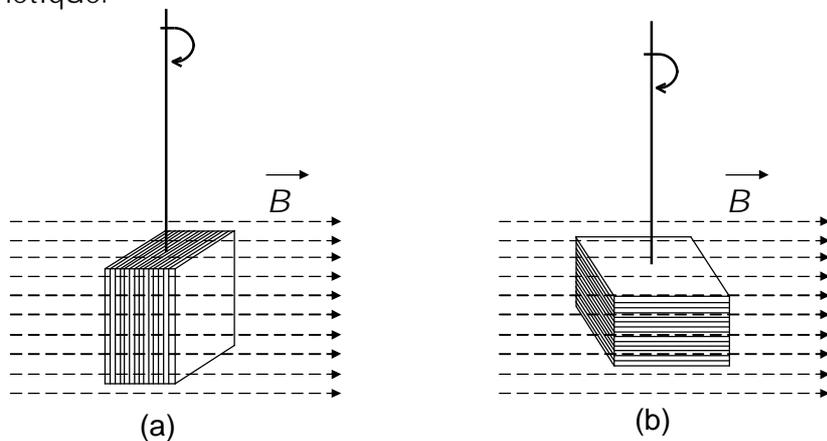
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} U_M I_M = 15.8 \text{ watts}$$

4.2. Courants de Foucault.

Des courants électriques induits, appelés "*courants de Foucault*", prennent naissance dans une masse conductrice

- lorsque cette masse se déplace dans un champ magnétique uniforme et constant,
- ou bien si la masse, étant immobile, le champ varie (voir Exercice VI.12).

Dans le premier cas, ces courants créent des forces qui, en vertu de la loi de Lenz, s'opposent au mouvement. Ce phénomène a pour application le freinage électromagnétique.



Figures V.9

Les courants de Foucault, en circulant dans la masse métallique, dissipent de l'énergie par effet Joule. Cette dissipation d'énergie entraîne un échauffement du métal.

Dans les machines électriques (les transformateurs par exemple), on diminue les pertes par courants de Foucault par l'emploi de circuits magnétiques feuilletés. Les feuilles métalliques (tôles en fer doux) sont séparées les unes des autres par un vernis isolant. Les figures V.9, mettent en évidence l'effet du feuilletage. Une masse tourne dans un champ invariant : si la masse est pleine le freinage est intense. Si la masse est feuilletée et les feuilles perpendiculaires aux lignes de champ, le

freinage diminue légèrement, mais si elles sont parallèles le freinage est nettement atténué.

Par contre les courants de Foucault sont avantageux pour la réalisation de fours à induction.

5. CIRCUIT "R.L".

Le circuit, représenté sur la figure V.10, est constitué d'une résistance R en série avec une bobine d'inductance L . Un inverseur K permet

- Soit de relier R et L à une source de courant continu de force électromotrice e ,
- Soit de les mettre en court circuit.

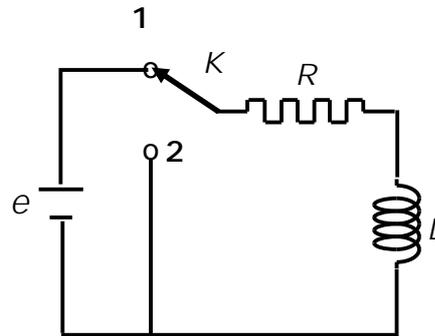


Figure V.10

5.1. Etablissement du courant.

Lorsqu'on met le commutateur sur la position 1, le courant qui traverse la résistance R commence à augmenter. En l'absence de la bobine, le courant atteint rapidement sa valeur d'équilibre $I = \frac{e}{R}$. Toutefois, en présence de la bobine, une

f.é.m d'auto-induction apparaît dans le circuit et, conformément à la loi de Lenz, cette f.é.m s'oppose à l'augmentation du courant. De ce fait, le courant ne s'établit pas instantanément. L'application de la loi des mailles au circuit de la figure V.10 permet d'écrire :

$$Ri + L \frac{di}{dt} - e = 0 \quad (25)$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e}{L} \quad (26)$$

C'est une équation différentielle de premier ordre, du même type que celle déjà obtenue lors de l'étude du circuit RC . La solution de cette équation (voir Ch III), compte tenu de la condition initiale $t = 0, i = 0$, est donnée par :

$$i = \frac{e}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right] \quad (27)$$

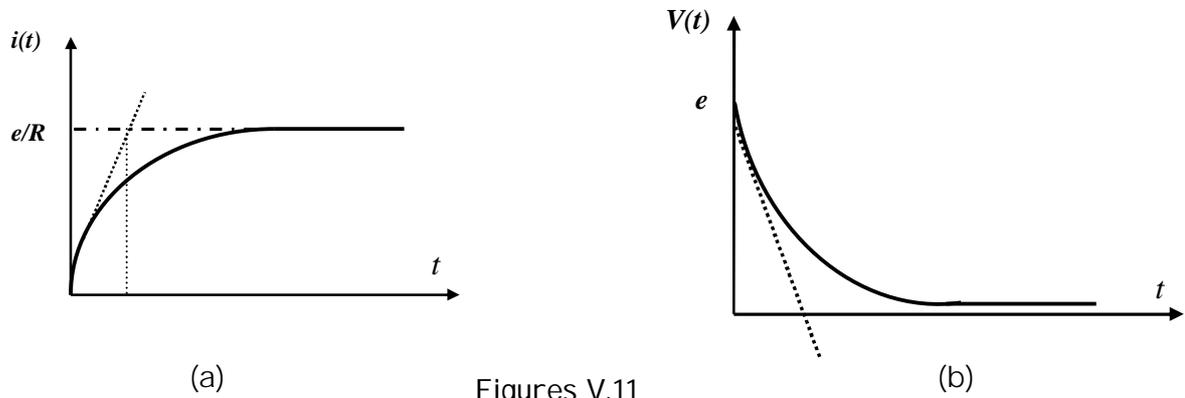
où $\tau_L = L/R$ est la constante de temps du circuit. Elle permet d'évaluer la durée pratique du régime transitoire et mesure le temps au bout duquel la valeur du courant circulant dans le circuit est égal à $1/e$ fois sa valeur finale.

L'expression de la tension aux bornes de la bobine s'obtient par dérivation, soit :

$$V = L \frac{di}{dt} = e \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (28)$$

Cette tension est maximale à la fermeture de l'interrupteur. Pendant l'établissement du courant, elle décroît avec le temps et lorsque le courant est établi, la bobine se comporte comme un fil de résistance négligeable.

Les graphes représentant l'évolution, au cours du temps, du courant et de la différence de potentiel aux bornes de la bobine sont donnés ci-dessous.



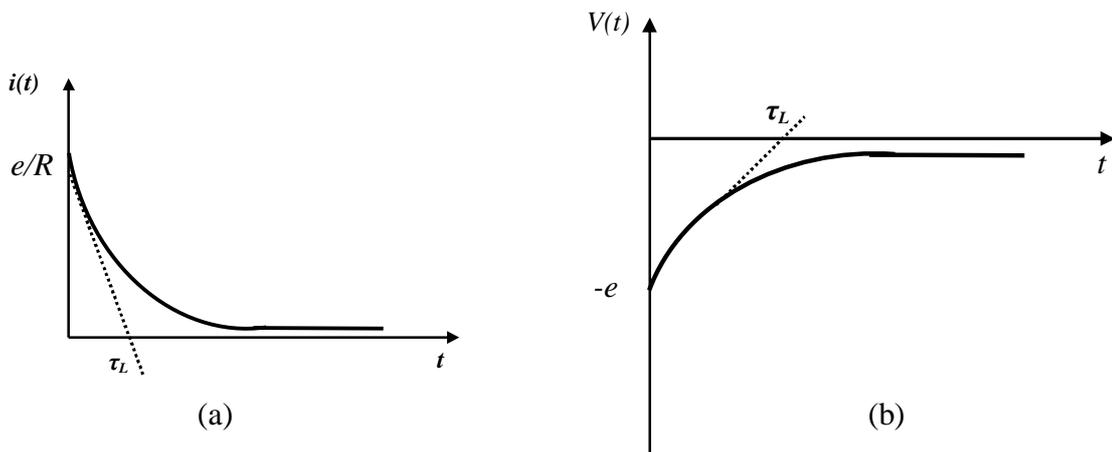
Ces figures mettent en évidence un régime transitoire et un régime permanent. Lorsque le régime permanent est atteint, on a :

$$i = I = \frac{e}{R} \quad \text{et} \quad V = 0 \quad (29)$$

5.2. Rupture du courant.

Lorsqu'on met l'inverseur en position 2, on court-circuite R et L . La loi des mailles, appliquée au circuit obtenu, permet d'écrire :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (30)$$



L'équation qui régit alors le courant circulant dans ce circuit est donnée par :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \quad (31)$$

C'est une équation différentielle de premier ordre dont la solution est donnée par :

$$i = \frac{e}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (32)$$

La différence de potentiel aux bornes de la bobine est alors donnée par :

$$V = L \frac{di}{dt} = -e \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \quad (33)$$

Les allures du courant et de la différence de potentiel sont représentées, au cours du temps, sur les figures V.12.

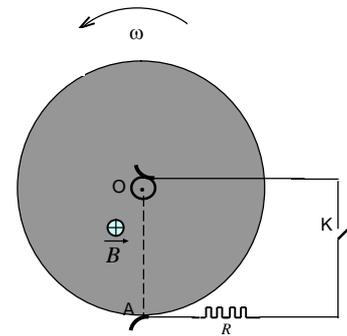
Exercice V.5.

Un disque de cuivre tourne, sans frottements, autour de son axe dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0,5 \text{ T}$ et parallèle à l'axe du disque. Lancé à la vitesse de rotation $N = 3000$ tours par minute, il est brusquement fermé sur une résistance $R = 0,1 \ \Omega$. Etablir l'équation du mouvement. En déduire le temps au bout duquel la vitesse de rotation atteint le centième de sa valeur initiale.

Les caractéristiques du disque sont :

Diamètre $d = 30 \text{ cm}$, épaisseur $a = 1 \text{ mm}$, masse volumique $\rho_M = 8,96 \text{ gr/cm}^3$

On néglige la résistance électrique du disque et les frottements mécaniques.



Solution V.5. Le flux coupé, en dt , par chaque rayon du disque qui se trouve en OA est :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$$

où dS est la variation de la surface balayée au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \text{d'où la f.é.m induite : } e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} r^2 B \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} r^2 B \omega$$

$$\omega = 2\pi n \text{ est la vitesse angulaire à l'instant } t \Rightarrow e = -\pi r^2 B n$$

n est le nombre de tours par seconde.

Au moment de la fermeture de l'interrupteur, la f.é.m est : $e_0 = 1.76 \text{ V}$.

Au cours du mouvement la diminution de l'énergie cinétique acquise par le disque sera, pendant dt , entièrement dissipée par effet joule dans R :

$$-d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = R I^2 dt = \frac{e^2}{R} dt \quad \Rightarrow \quad -J \omega d\omega = \frac{1}{4R} \omega^2 r^4 B^2 dt$$

où $J = \frac{1}{2} m r^2$ est le moment d'inertie du disque.

$$\text{En posant } \alpha = \frac{1}{4RJ} r^4 B^2 \quad \text{on a : } \frac{d\omega}{\omega} = -\alpha dt \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_0 \exp(-\alpha t) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\text{A.N : } \alpha = 4,44 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad t = 104 \text{ s} = 1 \text{ mn } 44 \text{ s}$$

5.3. Bilan énergétique

Considérons le bilan des énergies depuis la fermeture du circuit jusqu'à l'établissement du courant. En multipliant l'équation de la maille, donnée en 25, par $i dt$, nous obtenons :

$$d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 dt = e i dt$$

$e i dt$ représente l'énergie fournie par le générateur entre les instants t et $t + dt$.

$Ri^2 dt$ est l'énergie dissipée dans la résistance R entre t et $t + dt$.

$d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ correspond à l'énergie emmagasinée dans la bobine.

Durant l'établissement du courant dans le circuit, le générateur fournit l'énergie

$$W_G = \int_0^\infty e i dt = LI^2 \quad (34)$$

Une partie de cette énergie est stockée dans la bobine, soit

$$W_L = \int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{1}{2}LI^2 \quad (35)$$

Le reste est dissipé par effet Joule dans la résistance, soit :

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2}LI^2 \quad (36)$$

Au cours de la rupture du courant, la bobine restitue entièrement l'énergie qu'elle a emmagasinée lors de l'établissement du courant, sous forme de chaleur dans la résistance R . Cette énergie a été stockée par la bobine sous forme magnétique et la restitue sous forme d'énergie électrique.

5.4. Localisation de l'énergie : Densité d'énergie magnétique.

Considérons le cas d'une bobine dont le coefficient de self induction est (voir Ch IV, formule 39)

$$L = \mu_o \frac{N^2}{l} S$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans cette bobine est d'après (35):

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

Or le champ magnétique à l'intérieur de la bobine (solénoïde de longueur infinie) est (voir Ch IV, formule 27) :

$$B = \mu_o \frac{N}{l} I \quad \text{d'où :} \quad W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} Sl$$

La densité d'énergie magnétique localisée dans le champ magnétique (région de l'espace située à l'intérieure de la bobine) est :

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \quad \text{ou bien} \quad W = \frac{1}{2} \mu_o H^2 \quad (37)$$

N.B : 1°) Cette formule, établie dans le cas particulier du solénoïde, est générale.

2°) Noter l'analogie entre la densité d'énergie localisée dans un champ magnétique et celle qui est localisée dans un champ électrique (voir Ch II, § 4.5).

Exercices : Chapitre V

Exercice V.6. Un cadre métallique rectangulaire de côtés l et L , est en mouvement de translation, rectiligne et uniforme, de vitesse $\vec{V} = v\vec{i}$ dans le plan zox . Ce cadre est soumis à l'action d'un champ magnétique vertical stationnaire et non uniforme, dont la variation linéaire, en fonction de x , est représentée sur la figure (a).

1°) Déterminer l'expression de la f.é.m induite e_0 dans le cadre, pour un déplacement de ce dernier de $x=0$ à $x=D-l$.

2°) Reprendre la même question dans le cas d'un déplacement de $x=D-l$ à $x=D$.

AN : $B_0 = 0,1\text{ T}$, $l = 0,5\text{ m}$, $L = 0,4\text{ m}$, $D = 5\text{ m}$, $v = 0,5\text{ m/s}$

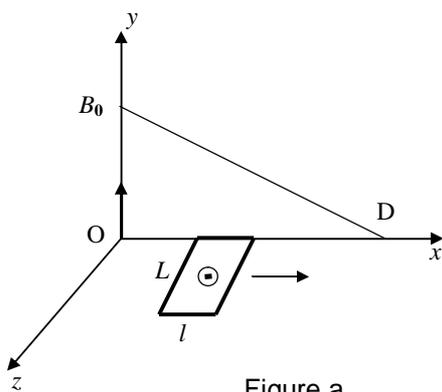


Figure a

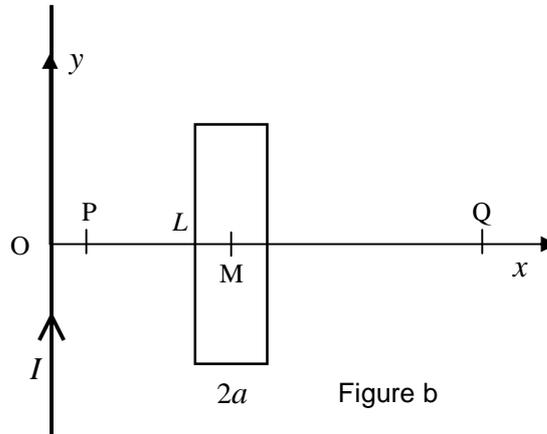


Figure b

Exercice V.7. Un fil conducteur, rectiligne, de longueur supposée infinie, parallèle à l'axe oy , est parcouru par un courant continu d'intensité I (figure b).

1°) Calculer, en un point M d'abscisse x , le champ magnétique créé par ce courant.

2°) Un cadre métallique comportant N spires rectangulaires de côtés L , parallèles à oy , et $l = 2a$, parallèles à ox , est en mouvement de translation, rectiligne et uniforme, de vitesse v parallèle à ox . Déterminer la f.é.m e induite dans le cadre, lorsque le centre M du cadre est en x . Tracer la courbe représentative de la fonction $e(x)$ lorsque M est en mouvement du point P au point Q .

AN : $I = 5\text{ A}$, $L = 20\text{ cm}$, $a = 5\text{ cm}$, $N = 100$, $v = 1,5\text{ m/s}$, $OP = 0,25\text{ m}$, $OQ = 5\text{ m}$

Exercice V.8. On reprend l'exercice IV.2 de la page 101. Le cadre mobile, constitué de N spires rectangulaires de longueur l , et de largeur $2a$, est à présent fermé sur lui-même. Il peut tourner, autour de l'axe zz' , dans un champ magnétique B radial.

1°) Calculer le flux coupé par les $2N$ fils de longueur l , au cours d'une rotation élémentaire $d\alpha$ du cadre. En déduire la f.e.m. induite e dans le cadre.

2°) On néglige le coefficient de self induction L du cadre. Calculer le courant induit i qui circule dans le cadre sachant que la résistance électrique de dernier est R .

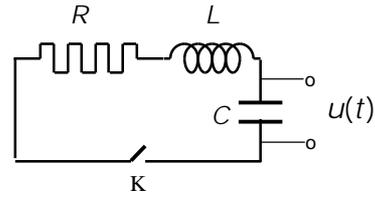
3°) Calculer le couple de freinage électromagnétique qui s'exerce sur le cadre au cours d'une rotation élémentaire $d\alpha$ de ce dernier.

4°) Un couple de rappel Γ_r dû à un ressort de constante C s'exerce sur le cadre. On appelle J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe zz' , et on néglige les frottements mécaniques (freinage visqueux). Ecrire l'équation du mouvement du cadre.

Exercice V.9. **Circuit R,L,C en régime libre.**

Le circuit électrique, représenté sur la figure ci-dessous, comporte une résistance R , une bobine de self induction L et un condensateur de capacité C placé en série avec un interrupteur K .

L'interrupteur K étant ouvert, on charge le condensateur jusqu'à la valeur q_0 , puis on ferme K. Un courant électrique $i(t)$ circule dans le circuit pendant un certain temps puis s'annule.



1°) Ecrire l'équation qui relie $i(t)$ aux caractéristiques R, L, C du circuit.

2°) En déduire l'équation différentielle qui donne la charge $q(t)$ et la différence de potentiel $u(t)$ aux bornes du condensateur.

3°) On pose : $\alpha = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

α est le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre du circuit

Résoudre cette équation dans les trois cas suivants :

a) $\alpha < \omega_0$ b) $\alpha > \omega_0$ c) $\alpha = \omega_0$

4°) Tracer la courbe représentative de la fonction $q(t)/q_0$ dans le cas suivant :

$$R = 0,7 \, \Omega, \quad L = 0,5 \, \text{mH}, \quad \text{et} \quad C = 200 \, \mu\text{F}.$$

C'est une sinusoïde amortie de pseudo période T . Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ? Quelle erreur commet-on en confondant T et la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$?

Calculer la charge du condensateur au bout de $t = T_0$

5°) L et C gardant les mêmes valeurs, quelle doit être la valeur de la résistance R pour avoir $\alpha = \omega_0$. Tracer la courbe $q(t)/q_0$. Calculer la charge du condensateur au bout de $t = T_0$ et $t = 1,5 T_0$

6°) Dans le cas où $R = 6 \, \Omega$, L et C gardant les mêmes valeurs, calculer la charge du condensateur au bout de $t = T_0$

Tableau V.1. Equations de Maxwell en régimes quasi stationnaires

Dans ce cours, nous avons mis en évidence les quatre équations de Maxwell que nous présentons, ci-dessous, sous forme intégrale

| | | |
|--------------------------|--|--|
| Théorème de Gauss | $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$ | Valable dans tous les cas |
| Conservation du flux | $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ | Valable dans tous les cas |
| Equation Maxwell Ampère | $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ | Valable en régimes quasi stationnaires |
| Equation Maxwell Faraday | $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$ | Valable dans tous les cas |