

Chapitre II

CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

En électricité, un conducteur est un milieu matériel dans lequel certaines charges électriques, dites « charges libres », sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique, à l'échelle macroscopique où les dimensions considérées sont très grandes par rapport aux distances inter atomiques.

1. EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE.

L'équilibre électrostatique est atteint lorsqu' aucune charge électrique ne se déplace à l'intérieur du conducteur. Nous allons établir, dans cette partie, les propriétés des distributions d'équilibre d'un conducteur isolé dans le vide.

1.1. Champ électrique.

Le champ électrique est nul en tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique. En effet, la présence d'un champ entraînerait l'existence d'une force

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (1)$$

qui mettrait les charges en mouvement et le conducteur ne serait plus en équilibre.

En tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique \vec{E} est nul.

Le champ électrique sur la surface du conducteur est perpendiculaire à la surface. En effet, pour les mêmes raisons que précédemment, une composante du champ parallèle à la surface agirait sur les charges libres et entraînerait leur déplacement. Or, de tels déplacements n'existent pas dans les conditions d'équilibre électrostatique :

Le champ est normal à la surface d'un conducteur en équilibre.

1.2. Potentiel électrique.

Considérons la circulation du champ électrique entre deux points M et M' infiniment voisins à l'intérieur d'un même conducteur. La variation du potentiel dV entre les deux points est alors donnée par :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{où} \quad d\vec{l} = \overline{MM'} \Rightarrow V = \text{constante}$$

Le champ étant nul à l'intérieur du conducteur, le potentiel est donc uniforme dans tout le volume du conducteur.

Un conducteur en équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel.

1.3. Répartition des charges.

- A l'intérieur du conducteur.

Considérons un conducteur doté d'une charge nette Q et choisissons une surface fermée quelconque de façon qu'elle se retrouve sous la surface du conducteur. D'après le théorème de Gauss, on a :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}_{\text{int}} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Comme $E_{\text{int}} = 0$, on en déduit que $Q_{\text{int}} = 0$. Par conséquent

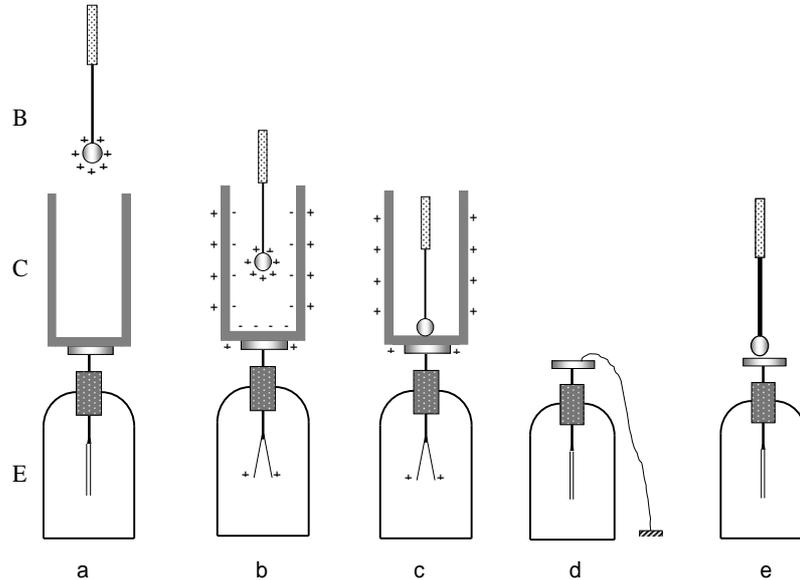
A l'intérieur d'un conducteur chargé en équilibre, la charge électrique est nulle.

- A la surface du conducteur : Expérience du cylindre de Faraday.

Cette expérience a pour but de mettre en évidence la répartition superficielle des charges électriques. On dispose:

- d'une boule métallique B, chargée positivement, solidaire d'une tige reliée à un manchon isolant,
- d'un cylindre de Faraday C, (c'est un cylindre métallique creux dont la hauteur est très grande par rapport à son diamètre),
- et d'un électroscope à feuille d'or E.

Le cylindre C est posé sur le plateau de l'électroscope E.



Figures II.1

La figure II.1.a montre que lorsque la boule se trouve hors du cylindre, l'ensemble formé par C et E ne porte aucune charge. Lorsqu'on introduit la boule dans le cylindre, un phénomène d'électrisation par influence est décelé par l'électroscope. Des charges négatives sont induites sur la face interne de C et des charges positives sur sa surface externe (figure II.1.b). Lorsque B et C sont mis en contact, on constate, là encore, que les feuilles de l'électroscope s'écartent (Figure II.1.c), cet écart est maintenu lorsqu'on retire B. Pour vérifier que la boule a entièrement transmis sa charge à C, on retire le cylindre, on décharge l'électroscope (figure

II.1.d), puis on met en contact B et le plateau de E. On constate alors que les feuilles d'or restent verticales (figure. II.1.e). En conclusion : toute la charge de la boule s'est trouvée répartie à la surface extérieure du conducteur.

La charge électrique d'un conducteur en équilibre est entièrement répartie sur sa surface.

1.4 . Champ au voisinage d'un conducteur : théorème de Coulomb.

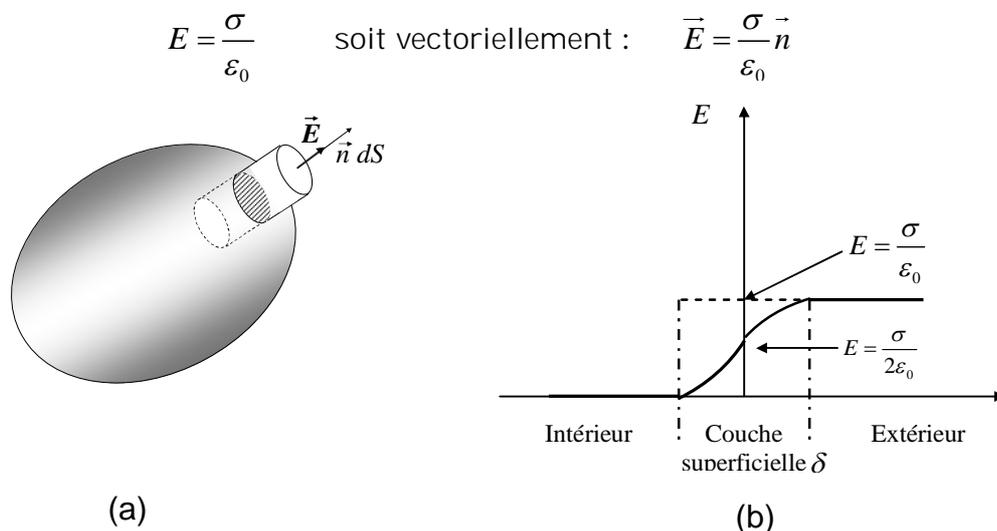
Considérons un conducteur de forme quelconque. On se propose de calculer le champ électrique en un point au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur. Construisons, pour cela, une surface de Gauss cylindrique aplatie, dont une base se trouve à l'extérieur de la surface et l'autre base à une profondeur telle que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre (figure II.2.a). En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, nous obtenons:

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Comme mentionné plus haut, aux points situés au voisinage immédiat de la surface du conducteur, le champ est normal à la surface. Le champ étant nul partout à l'intérieur du conducteur, on ne tient compte que du flux à travers la surface située à l'extérieur du conducteur. Le flux sortant de la surface latérale du cylindre étant nul, il ne reste plus que celui qui sort de la base, soit

$$\phi = ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

où σS est la charge nette comprise à l'intérieur de la surface de Gauss. On obtient alors :



Figures II.2

C'est l'expression du champ électrostatique, au voisinage immédiat d'une surface conductrice chargée. C'est la formulation du *théorème de Coulomb*.

Théorème : le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur portant une charge de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (2)$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal au conducteur et orienté vers l'extérieur.

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul, en son voisinage immédiat extérieur, il vaut :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Par conséquent, à la traversée de la surface du conducteur, par continuité, le champ varie de la manière indiquée sur la figure II.2.b (δ est un infiniment petit). En particulier, sur la surface du conducteur, il vaut ¹:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Cette dernière expression du champ sera utilisée pour le calcul de la pression électrostatique.

1.5. Pression électrostatique.

Calculons maintenant les forces auxquelles sont soumises les charges électriques situées à la surface d'un conducteur en équilibre. Ces charges de surface sont soumises à des forces répulsives de la part des *autres charges* du conducteur (Voir Exercice II.8).

Considérons un élément de surface dS , portant une charge $dq = \sigma dS$.

Le champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$ exerce sur la charge dq une force électrostatique :

$$\vec{dF} = dq \vec{E} = \sigma ds \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n} \quad \text{soit :} \quad \vec{dF} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} ds \vec{n}$$

Cette force est donc normale à la surface et dirigée vers l'extérieur quelque soit le signe de la charge. Elle est proportionnelle à l'élément de surface ds et présente, par conséquent, le caractère d'une force de pression. La force par unité de surface, c'est-à-dire la pression électrostatique, est alors donnée par :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad (4)$$

1.6. Pouvoir des pointes.

A proximité d'une pointe, le champ électrostatique est très intense. Cela résulte du fait que la densité surfacique de charges est très élevée au voisinage d'une pointe.

Ce phénomène peut être expliqué en considérant deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 ($R_2 < R_1$), reliées par un long fil conducteur mince (Figure 3). De ce fait, les deux sphères sont portées au même potentiel ; et comme elles sont très éloignées l'une de l'autre, on peut écrire :

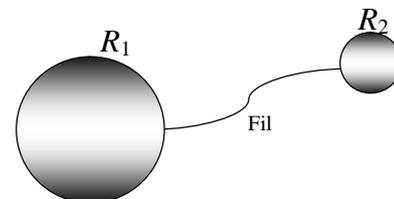


Figure II.3

¹ L'expression (3) est démontrée dans l'exercice II.8 (Voir la solution II.8)

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{R_1} \iint \sigma_1 ds = \frac{K}{R_2} \iint \sigma_2 ds$$

Pour des raisons de symétrie, les charges sont réparties uniformément à la surface de chaque sphère (σ_1 et σ_2 sont constantes). Il s'en suit que :

$$\frac{\sigma_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{R_1} \quad (5)$$

Cette dernière équation montre que la sphère ayant le plus petit rayon porte la plus grande densité de charges. (Voir exercice II. 10)

Ce résultat se généralise à un conducteur de forme quelconque et explique le pouvoir ionisant d'une pointe.

Applications.

- Le pouvoir de pointe est utile pour faciliter la décharge de l'électricité ; c'est le rôle des paratonnerres qu'on place sur les édifices pour les protéger contre la foudre.



La foudre est un phénomène naturel de décharge électrique qui se produit, lors d'un orage, entre deux nuages chargés d'électricité statique, ou entre un nuage électriquement chargé et la Terre qui est un conducteur électrique.

Lors d'un orage, les constituants d'un nuage, gouttes de pluie, grêlons, particules de glace, se heurtent à très grandes vitesses et s'électrifient par triboélectricité (voir chapitre I). La décharge se produit lorsque la différence de potentiel entre le nuage et la Terre, par exemple, dépasse un certain seuil (plusieurs millions de volts).

La foudre s'accompagne d'un phénomène lumineux *l'éclair* et d'une détonation *le tonnerre*.

Figure II.4 « *La Tour Eiffel, paratonnerre géant* » Photographie prise à 21h20 le 3 Juin 1902 et publiée dans le *Bulletin de la société Astronomique de France* en Mai 1905.

Document : WIKIPEDIA

- Expérience de la bougie- vent électrique

Au voisinage de la pointe (figure 5), le champ est si intense que l'air s'ionise. Les ions, de même signe que celui des charges de la pointe, sont repoussés. Il en résulte un déplacement d'air, un vent électrique, qui arrive à éteindre la flamme d'une bougie placée au voisinage de la pointe.

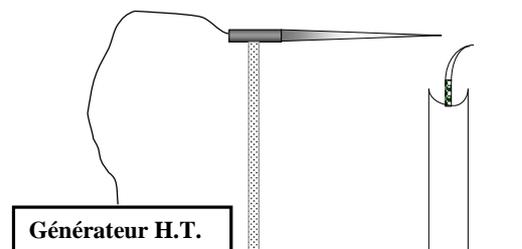


Figure II.5

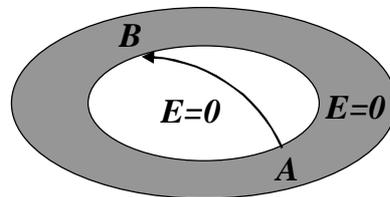
1.7. Conducteur creux.

Considérons maintenant un conducteur de forme arbitraire contenant une cavité (voir figure II.6.). Supposons qu'il n'existe aucune charge à l'intérieur de la cavité. Dans ce cas, le champ électrique à l'intérieur de la cavité doit être nul indépendamment de la distribution de la charge sur la surface externe du conducteur. De plus, le champ à l'intérieur de la cavité est nul même s'il existe un champ électrique à l'extérieur du conducteur.

Pour étayer ce point, nous utilisons le fait que chaque point du conducteur est porté au même potentiel électrique, deux points quelconques A et B de la surface de la cavité sont donc au même potentiel. Imaginons maintenant qu'un champ électrique \vec{E} existe à l'intérieur de la cavité et calculons la différence de potentiel $V_B - V_A$ définie par l'équation :

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

\vec{E} n'étant pas nul, nous pouvons toujours trouver un chemin entre A et B pour lequel $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ est un nombre positif, l'intégrale est alors positive. Or $V_B - V_A = 0$, la circulation de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ est nulle pour tous les parcours entre deux points quelconques du conducteur, il en résulte que le champ électrique est partout nul. Par conséquent, une cavité entourée par des murs conducteurs est une région où le champ est nul, quelles que soient les conditions extérieures au conducteur. Ce dernier constitue un *écran électrostatique* : aucun champ extérieur ne peut être décelé dans la cavité. Cette dernière est à l'abri de toute influence extérieure.



Figures II.6

Cette propriété est valable même si le conducteur creux comporte des ouvertures, c'est le cas d'une cage de Faraday.

Applications : *Cage de Faraday.*

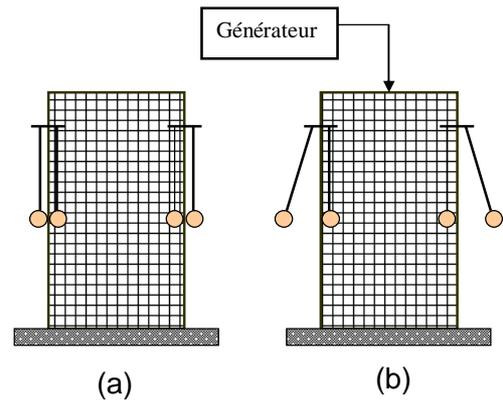
C'est une cage métallique qui permet d'effectuer des mesures à l'abri des champs extérieurs. Inversement, ces mesures ne perturbent pas des expériences menées à l'extérieur.

Considérons une cage de Faraday fabriquée à l'aide d'un grillage métallique. Des pendules électrostatiques sont mis en contact avec les parois internes et externes de la cage comme le montrent les figures II.7.

Si la cage n'est pas chargée, $Q = 0$, tous les pendules restent à la verticale (figure.II.7.a).

Si on charge la cage à l'aide d'un générateur par exemple, on constate que les pendules à l'intérieur restent à la verticale, alors que ceux qui sont placés à l'extérieur s'écartent de la cage (figure.II.7.b).

Une telle enceinte est largement utilisée pour protéger des appareils électriques des champs extérieurs. C'est la raison pour laquelle, la plupart de ces appareils sont placés à l'intérieur d'une carcasse métallique reliée à la terre.



Figures II.7

1.8. Capacité d'un conducteur.

Considérons un conducteur isolé en équilibre électrostatique, placé en un point O de l'espace et portant une charge Q , répartie sur sa surface externe avec une densité surfacique σ telle que :

$$Q = \iint \sigma dS$$

Si la charge Q augmente, la densité surfacique σ augmente proportionnellement :

$$\sigma = a Q$$

Cela, en raison de la linéarité des équations qui régissent le problème de l'équilibre des conducteurs. Le potentiel créé par Q , en un point M de l'espace tel que $OM = r$, s'écrit

$$V = K \iint \frac{\sigma dS}{r} \quad \text{soit} \quad V = K Q \iint \frac{a dS}{r}$$

Ce résultat reste valable pour tout point de la surface du conducteur. L'intégrale dépend uniquement de la géométrie et des dimensions du conducteur

On en déduit que le rapport, entre la charge et le potentiel auquel est porté le conducteur,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$$

ne dépend que de la géométrie du conducteur, on l'appelle *capacité propre du conducteur*. Celle-ci est donnée par l'expression :

$$Q = CV \quad (6)$$

C'est une grandeur positive, dont l'unité est appelée le *farad* en hommage à Michael Faraday (1791-1867). Le farad est ainsi défini comme la capacité d'un conducteur isolé dont le potentiel est de 1 volt lorsqu'il reçoit une charge de 1 coulomb.

Le farad est une unité très grande, on utilise plutôt des sous multiples :

Le microfarad : $1\mu F = 10^{-6} F$, le nanofarad : $1nF = 10^{-9} F$, le picofarad : $1pF = 10^{-12} F$.

Exercice II.1. Calculer la capacité d'un conducteur sphérique de rayon R .

A.N. $R = 1 \text{ m}$ et $R = 6400 \text{ km}$ (rayon de la terre)

Solution II.1. Considérons une sphère de rayon R et de charge Q . Son potentiel est donné par l'expression suivante :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

D'où sa capacité :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Ainsi la valeur de la capacité d'une sphère de rayon $R = 1\text{m}$ vaut $C = 0.11\text{nF}$.

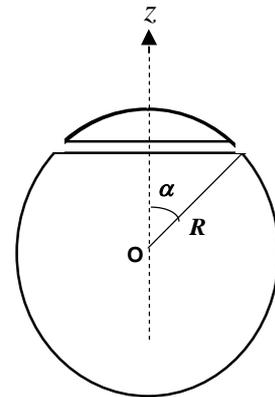
Dans le cas de la Terre, la capacité vaut :

$$C_T = 4\pi\epsilon_0 R_T = \frac{6.4 \times 10^6}{9 \times 10^9} = 0.71\text{mF}$$

Exercice II.2. Une sphère conductrice creuse, de rayon R est séparée en deux parties inégales par un plan horizontal : on obtient deux calottes sphériques inégales dont la base commune est un cercle de rayon $r = R \sin \alpha$. La sphère est portée au potentiel $V > 0$ puis isolée.

1°) En supposant la calotte inférieure fixe, déterminer la force qu'elle exerce sur la calotte supérieure en fonction de V et α .

2°) Calculer cette force dans le cas de deux hémisphères portées à un potentiel $V = 30\text{ kV}$.



Solution II.2. 1°) La charge surfacique apparaissant sur la sphère conductrice est donnée par :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CV}{S}$$

Avec $C = 4\pi\epsilon_0 R$ et $S = 4\pi R^2$, on en déduit :
$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{R}$$

Une charge élémentaire $dq = \sigma dS$ est soumise au champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$, il résulte une force

élémentaire
$$\vec{dF} = dq \vec{E} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}$$

On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de la pression électrostatique obtenue en (4) :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{dF} = P \cdot dS \vec{n} \quad \text{soit} \quad \vec{dF} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}$$

Pour des raisons de symétrie, la force totale exercée par la calotte inférieure sur la calotte supérieure est portée par l'axe \vec{oz} et elle est ascendante, son module est donné par :

$$F = F_z = \int dF_z = \int dF \cos \theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \int_{S_1} \cos \theta dS$$

où S_1 est la surface de la calotte supérieure et θ un angle compris entre 0 et α .

Donc $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$, d'où :

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 2\pi R^2 \int_0^\alpha \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 \sin^2 \alpha \quad \text{soit} \quad F = \frac{\epsilon_0 V^2}{2} \pi \sin^2 \alpha$$

2°) Dans le cas de deux hémisphères $\alpha = \pi/2$ et $F = \frac{\epsilon_0 V^2}{2} \pi$ A.N. $F = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

2. PHENOMENES D'INFLUENCE.

2.1. Eléments correspondants.

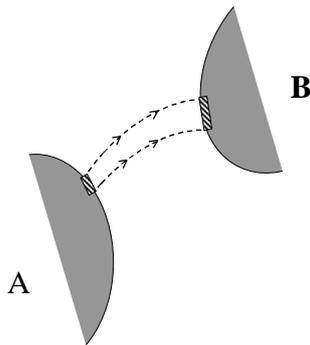


Figure 11.8

Considérons deux conducteurs A et B en équilibre et portant des charges Q_A et Q_B et deux éléments de surfaces dS_A sur A et dS_B sur B découpées par le tube de force représenté sur la figure 11.8. dS_A et dS_B , appelés "éléments correspondants" portent des densités de charges σ_A et σ_B .

Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée S s'appuyant sur les surfaces dS_A et dS_B et limitée par les lignes de champ et deux surfaces à l'intérieur de A et B. Le flux du champ, sortant de S , est nul. En effet le champ est nul à l'intérieur des conducteurs et il est tangent au tube de forces. Donc :

$$\sigma_A dS_A + \sigma_B dS_B = 0$$

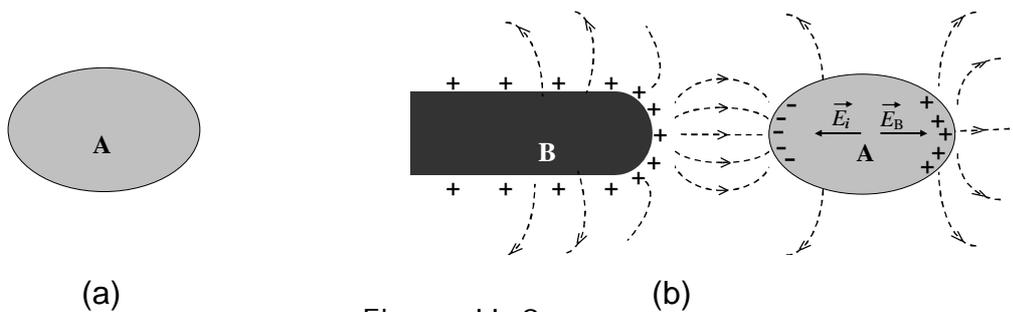
D'où :

Théorème des éléments correspondants : *Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées.*

2.2. Influence partielle.

Considérons un conducteur A électriquement neutre (figure 11.9.a).

Approchons de ce dernier, un conducteur B chargé positivement, tel que représenté sur la figure 11.9.b. Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique \vec{E}_B .



Figures 11.9

Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de \vec{E}_B . Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est $-Q$. A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est $+Q$, vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons comme le montre la figure 11.9.b. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par *influence*, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Elles créent un champ *induit* \vec{E}_i qui vient s'opposer au champ *inducteur*² \vec{E}_B et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A les électrons

² Les termes *inducteur* et *induit* sont utilisés surtout en électromagnétisme (voir chapitre V)

libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

Remarques : 1°) Lors de l'évolution de ce phénomène, les charges $+Q$ et $-Q$, *induites* ou créées par influence, interviennent en ajoutant leur action à celle des charges inductrices. Il se produit une *influence retour* de A sur B. On dit qu'il y'a *influence mutuelle*.

2°) Dans cette expérience, le conducteur A a été *électrisé par influence*. Le système étant isolé, le principe de la conservation de la charge implique que la somme des charges induites est nulle. Ainsi, lors d'une électrisation par influence, il n'y aucune création, mais simplement un déplacement de charges.

Lignes de champ : La topographie de l'espace électrique, représentée sur la figure II. 9. b, montre que seules certaines lignes de champ, qui émanent du corps inducteur B, aboutissent au conducteur A. Il en résulte, en vertu du théorème des éléments correspondants, que la charge Q créée par influence, est inférieure à la charge inductrice du conducteur B.

On relie, à présent le conducteur A à la terre, au moyen d'un fil conducteur (figure II.10). La terre et le conducteur forment ainsi un seul conducteur ; les charges positives sont alors repoussées vers la terre. Le potentiel de ce conducteur est nul et plus aucune ligne de champ ne le quitte.

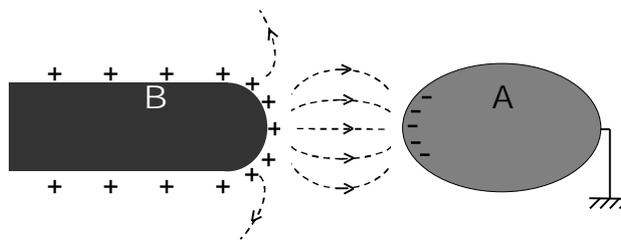


Figure II.10

Dans ces exemples, l'influence est dite *partielle*, car toutes les lignes de champ issues du conducteur B n'aboutissent pas sur A. Nous pouvons créer des conditions d'influence totale en plaçant tout simplement le conducteur B à l'intérieur d'un conducteur creux A (§ . 2. 3)

2.3. Influence totale.

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de B aboutissent sur A. Ceci est obtenu lorsque A entoure complètement B (figure II.11).

L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B.

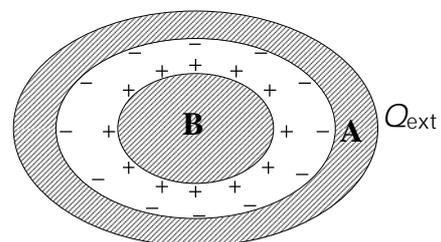


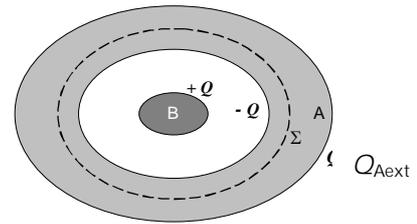
Figure II.11

$$Q_B = -Q_{A_{\text{int}}}$$

Exercice II. 3. 1°) Retrouver le résultat du § 2.3 en utilisant le théorème de Gauss.

2°) Calculer la charge extérieure Q_{Aext} dans les cas suivants :

- a - Le conducteur A est isolé et initialement neutre.
- b - Le conducteur A porte une charge initiale q .



Solution II. 3. 1°) On applique le théorème de Gauss en considérant une surface Σ à l'intérieur du conducteur A. Sachant que le champ est nul à l'intérieur du conducteur A (équilibre électrostatique) on a :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}_{int} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_B + Q_{Aint}}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{Aint} = -Q_B$$

2°) a) Cas où le conducteur A est initialement neutre:

$$Q_{Aext} + Q_{Aint} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{Aext} = -Q_{Aint} = Q_B$$

b) Cas où le conducteur A porte initialement une charge q :

$$Q_{Aext} + Q_{Aint} = q \quad \Rightarrow \quad Q_{Aext} = q - Q_{Aint} \quad \Rightarrow \quad Q_{Aext} = q + Q_B$$

3. CONDENSATEURS.

3.1. Les condensateurs.

Un condensateur est un système constitué de deux conducteurs électriques en influence totale.

On réalise un tel système en utilisant deux conducteurs dont l'un est creux et entoure complètement l'autre (Figure II.11). L'espace compris entre les deux conducteurs, appelées "armatures", est vide ou rempli d'un milieu isolant (diélectrique).

Lorsqu'une différence de potentiel est appliquée entre les armatures d'un condensateur, en le reliant par exemple à une source d'électricité, il se charge. Les deux plaques acquièrent alors des charges égales et opposées.

Un condensateur est un appareil qui sert à emmagasiner de l'énergie électrique. Il est largement utilisé en électronique et en électrotechnique.

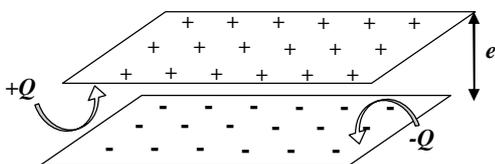


Figure II.12

Condensateur plan :

Un condensateur plan est formé de deux conducteurs plans, parallèles, distants de e . L'espace e est très petit par rapport aux dimensions des armatures afin que celles-ci soient en influence totale. (figure II.12.).

Remarques :

1°) Il est important de noter qu'un condensateur est caractérisé par la valeur absolue de la charge Q portée par chaque armature et non pas la charge résultante qui est nulle. De même, il est caractérisé par la différence de potentiel V entre ses armatures et non pas le potentiel de l'une de ses armatures par rapport à une référence donnée.

2°) Le nom de condensateur, donné à un système de deux conducteurs en influence totale, provient du fait que ces systèmes mettent en évidence le phénomène de « condensation de l'électricité », à savoir l'accumulation de charges électriques sur la surface des armatures.

La bouteille de Leyde : La bouteille de Leyde est le premier condensateur de l'histoire, il a été mis au point, en 1745, par le savant hollandais Musschenbrock à Leyde.



Figure II.13

C'est un condensateur formé de deux conducteurs, des feuilles d'étain pour le premier et une feuille métallique qui enveloppe la bouteille dont le verre constitue le diélectrique.

Lorsqu'on communique une charge q à la bouteille, une différence de potentiel apparaît entre l'électrode reliée au conducteur interne et l'armature externe.

La bouteille se décharge lorsqu'elle est reliée à un circuit extérieur. C'était le seul moyen d'emmagasiner de l'énergie électrique jusqu'à ce que Volta invente en 1800 la pile électrique.

3.2 . Capacité d'un condensateur.

Le concept de capacité électrique, introduit dans le cas d'un seul conducteur, peut être étendu à un condensateur. On définit la capacité d'un condensateur par :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (7)$$

Q est la charge portée par chacune des armatures ($+Q$ pour l'une et $-Q$ pour l'autre) et $V = V_1 - V_2$ est la différence de potentiel entre ces armatures. La capacité est une constante propre à chaque condensateur. Sa valeur dépend de la forme, des dimensions et de la position relative des deux conducteurs qui le constituent. Elle dépend également de la nature du milieu qui les sépare.

La méthode de calcul de la capacité d'un condensateur s'appuie sur la relation :

$$Q = CV.$$

On commence d'abord par calculer le champ électrique en un point quelconque à l'intérieur du condensateur. La circulation du champ entre les deux armatures, permet de tirer l'expression du potentiel. Le rapport

$$C = \frac{Q}{V}$$

nous donne la valeur de la capacité du condensateur considéré.

Capacité d'un condensateur plan.

Soit un condensateur plan (figure II.14), constitué de deux conducteurs plans, portant respectivement des charges $+Q$ et $-Q$, de surfaces S , séparés par une distance e . Du fait de la symétrie de la distribution, le champ électrique entre les armatures de ce condensateur est uniforme, il est donné par :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La répartition de charge étant uniforme, on a :

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Q est la charge du condensateur. En choisissant l'axe \vec{ox} selon la normale aux plans (figure II.14), nous avons :

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E dx$$

Soit, en faisant circuler le champ entre les deux armatures :

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = \frac{Qe}{\epsilon_0 S}$$

Or $Q = CV$, d'où la capacité d'un condensateur plan :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \tag{8}$$

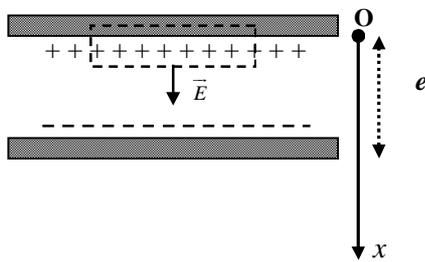


Figure II.14

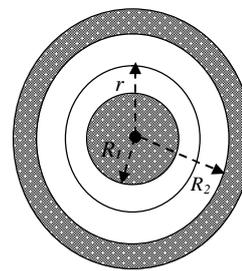


Figure II.15

Capacité d'un condensateur sphérique.

Un condensateur sphérique (figure II.15), est constitué de deux sphères conductrices et concentriques. La première de rayon R_1 porte une charge positive $+Q$ et son potentiel est V_1 ; la seconde de rayon R_2 ($R_1 < R_2$), porte une charge $-Q$ et son potentiel est V_2 ,

En appliquant le théorème de Gauss, on obtient le champ électrique entre les armatures d'un tel condensateur:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Sachant que $E = -\frac{dV}{dr}$ on a: $-dV = E \cdot dr$

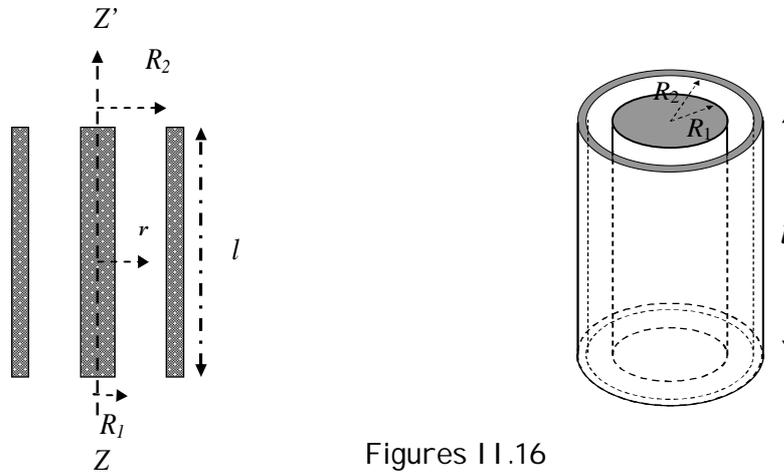
En faisant circuler ce champ entre les deux armatures, il vient :

$$V = \int_{V_1}^{V_2} -dV = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \quad \text{soit} \quad V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

D'où, le rapport $\frac{Q}{V}$: $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{9}$

N.B. Un matériau diélectrique, placé entre les armatures, permet d'augmenter la capacité d'un condensateur, sa permittivité ϵ étant nettement supérieure à celle du vide ϵ_0 . La permittivité relative $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ vaut environ: 2 (papier) ; 2,25 (polyéthylène) ; 2,4 (polystyrène) ; 5 (verre) ; 6 (mica) ; 18 (téflon). ϵ_r varie en fonction de la température, de l'humidité et de la fréquence de la tension appliquée.

Exercice II.4: Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur cylindrique (figure II.16), constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et R_2 , de hauteurs l , portant sur leurs surfaces en regard les charges $+Q$ et $-Q$. A.N. $l = 10 \text{ cm}$ $R_1 = 1 \text{ mm}$ $R_2 = 3 \text{ mm}$



Figures II.16

Réponse II.4:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\text{Log}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (10)$$

soit $C = 5 \text{ pF}$

3.3. Association de condensateurs.

Pour des raisons pratiques, on utilise des associations de plusieurs condensateurs afin d'emmagasiner le plus d'énergie possible. On distingue deux types de groupements de condensateurs : le groupement en série et le groupement en parallèle. La capacité équivalente des systèmes qui en résultent dépend du groupement choisi.

Association en série.

Considérons le groupement de N condensateurs en série représenté sur la figure³ II.17.a. Lorsqu'une différence de potentiel $\Delta V = V_0 - V_N$ est appliquée entre les points extrêmes de l'ensemble des condensateurs, l'armature de gauche du premier condensateur va acquérir une charge Q . En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge $\pm Q$ (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La différence de potentiel totale aux bornes de l'ensemble des condensateurs s'écrit alors simplement :

$$\Delta V = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{N-1} - V_N)$$

Soit

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_N} = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

³ Quelque soit la géométrie réelle du condensateur, on le représente schématiquement par deux traits parallèles.

Cette différence de potentiel correspond à celle d'un condensateur unique de capacité équivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \tag{11}$$

Intérêt : Ce montage est utilisé lorsque la différence de potentiel appliquée est grande et ne peut pas être supportée par un seul condensateur.

Association en parallèle.

Soient N condensateurs, placés en parallèle, avec la même différence de potentiel V (Figure II.17.b). On désigne par Q_i et C_i la charge électrique et la capacité du $i^{\text{ème}}$ condensateur, on a

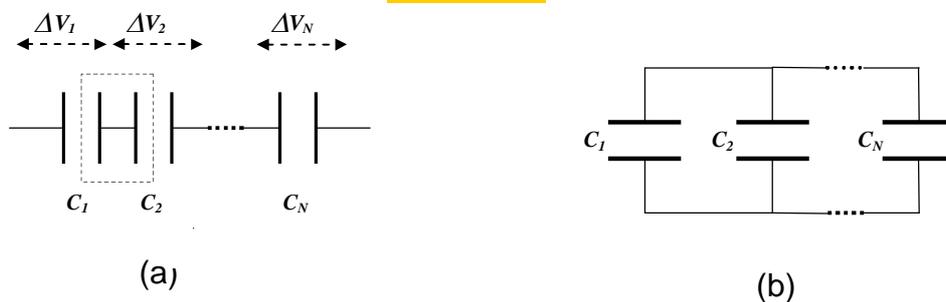
$$Q_i = C_i V$$

La charge électrique totale portée par l'ensemble des condensateurs est alors donnée par :

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = \sum_{i=1}^N C_i V = V \sum_{i=1}^N C_i$$

La capacité équivalente est la somme des capacités individuelles.

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \tag{12}$$



Figures II.17

Intérêt : Ce montage permet d'obtenir une capacité équivalente élevée.

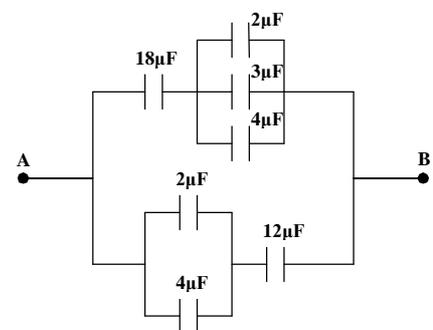
Exercice II.5: Soit le groupement de condensateurs suivant :
Déterminez la capacité équivalente du circuit.

Solution II.5:

$$C_1 = 2 + 3 + 4 = 9\mu F, \quad \frac{1}{C_2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{6} \Rightarrow C_2 = 6\mu F$$

$$C_3 = 2 + 4 = 6\mu F, \quad \frac{1}{C_4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow C_4 = 4\mu F$$

D'où $C_{eq} = C_2 + C_4 = 10\mu F$



4. ENERGIE & FORCE.

4.1. Energie électrostatique d'un conducteur.

Comme nous l'avons vu au chapitre I, l'énergie électrostatique d'un conducteur isolé est calculée par le travail nécessaire qu'il faut fournir pour le charger. Elle représente la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges du conducteur. Soit dE_p la variation d'énergie potentielle subie par une charge élémentaire dq , ramenée de l'infini (choisi comme référence du potentiel) jusqu'au conducteur :

$$dE_p = v dq$$

où q et v désignent les valeurs de la charge et du potentiel dans un état intermédiaire. Au cours du transfert de charges sur le conducteur, sa charge totale ainsi que la valeur absolue de son potentiel augmentent. L'énergie interne du conducteur lorsqu'il atteint sa charge complète est alors donnée par :

$$E_p = \int_0^Q v dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

Soit finalement:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (13)$$

Ou bien:

$$E_p = \frac{1}{2} QV \quad (14)$$

4.2. Energie électrostatique d'un ensemble de conducteurs en équilibre.

Considérons n conducteurs en équilibre, chacun d'eux porte une charge Q_i et se trouve porté à un potentiel V_i . En généralisant l'équation (14) à un ensemble de n conducteurs, l'énergie emmagasinée dans ce système est

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (15)$$

Il est possible de calculer la résultante des forces \vec{F} qui s'exerce sur l'un d'eux.

4.3. Calcul de la force à partir de l'énergie.

Lorsqu'on cherche à calculer les forces électrostatiques à partir de l'énergie emmagasinée dans un système, deux cas particuliers doivent être envisagés selon que l'évolution se fait à charge constante ou à potentiel constant.

- Le système de conducteurs n'est relié à aucune source de tension, la charge reste alors constante,
- Le système est relié à une source de tension, le potentiel reste constant.

a) Les conducteurs sont isolés.

Les conducteurs ne sont reliés à aucune source d'électricité, les charges Q_i restent donc constantes et les potentiels varient au cours d'un déplacement des conducteurs.

Lors d'une translation élémentaire \vec{dl}_i du $i^{\text{ème}}$ conducteur, le travail de la force \vec{F} est

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}_i = F_x dx_i + F_y dy_i + F_z dz_i \quad (16)$$

Ce travail est dû à la variation de l'énergie dE_p emmagasinée. Comme le système est isolé, le principe de la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$dW + dE_p = 0 \quad \text{soit} \quad F_x dx_i + F_y dy_i + F_z dz_i = - dE_p$$

d'où

$$F_x = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_Q \quad F_y = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_Q \quad F_z = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_Q \quad (17)$$

On dérive l'énergie par rapport aux coordonnées x , y , z en maintenant la charge constante.

Dans le cas d'une rotation α autour d'un axe fixe $\vec{\Delta}$, le moment de la force par rapport à cet axe est :

$$M_{\Delta} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right)_Q \quad (18)$$

b) Les conducteurs sont reliés à des générateurs.

Les conducteurs sont, à présent, reliés à des sources d'électricité, les potentiels V_i restent constants et les charges varient. Là encore, au cours d'un déplacement élémentaire \vec{dl}_i du $i^{\text{ème}}$ conducteur, le travail de la force \vec{F} est

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}_i = F_x dx_i + F_y dy_i + F_z dz_i \quad (19)$$

Mais à présent, les potentiels restent constants. Soit dQ_i la charge élémentaire fournie par la source au $i^{\text{ème}}$ conducteur, son énergie varie de :

$$dE_i = V_i dQ_i \quad (20)$$

Les n conducteurs reçoivent une énergie totale :

$$dE_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n V_i dQ_i \quad (21)$$

Cette énergie, empruntée aux générateurs, fournit :

- du travail dW qui permet à la force \vec{F} de déplacer les conducteurs
- et de l'énergie dE_p au système de conducteurs.

$$dE_{ext} = dW + dE_p \quad (22)$$

Or l'énergie emmagasinée dans ce système de conducteurs est:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (23) \quad \text{d'où} \quad dE_p = \frac{1}{2} \sum_i V_i dQ_i \quad (24)$$

Avec (21), (22) et (24) on a :

$$dW = dE_p \text{ soit } dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dE_p \quad \text{d'où}$$

$$F_x = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_V \quad F_y = \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_V \quad F_z = \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_V \quad (25)$$

Dans le cas d'une rotation α autour d'un axe fixe $\vec{\Delta}$, le moment de la force par rapport à cet axe est :

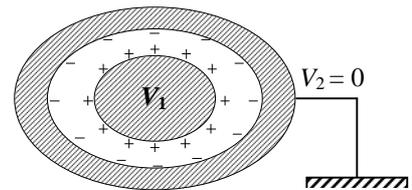
$$M_{\Delta} = \left(\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right)_V \quad (26)$$

Remarque : Il est important de remarquer le changement de signe dans l'expression de la force dans les deux cas envisagés.

4.4 Energie emmagasinée dans un condensateur

Considérons un condensateur dont :

- l'armature interne est portée au potentiel V_1 et dont la charge est $Q_1 = +Q$
- et l'armature externe est portée au potentiel V_2 et dont la charge de la surface intérieure est $Q_2 = -Q$. La surface extérieure porte une charge Q_{ext}



L'énergie du condensateur est d'après (15)

$$E_p = \frac{1}{2} Q [V_1 - V_2] + \frac{1}{2} Q_{ext} V_2 \quad (27)$$

Si l'armature externe est reliée à la terre, on a : $V_2 = 0$ et $Q_{ext} = 0$ d'où :

$$E_p = \frac{1}{2} QV \quad (28)$$

$$\text{Soit : } E_p = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{et} \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (29)$$

Ordre de grandeur et utilisation des condensateurs.

Bouteille de Leyde : $C = 600 \cdot 10^{-12} \text{ F}$, $V = 60 \text{ kV} \Rightarrow E_p = 1,18 \text{ J}$ (Bruhat [4] p 154).

Avec les diélectriques suivants : papier ou mica : $C \approx 10^{-6} \text{ F}$, céramique : $10^{-6} \text{ F} < C < 10^{-4} \text{ F}$.

Les condensateurs électrochimiques: $C \approx 10^{-3} \text{ F}$.

Les condensateurs sont largement utilisés en électronique dans les circuits, et en électrotechnique pour le relèvement du facteur de puissance (voir ch.VI)

En outre des super condensateurs permettent de stocker de l'énergie électrique puis de la restituer comme une batterie d'accumulateurs : La densité d'énergie, en watt-heure/kg, emmagasinée dans une batterie varie entre 50 et 150 et, dans un supra condensateur, elle se situe entre 4 et 6.

4.5. Localisation de l'énergie : Densité d'énergie électrostatique.

Considérons le cas d'un condensateur plan, dont les armatures ont une surface S , sont écartées de e et portent sur leurs surfaces les charges $+Q$ et $-Q$.

L'énergie électrostatique d'un tel condensateur est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2$$

En remplaçant la capacité par son expression et en faisant apparaître le champ électrostatique, nous obtenons :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{e} V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{V}{e} \right)^2 eS = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 eS$$

Où eS est le volume V du milieu limité par les armatures et $E = V/e$ est le champ électrique entre les armatures (qui est uniforme).

On obtient ainsi la densité volumique d'énergie électrostatique associée au champ électrique:

$$w = \frac{dE_p}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (30)$$

Cette dernière formule, établie ici dans un cas particulier, est générale⁴ : c'est la densité d'énergie électrique localisée dans un milieu de permittivité ε . Dans le vide, elle est donnée par

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

4.6. Force s'exerçant sur l'armature d'un condensateur.

On considère le cas d'un déplacement unidimensionnel.

a) Le condensateur est isolé : la charge reste constante.

Dans le cas d'un déplacement le long d'un axe \vec{ox} la force qui s'exerce sur une armature est d'après (17)

$$F = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_Q, \quad \text{et avec (29)} \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{on a :}$$

$$F = + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (31)$$

⁴ C'est l'énergie électrique véhiculée par un champ électrique \vec{E} lors de la propagation des ondes électromagnétiques

b) Une des armatures est portée à $V_1 = V$ l'autre est portée à $V_2 = 0$

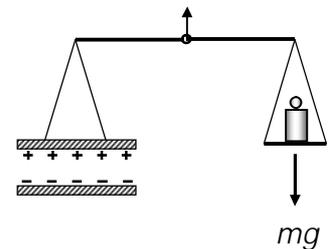
Avec (25)

$$F = + \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_V \quad \text{et} \quad (28) \quad E_p = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{il vient :}$$

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \quad (32)$$

Cas d'une rotation autour d'un axe.
$$M_\Delta = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad (33)$$

Exercice II. 6. Electromètre absolu : l'électromètre absolu, représenté sur la figure ci-contre, se compose d'une balance dont l'un des plateaux est solidaire de l'armature mobile d'un condensateur plan. La seconde armature est fixe. Une d.d.p. V est appliquée au condensateur, il en résulte une force électrostatique \vec{F} . Celle-ci est équilibrée par une force $m\vec{g}$ obtenue en plaçant des masses marquées sur l'autre plateau de la balance.



Exprimer la d.d.p. V à mesurer en fonction des caractéristiques du condensateur de m et g .

A.N. Rayon des armatures $R = 6$ cm, écartement $x = 1$ cm, $m = 5$ g et $g = 10$ m/s².

Solution II. 6.

1°) **1^{ère} méthode** : La force électrique peut être calculée directement à partir de la pression électrostatique (§ 1.5):

$$P = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

La force électrique qui s'exerce sur l'armature mobile est verticale et de module :

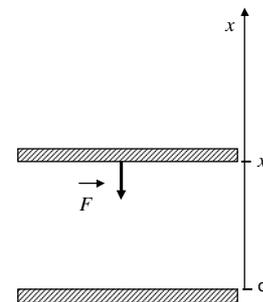
$$F = P.S = \frac{q^2}{2 \epsilon_0 S} \quad \text{avec} \quad q = CV \quad \text{soit} \quad q = \frac{\epsilon_0 S}{x} V \quad \text{on a :}$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V^2$$

2^{ème} méthode : La force électrique peut être calculée à partir de l'énergie :

Supposons que l'armature mobile effectue un déplacement élémentaire dx . Au cours de ce déplacement virtuel seul l'écartement x varie les potentiels $V_1 = V$ et $V_2 = 0$ restent constants. La force qui s'exerce sur l'armature mobile est dirigée le long de l'axe \overrightarrow{ox} et a pour module (voir Equation 32)

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{soit} \quad F = - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V^2$$

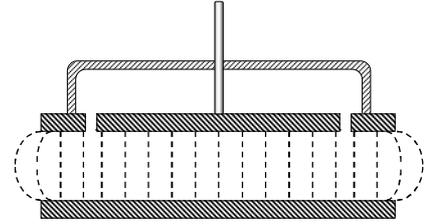


2°) Dans le cas de l'électromètre absolu, cette force est équilibrée par la force $\vec{P} = m\vec{g}$.

A l'équilibre :

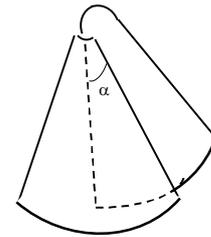
$$V^2 = 2 \frac{x^2}{\epsilon_0 S} m g \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2 \frac{x^2}{\epsilon_0 S} m g} = 10.000 \text{ volts}$$

Remarque : Dans un condensateur plan parfait, toutes les lignes de champs sont perpendiculaires aux armatures circulaires. En réalité, il ya une distorsion de ces lignes aux extrémités. Pour y remédier on utilise un anneau de garde, c'est une électrode qui a la forme indiquée sur la figure ci-contre et qui est portée au même potentiel que l'électrode protégée.



Exercice II. 7. Electromètre à déviation

Soit un condensateur plan dont les armatures ont la forme de section de cercle. L'une des armatures est fixe et portée à un potentiel $V_2 = 0$, L'autre est mobile autour d'un axe D perpendiculaire aux plans des armatures. Cette armature est portée au potentiel V à mesurer, en outre elle est solidaire d'une aiguille dont les positions sont repérées sur un cadran gradué.



1°) Calculer le couple moteur.

2°) Ce couple est équilibré par un couple de rappel créé par un ressort à spirale de constante k ($M = k \alpha$)

Solution II. 7.

Le couple moteur a pour expression (26)

$$M_{\Delta} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad \text{avec} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{e} \quad (\text{condensateur plan})$$

Par construction, cette capacité est proportionnelle à la surface S du condensateur formé par les parties des plaques qui se trouvent en face l'une de l'autre, donc C est proportionnelle à α .

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = A \quad \text{où } A \text{ est une constante} \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta} = \frac{A}{2} V^2 = k \alpha$$

A l'équilibre, les deux couples sont égaux et opposés :

$$\alpha = K V^2$$

K est une constante que l'on détermine par étalonnage de l'appareil de mesure.

Remarque : Un appareil absolu permet de mesurer une grandeur inconnue (ici une d.d.p V) à partir de grandeurs d'espèces différentes (une épaisseur x , une surface S , une masse m et l'accélération de la pesanteur g). Nous verrons, dans ce cours, d'autres appareils absolus : électrodynamomètres, balance de coton.

Un appareil à déviation, comporte un élément moteur (ici moteur électrostatique) qui, dans ce cas, transforme l'énergie électrique en énergie mécanique et fait correspondre, à la tension à mesurer, une déviation α repérée sur un cadran gradué. Les appareils à déviation nécessitent un étalonnage préalable.

Exercices : Chapitre II

Exercice II. 8. Champ au voisinage et à la surface d'un conducteur.

Le champ électrique, en un point M, infiniment proche de la surface d'un conducteur en équilibre, a pour expression en vertu du théorème de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

où σ est la densité de charges superficielles et \vec{n} un vecteur unitaire porté par la normale à la surface. On pose, en vertu du principe de superposition :

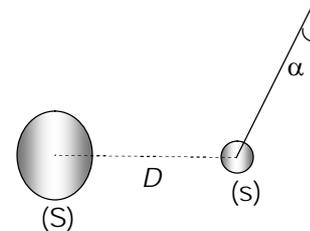
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

\vec{E}_1 est le champ créé par un élément de surface dS infiniment voisin de M et \vec{E}_2 le champ dû aux autres charges du conducteur.

En considérant un élément de surface dS circulaire et en partant du champ créé par un disque chargé avec une densité superficielle σ (Ch I, § 4.3), calculer les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 à l'intérieur, à l'extérieur et à la surface du conducteur. Retrouver le théorème de Coulomb

Exercice II. 9 Phénomène d'influence.

La figure ci-contre représente un pendule constitué d'une petite sphère conductrice (s), de centre O' de rayon r et de masse m suspendue à une potence par un fil conducteur de masse et de capacité négligeables. Cette sphère (s) est électrisée par influence à l'aide d'une seconde sphère conductrice (S) de rayon R de centre O et portée à un potentiel V . Les centres O et O' sont sur une même droite horizontale et situés à une distance $D = OO'$.



1°) Montrer que l'on peut remplacer la sphère (S), portant une charge Q , par une charge ponctuelle Q placée en O centre de (S).

2°) Décrire les phénomènes dans les deux cas suivants : a) le pendule est isolé b) le pendule est relié à la Terre.

3°) Dans le cas où le pendule est porté au potentiel zéro (il est relié à la Terre), calculer les charges Q et q portées respectivement par les sphères (S) et (s).

En déduire l'angle α que forme, à l'équilibre, le pendule avec la verticale.

A.N. $V = 3000$ volts, $R = 3$ cm, $r = 2$ mm $D = 6$ cm, $m = 50$ mg $g = 9.81$ m/s²

N.B. On montre en mathématiques, que le lieu des points, dont le rapport k des distances à deux points P et Q est constant, est une sphère centrée sur la droite PQ et qui coupe cette droite en 2 points A et B tels que ces quatre points forment une division harmonique de rapport k .

$$k = \frac{AQ}{AP} = \frac{BQ}{BP}$$

Exercice II. 10.

Une sphère conductrice S_1 , de centre O_1 et de rayon $R_1 = 10$ cm, porte une charge électrique $q_1 = 10$ nanocoulombs.

1°) Calculer son potentiel V et son énergie interne W

2°) On relie, par un fil conducteur, S_1 à une seconde sphère conductrice S_2 , initialement neutre, de centre O_2 et de rayon $R_2 = 1$ cm. Les centres des deux sphères sont séparées par une distance $d = O_1O_2 = 50$ cm. On néglige les caractéristiques du fil de jonction et on ne tient pas compte du phénomène d'influence.

Calculer, à l'équilibre, les charges q_1 et q_2 portées respectivement par S_1 et S_2 .

3°) En déduire les densités de charges correspondantes σ_1 et σ_2 et les champs E_1 et E_2

au voisinage de S_1 et S_2 .

4°) Calculer l'énergie du système formé par les deux sphères avant et après la connexion. Où est passée l'énergie perdue ?

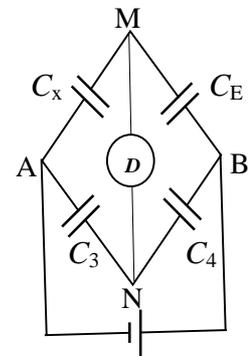
5°) Reprendre la deuxième question dans le cas particulier où la distance d est considérée comme infinie.

Exercice II. 11.. Mesure d'une capacité par une méthode de zéro.

Le pont de capacités, représenté sur la figure ci-contre, se compose de quatre condensateurs montés comme le montre cette figure. C_x est la capacité à mesurer, C_E la capacité d'un condensateur étalon, C_1 et C_2 deux capacités variables.

Ces condensateurs sont chargés par une source d'électricité qui établit entre les points A et B une différence de potentiel $V_A - V_B$. On fait varier C_1 et C_2 jusqu'à ce que le détecteur de zéro (un électromètre) indique une différence de potentiel nulle.

Exprimer la capacité inconnue en fonction des trois autres capacités. A.N. $C_1 = 4 \mu\text{F}$ $C_2 = 2 \mu\text{F}$ $C_E = 3 \mu\text{F}$.

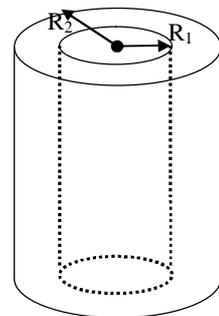


Exercice II. 12. Energie localisée dans un condensateur cylindrique.

Un condensateur cylindrique, constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$), séparées par du vide.

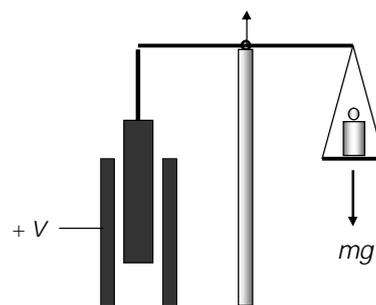
1°) Soit $V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre l'armature interne et l'armature externe du condensateur, et q_l la charge de ce condensateur par unité de longueur. Rappeler l'expression du potentiel en un point M situé entre les deux armatures et celle de la capacité C_l par unité de longueur de ce condensateur.

2°) En utilisant l'énergie emmagasinée entre les armatures, retrouver l'expression de C_l .



Exercice II. 13. Electromètre à condensateur cylindrique

L'électromètre absolu, représenté sur la figure ci-contre, se compose d'une balance dont l'un des plateaux est solidaire de l'armature interne mobile d'un condensateur cylindrique. L'armature externe est fixe. Une différence de potentiel V est appliquée au condensateur, il en résulte une force électrostatique \vec{F} . Celle-ci est équilibrée par une force $m\vec{g}$ obtenue en plaçant des masses marquées sur l'autre plateau de la balance.

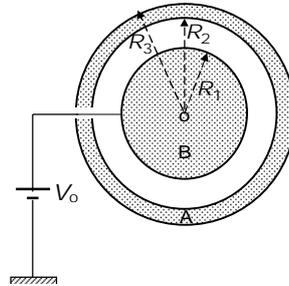


Exprimer la différence de potentiel V , que l'on doit mesurer, en fonction des caractéristiques du condensateur de m et de g .

A.N. Rayon des armatures $R_1 = 6 \text{ cm}$, $R_2 = 6,2 \text{ cm}$, $m = 5 \text{ g}$ et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Exercice II. 14. (Epreuve Finale 2010/2011, ST. Exercice noté 10 points/20)

Un conducteur sphérique creux A, initialement neutre, de rayon intérieur $R_2 = 2R$ et rayon extérieur $R_3 = 4R$ entoure un deuxième conducteur sphérique B, de rayon $R_1 = R$, porté à un potentiel V_0 par l'intermédiaire d'un générateur. (Voir figure ci-dessous). Le conducteur B porte une charge Q_0 .



1°) Quelles sont les charges portées par les surfaces intérieure et extérieure du conducteur A. Justifier.

2°) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique E dans les quatre régions suivantes :

$$r < R, \quad R < r < 2R, \quad 2R < r < 4R, \quad r > 4R.$$

3°) En considérant que V_A est le potentiel du conducteur A et sachant que le potentiel électrique est nul à l'infini, déterminer l'expression du potentiel électrique dans les quatre régions.

4°) En déduire la charge Q_0 en fonction de R , V_0 et ϵ_0 .

Chapitre III

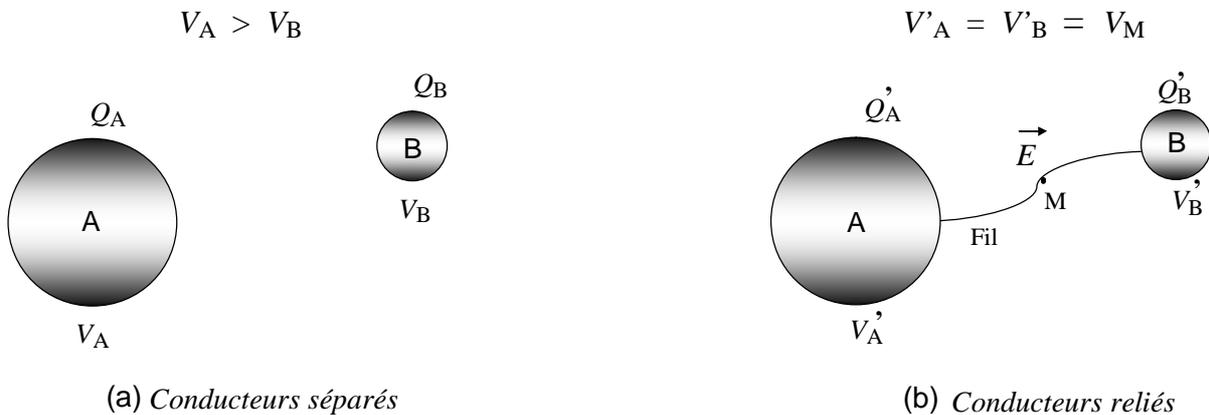
LES COURANTS CONTINUS

Nous avons traité, au premier chapitre, les phénomènes électriques dans des conditions où aucune grandeur physique n'évolue au cours du temps : c'est le cas de l'électrostatique où toutes les charges électriques sont supposées immobiles dans l'espace. Nous allons dans ce chapitre, nous intéresser au cas où ces charges se déplacent en donnant naissance à un courant électrique continu. L'étude des réseaux électriques parcourus par de tels courants sera traitée dans ce chapitre.

1. COURANTS ELECTRIQUES.

1. 1. Origine du courant électrique.

Soient deux conducteurs A et B, initialement en équilibre électrostatique, portant des charges Q_A et Q_B et dont les potentiels respectifs sont V_A et V_B tels que $V_A > V_B$ par exemple. Dans ces conditions, un champ électrique \vec{E} existe entre A et B. (Fig. III. 1.a)



Figures III.1

Lorsqu'on relie les conducteurs A et B par un fil conducteur, l'équilibre se rompt et un mouvement de charges électriques apparaît, sous l'action d'une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. Ce mouvement se poursuit jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre dans le nouveau conducteur formé par A, B et le fil (Fig. III. 1.b). Cette circulation de charges correspond au passage d'un *courant électrique* dans le fil de connexion. Ce courant est *temporaire*.

Lors de ce mouvement, la charge totale des conducteurs A et B se conserve :

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow Q_A - Q'_A = Q'_B - Q_B \Rightarrow -\Delta Q_A = +\Delta Q_B \quad (1)$$

Dans cet exemple, $V_A > V_B$, la variation de charges correspond à une diminution des charges positives ou à une augmentation des charges négatives du conducteur A.

1.2. Courant permanent.

Pour avoir une circulation permanente du courant électrique, il faut maintenir un état de déséquilibre entre les deux conducteurs A et B lorsqu'ils sont reliés. A cet effet, il est nécessaire d'amener de façon continue des charges sur l'un des conducteurs. Ceci peut être réalisé à l'aide d'appareils que l'on appelle générateurs (voir § 4)

Un courant permanent correspond à un déplacement ininterrompu de charges libres.

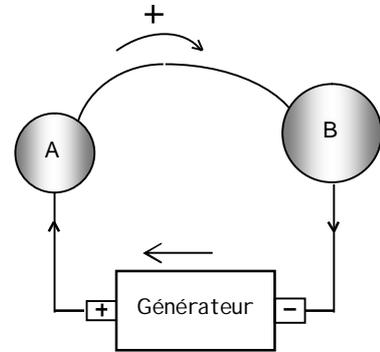


Figure III. 2

1.3. Sens conventionnel du courant.

Dans les métaux, le courant résulte d'un déplacement d'électrons, c'est à dire de charges négatives. Le sens conventionnel du courant, choisi par Ampère au début du dix neuvième siècle, est opposé à celui des électrons. Cette convention est toujours en vigueur.

Par conséquent, le courant électrique circule du pôle positif au pôle négatif à l'extérieur du générateur et du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur du générateur (figure III.2).

Dans les autres matériaux¹, le courant électrique est dû aux mouvements de différents porteurs de charges : électrons, ions positifs, ions négatifs...

Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que la conduction électrique dans les métaux.

1.4. Intensité du courant.

Soit un conducteur métallique de section S . L'intensité I du courant électrique est, par définition, la quantité d'électricité dQ qui traverse la section S pendant un intervalle de temps dt .

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

L'intensité I est exprimée en ampères² (A).

Un courant électrique est *continu* si son intensité I reste constante au cours du temps.

¹ Gaz, électrolytes, semi conducteurs, diélectriques etc.

² Pour la définition de l'ampère, voir Chapitre IV § 4.2.

1.5. Ligne de courant.

Une *ligne de courant* est la trajectoire orientée décrite par une charge positive en mouvement.

Un *tube de courant* est constitué par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

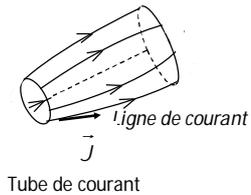


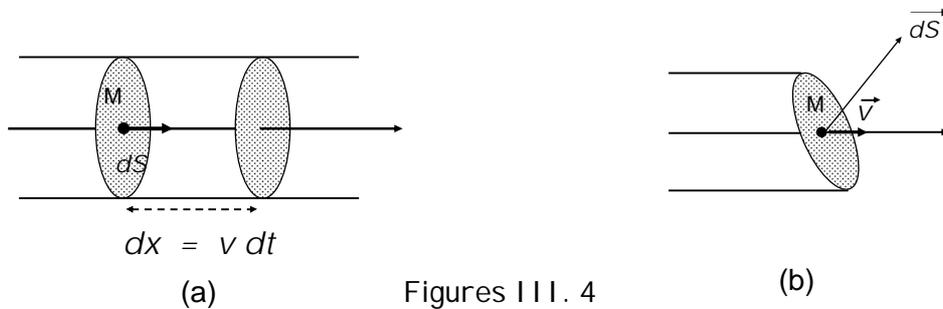
Figure III.3

1.6. Vecteur densité de courant.

Considérons un conducteur métallique, cylindrique, de section S et d'axe \overline{Ox} . Choisissons un tube de courant cylindrique dont l'axe est parallèle à \overline{Ox} et de section droite dS traversée par la quantité de charges dq (figure III.4.a).

Désignons par :

\vec{v} la vitesse de déplacement de ces charges,
et ρ leur densité volumique.



Figures III. 4

La quantité de charge dq , qui traverse la section dS perpendiculaire à l'axe du tube de courant, occupe, pendant un temps dt , un volume cylindrique

$$dV = dx dS = v dt dS,$$

et a pour valeur :

$$dq = \rho dV = \rho v dt dS,$$

\vec{v} et \overline{dS} sont ici parallèles. Dans le cas où \overline{dS} n'est plus parallèle à \vec{v} (figure III.4.b), cette expression devient :

$$dq = \rho \vec{v} \cdot \overline{dS} dt \tag{3}$$

Introduisons un vecteur \vec{J} tel que:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \tag{4}$$

L'expression (3) devient :

$$\frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot \overline{dS}$$

Si on considère, à présent, la section S du conducteur, la charge totale qui la traverse est :

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{J} \cdot \overline{dS}$$

Soit avec (2):

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

L'intensité du courant électrique apparaît comme le flux du vecteur \vec{J} à travers la surface S .

La grandeur vectorielle \vec{J} est appelée "densité de courant"³, elle est mesurée en ampères par mètre carré (A/m²).

L'expression (5) qui apparaît ici dans un cas particulier est valable dans tous les cas ; la surface S est, dans le cas général, une surface quelconque fermée ou non.

1.7. Mouvement des électrons dans le vide.

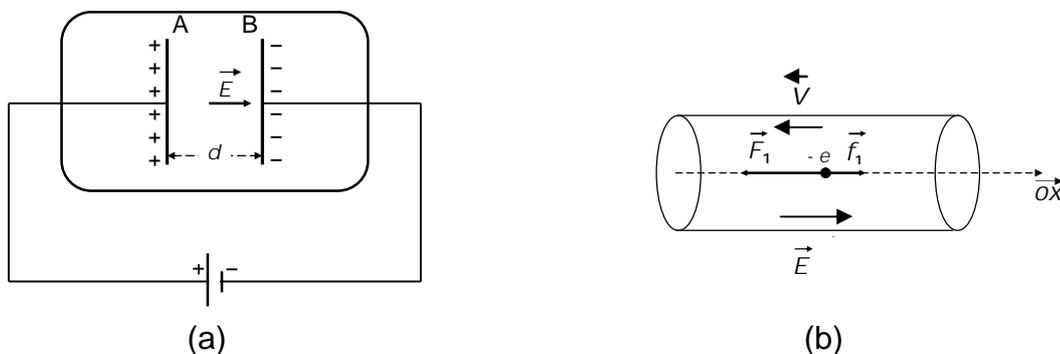
On soumet deux plaques métalliques A et B, parallèles, placées dans le vide et séparées d'une distance d , à une différence de potentiel $V = V_A - V_B$. (figure III.5.a). Ces conditions entraînent la création d'un champ électrique \vec{E} entre les deux plaques tel que :

$$E = \frac{V_A - V_B}{d} = \frac{V}{d}$$

Si un électron est émis par la plaque B, il sera soumis à une force électrique :

$$\vec{F} = -e \vec{E} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

L'accélération étant constante, le mouvement des électrons, dans le vide, est donc uniformément accéléré, ce qui n'est pas le cas dans les métaux.



Figures III. 5

1.8. Mouvement des électrons dans un conducteur.

Dans un métal (figure III.5.b), en l'absence de champ électrique, les électrons libres se déplacent dans toutes les directions. Leur vitesse moyenne est nulle, il n'y a donc pas de courant. En présence d'un champ électrique, un mouvement d'entraînement se crée, il en résulte un courant électrique.

³ Dans le cas d'un métal, la conduction est due à un déplacement d'électrons de charge $-e$. Le vecteur densité de courant s'écrit : $\vec{J} = -ne\vec{v} = \rho\vec{v}$. n est le nombre d'électrons par unité de volume.

L'étude des mécanismes de conduction dans les métaux fait appel à la mécanique quantique⁴. Néanmoins on peut considérer, en première approximation, que l'effet du réseau cristallin sur le mouvement des électrons se traduit par une force de freinage de la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{v} \quad (6)$$

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique pour l'électron (figure III. 5.b), on a :

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

où \vec{a} est l'accélération de l'électron. La projection de cette relation sur l'axe \overline{Ox} donne avec $E_x = E$:

$$-eE - k v_x = m a_x \quad \Rightarrow \quad m \frac{dv_x}{dt} + k v_x = -eE$$

ou encore :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x = -\frac{e}{m} E$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre. La solution générale est la somme de deux solutions :

- une solution de l'équation homogène (sans second membre) :

$$v_h = A \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

- et une solution particulière : $v_p = -\frac{e}{k} E$

soit :

$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E + A \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

En tenant compte de la condition initiale $v_x(0) = 0$, on obtient la constante $A = \frac{e}{k} E$.

Ce qui donne :

$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\right) = -v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (7)$$

où

$$v_l = \frac{e}{k} E \quad (8)$$

est la vitesse limite atteinte par les électrons et

$$\tau = \frac{m}{k} \quad (9)$$

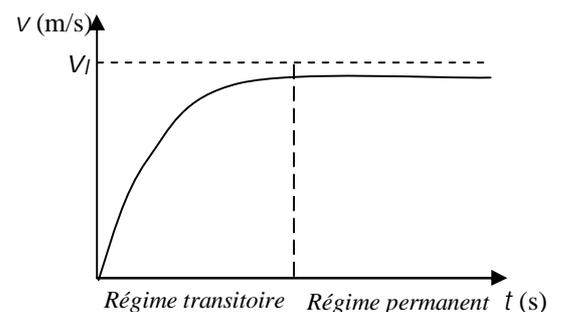


Figure III. 6

la constante de temps ou temps de relaxation.

Le module de la vitesse des électrons est représenté sur la figure III.6.

Remarques : 1°) La durée du régime transitoire étant extrêmement faible (Exercice. III. 1), ce régime peut être négligé. La vitesse des électrons dans un métal est donc égale à celle du régime permanent.

2°) L'existence d'une force de frottement dans les métaux se traduit par un dégagement de chaleur (Effet Joule § 3).

⁴ Ces mécanismes seront étudiés en troisième année de licence de physique (S6).

2. LOI d'OHM.

2.1. Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.

L'expérience montre que:

Le rapport, entre la différence de potentiel V entre deux points d'un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant, la température étant maintenue constante.

$$V = RI \quad (10)$$

C'est la loi d'Ohm. La constante R est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms (Ω).

2.2. Forme locale de la loi d'Ohm.

Conductivité σ

Un conducteur cylindrique, de longueur l et de section S , est soumis à une différence de potentiel V : il en résulte, en tout point du conducteur, un champ électrique \vec{E} tel que :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (11)$$

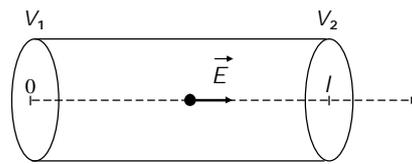


Figure III. 7

\vec{E} et $d\vec{l}$ étant parallèles, on a :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -E \int_0^l dl \quad \Rightarrow \quad V = V_1 - V_2 = El \quad (12)$$

La différence de potentiel V donne naissance à un courant électrique I dont la valeur est donnée par la loi d'Ohm (10) :

$$V = RI \quad \text{Avec (12), on a :} \quad El = RJS$$

soit :

$$J = \frac{l}{RS} E = \sigma E \quad (13) \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{l}{RS} \quad (14)$$

σ est la *conductivité* du conducteur ; elle est exprimée en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ou en siemens par mètre ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$). A partir de (14) on a l'expression de la résistance électrique :

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (15)$$

A l'échelle microscopique, on peut écrire avec (4) et (8) :

$$J = -nev = \frac{ne^2}{k} E$$

Avec (13) il vient :

$$\sigma = \frac{ne^2}{k}$$

En fonction du temps de relaxation (9), la conductivité s'écrit :

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau \quad (16)$$

L'expression (13) s'écrit, sous forme vectorielle

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (17)$$

Cette expression est générale, elle constitue la "*forme locale*" de la loi d'Ohm.

En tout point M d'un conducteur de conductivité σ , l'existence d'un champ \vec{E} entraîne l'apparition d'une densité de courant \vec{J} dont l'expression est donnée en (17)

Résistivité ρ_Ω

La résistivité est l'inverse de la conductivité : $\rho_\Omega = \frac{1}{\sigma}$ (18)

Elle s'exprime en $\Omega \cdot m$.

Dans le cas général, la résistivité dépend de la température:

$$\rho_\Omega = \rho_{\Omega 0} (1 + \alpha \Delta T) \quad (19)$$

où : $\rho_{\Omega 0}$ est la résistivité à la température $0^\circ C$, α une constante caractéristique du métal et ΔT l'élévation de température.

Mobilité μ

La vitesse est reliée au champ électrique par (8):

$$\vec{v} = \frac{e}{k} \vec{E} \quad \text{on pose} \quad \vec{v} = \mu \vec{E} \quad (20)$$

μ est la mobilité ; elle s'exprime en $m^2/V \cdot s$.

En fonction de la conductivité on a :

$$\sigma = \frac{ne^2}{k} = ne\mu \quad \text{soit} \quad \mu = \frac{\sigma}{ne} \quad (21)$$

Exercice III.1.

1°) Calculer le temps de relaxation et la mobilité des charges libres dans le cuivre.

2°) Calculer la vitesse des charges libres dans un fil de cuivre cylindrique et homogène de section $S = 2,5 \text{ mm}^2$. le fil étant parcouru par un courant $I = 10A$.

On donne la masse volumique du cuivre : $\rho_M = 8,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, sa masse atomique $M_A = 63,6g$, sa conductivité électrique $\sigma = 5,88 \cdot 10^7 S/m$ et le nombre d'Avogadro $N = 6,02 \cdot 10^{23}$. On suppose qu'il y a un électron libre par atome de cuivre.

($e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

Solution III.1. 1°) La conductivité est reliée au temps de relaxation par (16) $\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau$

Le nombre d'électrons par m³ $n = \frac{\rho_M}{M_A} N \Rightarrow n = \frac{8,8 \cdot 10^3}{63,6 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{23} = 0,83 \cdot 10^{29}$ et

Le temps de relaxation est : $\tau = \frac{m_e}{ne^2} \sigma$ soit $\tau = 2,5 \cdot 10^{-14}$ s

La mobilité des électrons dans le cuivre a pour valeur : $\mu = \frac{\sigma}{ne} = 4,4 \cdot 10^{-3}$ m²/V.s.

2°) On obtient à partir de l'expression de la densité de courant (4) $J = nev$, la vitesse des électrons :

$$v = \frac{J}{ne} \quad \text{avec} \quad J = \frac{I}{S} = 4 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2 \Rightarrow v = 0,31 \text{ mm/s}$$

Remarque : La durée du régime transitoire est très courte et peut être négligée

La résistance électrique d'un conducteur cylindrique de longueur l et de section S , s'exprime, comme le montre l'équation 14, en fonction de sa résistivité ρ_Ω , par :

$$R = \rho_\Omega \frac{l}{S} \tag{22}$$

Dans le cas d'un conducteur de forme quelconque, la résistance peut être calculée à partir de la loi d'Ohm.

Exercice III.2. Exemple de calcul de résistance d'un conducteur

Calculer l'expression de la résistance d'un conducteur annulaire cylindrique, homogène de conductivité σ , dont les faces sont des cylindres de rayons r_1 , r_2 et de longueur l . Elles sont soumises à une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$.

Solution III.2.

En raison de la symétrie du problème, les équipotentielles sont des cylindres coaxiaux de surface S et les lignes de champ et de courant sont radiales.

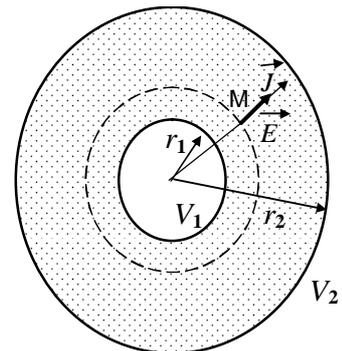
En tout point M, à l'intérieur du conducteur règne un champ \vec{E} tel que :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En intégrant de r_1 à r_2 , il vient

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

D'après la loi d'Ohm on a : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$



d'où
$$V = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \vec{J} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} J dr \tag{a}$$

D'autre part l'intensité du courant est :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit} \quad I = J l \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r l J \Rightarrow J = \frac{I}{2\pi l r} \tag{b}$$

En effet \vec{J} reste constant et perpendiculaire à la surface $S = 2\pi r l$, donc parallèle à $d\vec{S}$

A partir de (a) et (b), on peut écrire :

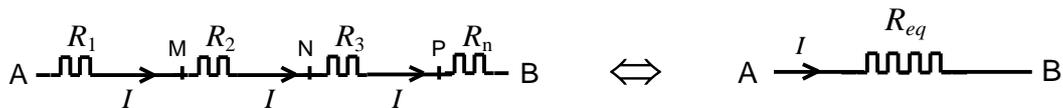
$$V = \frac{1}{2\pi l} \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{r} dr = \frac{1}{2\pi l} \frac{I}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \quad \text{soit} \quad V = \frac{1}{2\pi l \sigma} I \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Sachant que $V = RI$, on en déduit :

$$R = \frac{1}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

2.3. Groupement de résistances.

Groupement en série. Le même courant I traverse toutes les résistances, montées en série.



Figures III. 8

$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_N) + (V_N - V_P) + \dots \quad \text{soit}$$

$$V_A - V_B = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = R_{eq} I \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (23)$$

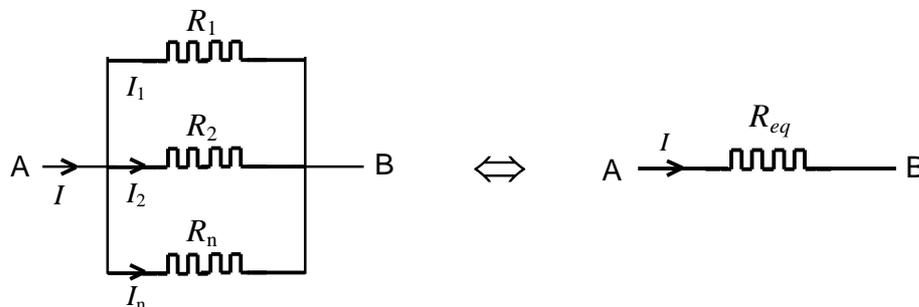
La résistance équivalente est égale à la somme des résistances.

Groupement en parallèle. A présent la même différence de potentiel $V = V_A - V_B$ est appliquée aux bornes des résistances, par conséquent :

$$V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_n I_n$$

et
$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

donc
$$\frac{V_A - V_B}{R_{eq}} = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + \dots + \frac{V_A - V_B}{R_n}$$



Figures III. 9

d'où la résistance équivalente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (24)$$

Exercice III.3. 1°) Deux résistances $R_1 = (1,25 \pm 0,01) \Omega$ et $R_2 = (4,52 \pm 0,02) \Omega$ sont montées en série. Calculer la résistance équivalente R_S et l'erreur ΔR_S .
2°) Même question si les deux résistances sont montées en parallèle.

Solution III.3. 1°) $R_S = R_1 + R_2 = (1,25 + 4,52) \Omega = 5,77 \Omega$
 $\Delta R_S = \Delta R_1 + \Delta R_2 = (0,01 + 0,02) \Omega = 0,03 \Omega \Rightarrow R_S = (5,77 \pm 0,03) \Omega$

$$2^\circ) \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0,982 \Omega$$

Calcul d'erreur: La dérivée logarithmique de l'expression précédente est :

$$\frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1 + R_2} - \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

Soit

$$\frac{dR}{R} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{dR_1}{R_1} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{dR_2}{R_2}$$

On passe aux erreurs :

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{\Delta R_1}{R_1} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{\Delta R_2}{R_2} = 0,72\% \Rightarrow R_p = (0,982 \pm 0,007) \Omega$$

3. L'EFFET JOULE.

La circulation d'un courant I à travers un conducteur électrique, entraîne une perte d'énergie qui se traduit par un échauffement. On peut déterminer l'énergie dissipée pendant le passage du courant.

Si dq est la quantité de charge qui passe d'un point A à un point B du conducteur, le travail des forces électriques est :

$$dW = (V_A - V_B) dq \quad (25)$$

Cette quantité de charge est reliée au courant par : $dq = I dt$

D'où :

$$dW = (V_A - V_B) I dt$$

Si R est la résistance de ce conducteur, on a d'après la loi d'Ohm:

$$V = V_A - V_B = RI$$

Le travail s'écrit alors :

$$dW = V I dt = RI^2 dt \quad (26)$$

Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur : c'est l'*effet Joule*

Elle correspond à une puissance :

$$p = \frac{dW}{dt} = RI^2 \quad (27)$$

soit $p = \frac{V^2}{R} \quad (28)$ ou $p = VI \quad (29)$

Comme V et I sont constants, la puissance p reste constante au cours du temps.

Densité de puissance dissipée par effet Joule.

Dans le cas d'un conducteur cylindrique (figure III.7), l'expression (27) s'écrit :

$$p = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} (J.S)^2 = \frac{1}{\sigma} J^2 V$$

V est le volume du conducteur. En tout point M, la densité de puissance dissipée par effet Joule est :

$$\pi = \frac{p}{V} = \frac{1}{\sigma} J^2 \quad \text{soit} \quad \pi = J E$$

Comme les vecteurs \vec{J} et \vec{E} sont parallèles on peut écrire :

$$\pi = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (30)$$

Cette formule est générale.

4. GENERATEURS ÉLECTRIQUES.

4.1. Définitions.

Un générateur électrique est un dispositif qui, placé dans un circuit électrique, est capable de maintenir un champ électrique. Ce dernier, en déplaçant les charges mobiles, assure la circulation du courant électrique et le transport de l'énergie à travers le circuit. Notons que cette énergie n'est pas créée par le générateur, ce dernier ne fait que transformer une forme d'énergie, mécanique, chimique, lumineuse etc.. en une énergie électrique⁵.

On distingue deux types de générateurs :

Un générateur de tension est un dispositif capable de maintenir une différence de potentiel constante à ses bornes, quelque soit le circuit extérieur.

Un générateur de courant est un appareil qui délivre un courant pratiquement constant, quelque soit le circuit extérieur.

Dans ce cours, nous ne considérons que les générateurs de tension.

4.2. Générateur à vide: Force électromotrice (f.é.m)

Dans ce cas, le générateur ne débite pas de courant électrique ; les charges, qu'il renferme sont immobiles. Une quantité de charge élémentaire dq est soumise à l'action

$$\text{- d'une force électrostatique :} \quad \overline{dF_s} = dq \vec{E}_s \quad (31)$$

$$\text{- d'une force produite par le générateur:} \quad \overline{dF_m} \quad (32)$$

appelée "*force motrice*".

\vec{E}_s désigne ici le champ électrostatique.

⁵ La pile transforme de l'énergie chimique en une énergie électrique, le dynamo transforme de l'énergie mécanique en une énergie électrique.

Comme les charges sont immobiles, on a :

$$\overrightarrow{dF_s} + \overrightarrow{dF_m} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dF_m} = - dq \vec{E}_s$$

Cette condition, n'est satisfaite que si la force motrice est, elle aussi, proportionnelle à dq . On écrit alors :

$$\overrightarrow{dF_m} = dq \vec{E}_m \tag{33}$$

Le vecteur \vec{E}_m est appelé "*champ électromoteur*"⁶.

A vide :

$$\vec{E}_s = - \vec{E}_m \tag{34}$$

La différence de potentiel aux bornes du générateur est :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_s \cdot \overrightarrow{dl} \quad \text{soit} \quad V_A - V_B = \int_B^A \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{dl} \tag{35}$$

Cette quantité

$$e = V_A - V_B \tag{36}$$

est une caractéristique du générateur ; c'est sa *force électromotrice*⁷. (*f.é.m.*), elle est mesurée en volts :

$$e = \int_B^A \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{dl} \tag{37}$$

l'expression (37) montre que le champ électromoteur ne dérive pas d'un potentiel.

4. 3.Générateur en charge.

Le générateur débite, à travers un circuit extérieur, un courant électrique I . Par convention, le courant sort par la borne positive A du générateur et rentre par sa borne négative B

En charge c'est le champ total

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$$

qui intervient. En chaque point on a :

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E}_s + \vec{E}_m) = \sigma \vec{E} \tag{38}$$

La circulation, dans le générateur, du champ total de B à A (c'est le sens du courant comme le montre la figure III.10) est :

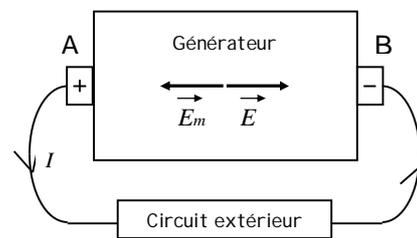


Figure III. 10

⁶ Le concept de "*champ électromoteur*" sera réintroduit au chapitre V lors de l'étude de l'induction électromagnétique. Ainsi, le champ électrique \vec{E} se compose de deux champs : le champ électrostatique \vec{E}_s et le champ électromoteur $\vec{E}_m \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$

⁷ Le terme "*force électromotrice*" peut prêter à confusion, il ne s'agit pas d'une force telle qu'elle est définie en mécanique, mais d'une grandeur qui a la dimension d'un potentiel.

$$\int_B^A (\vec{E}_S + \vec{E}_m) \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{E}_S \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = (V_B - V_A) + e = \frac{J}{\sigma} l$$

En multipliant et en divisant le dernier terme par S , section traversée par le courant, on a :

$$(V_B - V_A) + e = r I$$

où r est la résistance interne du générateur.

Par conséquent :

$$V_A - V_B = e - r I \quad (39)$$

$V_A - V_B$ est la différence de potentiel utilisable aux bornes du générateur. La loi d'Ohm appliquée au circuit extérieur, de résistance R , donne :

$$V_A - V_B = R I \quad (40)$$

D'où

$$e = (R + r) I \quad (41)$$

La relation (41) exprime *la loi de Pouillet*, établie expérimentalement en 1837 par le physicien français Claude Pouillet.

Bilan énergétique et rendement:

Le générateur transforme l'énergie qu'il reçoit, sous forme mécanique ou chimique par exemple, en énergie électrique.

Toute charge élémentaire dq , qui traverse le générateur reçoit une énergie dW égale au travail de B à A de la force motrice :

$$d\vec{F}_m = dq \vec{E}_m \quad \Rightarrow \quad dW = \int_B^A dq \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = e dq$$

En faisant intervenir le courant électrique, on a :

$$dW = e I dt$$

La puissance instantanée fournie par le champ électromoteur est :

$$p = \frac{dW}{dt} = e I$$

En courant continu, cette quantité reste constante au cours du temps ; elle est égale à la puissance moyenne :

$$P = e I \quad (42)$$

En multipliant les deux membres de l'expression (41)

$$e = (R + r) I$$

par I , on obtient

$$e I = (R + r) I^2$$

Avec (42), il vient :

$$P = RI^2 + rI^2 \quad (43)$$

Le premier terme RI^2 représente la puissance consommée dans le circuit extérieur et le second rI^2 la puissance dissipée dans le générateur.

Le rendement η d'un générateur est défini comme étant le rapport entre la puissance $P' = (V_A - V_B)I$ utilisable dans le circuit extérieur et la puissance $P = eI$ absorbée par le générateur. Il s'écrit :

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{V_A - V_B}{e}$$

Notons que dans le cas d'un générateur idéal, la tension utilisable à ses bornes est confondue avec sa f.é.m : son rendement est alors égal à 1. Dans le cas du générateur réel, $V_A - V_B$ est toujours inférieure à e et le rendement du générateur est donc inférieur à 1.

Exercice III.4. Puissance dissipée dans une résistance

On considère un générateur (e, r) aux bornes duquel est branchée une résistance R .

1°/ Calculer la puissance dissipée dans la résistance R .

2°/ Pour quelle valeur de R , cette puissance est maximale

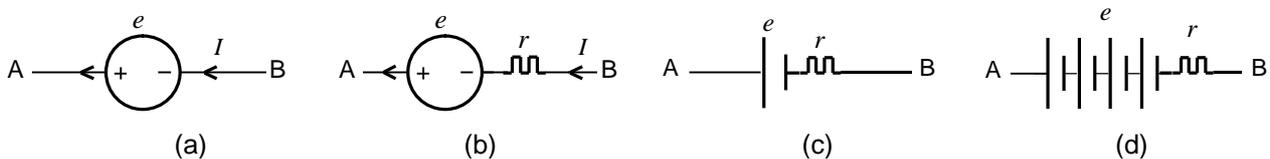
Solution III.4 1°/ La puissance dissipée dans la résistance R s'écrit :

$$P = RI^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{e}{r + R} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Re^2}{(R + r)^2}$$

$$2^\circ / \text{ Cette puissance est maximale si } \frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R = r \Rightarrow P_{\text{Max}} = \frac{e^2}{4r}$$

Schéma équivalent d'un générateur.

Générateur de tension idéal : un générateur de tension idéal ne possède pas de résistance interne ; il délivre une tension égale à sa f.é.m e quelque soit le courant débité. Il est modélisé par le schéma de la figure III.11.a:



Figures III. 11

Générateur de tension réel : un générateur de tension réel est modélisé par la mise en série d'un générateur de tension idéal et d'une résistance r appelée résistance interne du générateur. (voir la figure III.11.b). Dans ce qui suit, on ne considère que des piles (schéma c) ou des batteries d'accumulateurs⁸ (schéma d).

⁸ La différence entre une pile et un accumulateur est que ce dernier peut être rechargé, alors qu'une pile, une fois déchargée, ne peut plus être utilisée.

Noter que le courant électrique entre par la borne négative et ressort par la borne positive du générateur.

4. 4. Association de générateurs.

Association en série

Soient N générateurs (e_i, r_i) montés en série, c'est-à-dire de façon que le pôle positif du $i^{ème}$ générateur soit relié au pôle négatif du $(i + 1)^{ème}$ générateur. La figure III.12, qui représente ce montage dans le cas de N piles, montre qu'un seul et même courant I traverse chacun d'eux.

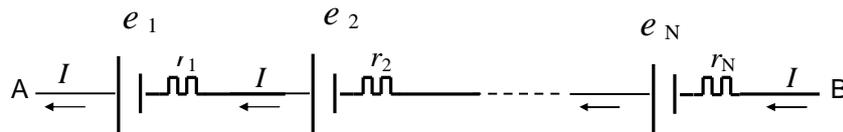


Figure III.12

La différence de potentiel aux bornes du $i^{ème}$ générateur s'écrit : $V_{i+} - V_{i-} = e_i - r_i I$
 La différence de potentiel aux bornes de l'ensemble des générateurs s'écrit :

$$V_A - V_B = (e_1 + e_2 + \dots + e_N) - (r_1 I + r_2 I + \dots + r_N I) = e - r I$$

Cette différence de potentiel correspond à celle d'un générateur unique de f.é.m e et de résistance interne r , tel que :

$$\begin{cases} e = e_1 + e_2 + \dots + e_i + \dots + e_N \\ r = r_1 + r_2 + \dots + r_i + \dots + r_N \end{cases} \quad (44)$$

Si plusieurs générateurs sont associés en série, leurs forces électromotrices et leurs résistances s'ajoutent.

Une telle association présente un avantage et un inconvénient. Son avantage réside dans l'obtention d'une f.é.m plus grande que celles des générateurs utilisés. La valeur importante de la résistance interne du générateur équivalent obtenu présente l'inconvénient de ce type d'association.

Association en parallèle

Soient N générateurs (piles) identiques (e, r) montés en parallèle. La figure 13 montre que le générateur équivalent débite un courant d'intensité I égale à la somme des intensités que débite chaque générateur

$$I = \sum_{i=1}^N I_i \quad (45)$$

La différence de potentiel entre les bornes A et B est :

$$V_A - V_B = e - r \frac{I}{N} = e - \left(\frac{r}{N} \right) I$$

La résistance interne du générateur équivalent est N fois plus faible que celle de chaque générateur.

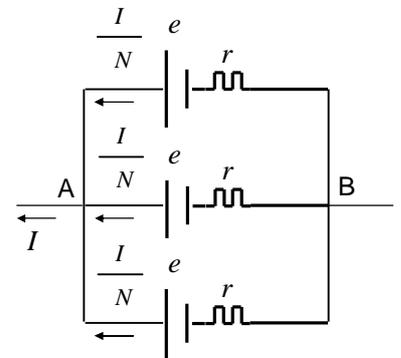


Figure III. 13.

5. RECEPTEURS.

Les récepteurs sont des systèmes qui, parcourus par un courant électrique, transforment l'énergie électrique sous une autre forme d'énergie. Les récepteurs actifs fournissent de l'énergie mécanique, chimique, lumineuse etc... Par contre, les récepteurs passifs, comme les résistances, dissipent l'énergie absorbée sous forme de chaleur.

5.1. Force contre électromotrice "f.c.é.m" d'un récepteur.

Un récepteur exerce sur les charges électriques qui le traversent, une force résistante. Celle-ci est due à un *champ contre électromoteur* \vec{E}_C . Le travail de ce champ donne naissance à une force contre électromotrice e' , exprimée par le rapport entre l'énergie électrique transformée par le récepteur et la quantité de charge Q qui le traverse pendant un temps t .

5.2. Schéma équivalent d'un récepteur.

Comme pour les générateurs, un récepteur peut être modélisé comme suit :

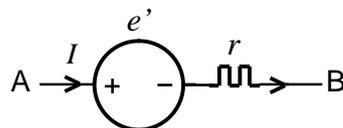


Figure III. 14

Dans un récepteur, le courant entre par la borne positive de ce dernier et sort par sa borne négative.

- e' représente la f.c.é.m du récepteur.
- r est sa résistance interne.

5.3. Différence de potentiel "d.d.p" aux bornes d'un récepteur.

Un récepteur placé dans un circuit parcouru par un courant I , reçoit du reste du circuit une puissance totale égale au produit de la différence de potentiel $V_A - V_B$ à ses bornes par le courant I qui le parcourt. Elle s'écrit : $P = (V_A - V_B) I$. Une partie de cette puissance est dissipée par effet Joule à l'intérieur du récepteur et a pour expression : rI^2 . L'autre partie est transformée sous une autre forme, elle s'écrit : $e'I$. Le principe de conservation de l'énergie nous permet d'écrire :

$$(V_A - V_B) I = e'I + rI^2$$

Soit : $(V_A - V_B) = e' + rI$

5.4. Rendement d'un récepteur.

Comme pour les générateurs, on définit le rendement η d'un récepteur comme étant le rapport entre la puissance utilisable qu'il délivre ($e'I$) et la puissance qu'il consomme $(V_A - V_B) I$. Il s'écrit :

$$\eta = \frac{e'I}{(V_A - V_B)I} = \frac{e'}{(V_A - V_B)}$$

6. ANALYSE D'UN RESEAU ELECTRIQUE.

6. 1. Définitions.

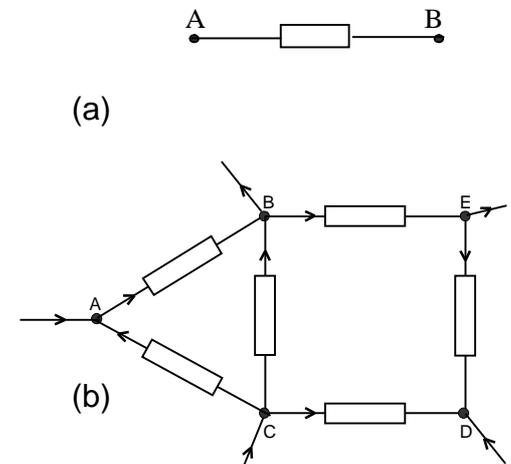
Dipôle: un dipôle est un élément électrique qui possède une borne d'entrée et une borne de sortie. Il est qualifié d'actif lorsqu'il fournit de l'énergie (cas d'un générateur) et de passif lorsqu'il en consomme. (figure III.15.a)

Réseau: est un circuit complexe constitué d'un ensemble de dipôles (résistances, générateurs, récepteurs...) reliés entre eux (figure III.15.b)

Nœud: on appelle nœud, un point tel que A, où aboutissent au moins trois dipôles du réseau.

Branche: une branche est une portion du réseau telle que AB, comprise entre deux nœuds.

Maille: une maille du réseau est constituée par un ensemble de branches, formant un circuit fermé tel que ABC.



Figures III.15

6. 2. Lois de Kirchhoff.

Etablies en 1845 par le physicien allemand Gustav Kirchhoff, ces lois, au nombre de deux, expriment la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique.

Loi des nœuds

Aux nœuds A, B, C, de la figure 15.b, on applique le principe de la conservation de la charge électrique. En effet, les charges ne peuvent pas s'accumuler en un point quelconque du circuit, donc :

La somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en ressortent.

C'est la première loi de Kirchhoff :

Dans le cas de la figure III.16, on a :

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Cette loi peut être traduite mathématiquement par l'expression :

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

(46)

où I_i désigne la valeur algébrique du $i^{\text{ème}}$ courant. Cette valeur est affectée du signe (+) si le courant arrive au nœud considéré et du signe (-) s'il s'en éloigne.

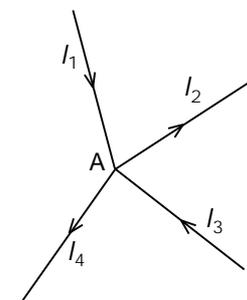


Figure III.16.

Loi des mailles

Elle constitue une généralisation de la loi d'Ohm :

$$\sum (e - RI) = 0 \quad (47)$$

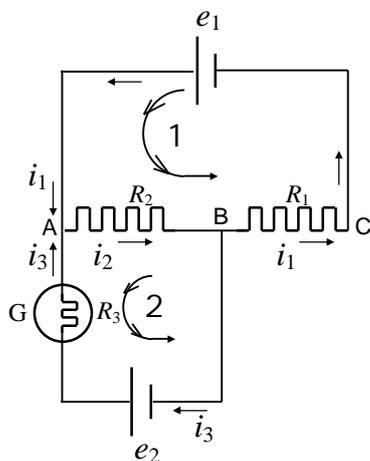
On procède de la manière suivante :

On choisit, sur chaque branche, un sens du courant arbitraire. On choisit un sens de parcours de la maille arbitraire. Chaque terme RI est affecté d'un signe (+) si le sens du parcours choisi coïncide avec le sens du courant. Sinon on l'affecte du signe (-).

La f.é.m. (ou f.c.é.m) e est affectée du signe du pôle par lequel on sort du générateur (ou du récepteur).

Exercice III. 5. Méthode d'opposition

On considère le montage représenté sur la figure, où e_1 et e_2 désignent les f.é.m de deux



piles électriques, R_1 et R_2 deux résistances variables. Un galvanomètre G très sensible, de résistance interne R_3 , est placé en série avec la deuxième pile sur la branche AB.

1°) Calculer le courant i_3 qui traverse le galvanomètre.

A.N. $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$, et $R_3 = 0,01 \Omega$,

$e_1 = 3$ volts et $e_2 = 3,2$ volts.

2°) On remplace la deuxième pile par une pile dont on veut mesurer la force électromotrice e_x . puis on fait varier les résistances R_1 et R_2 jusqu'à ce que le galvanomètre indique $i_3 = 0$. Les valeurs des résistances sont, dans ce cas, $R_1 = 750 \Omega$, et $R_2 = 360 \Omega$. Calculer la f.e.m de la nouvelle pile.

Solution III. 5. 1°) Les sens des courants et des parcours des mailles étant choisis arbitrairement comme l'indique la figure, on applique :

La loi des nœuds en A :

$$i_1 + i_3 = i_2$$

La loi des mailles :

$$\sum (e - Ri) = 0$$

Maille 1 :

$$e_1 - R_2 i_2 - R_1 i_1 = 0$$

Maille 2 :

$$-e_2 + R_3 i_3 + R_2 i_2 = 0$$

On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues d'où :

$$i_3 = \frac{-R_2 e_1 + (R_1 + R_2) e_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = 6,6 \text{ mA}$$

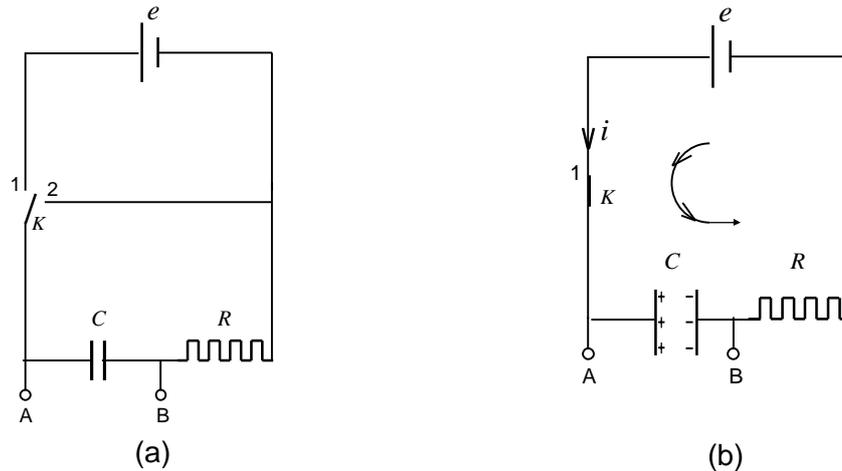
2°) On remplace, dans le résultat précédent, e_2 par e_x . A l'équilibre $i_3 = 0$

$$e_x = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_1 = 0,97 \text{ volts}$$

7. CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR.

Dans les paragraphes précédents, les grandeurs électriques considérées (intensité du courant électrique, différence de potentiel...) étaient supposées indépendantes du temps : elles appartiennent au domaine des régimes permanents ou stationnaires.

Dans ce qui suit, nous considérons le régime transitoire ou lentement variable (c'est à dire une succession de régimes stationnaires), pour lequel on suppose qu'à chaque instant t , la loi d'Ohm reste valable : c'est le cas de la charge et de la décharge d'un condensateur.



Figures III.17

Considérons le circuit de la figure III.17.a, formé d'un générateur idéal de f.é.m e , d'une résistance R , d'un interrupteur K et d'un condensateur de capacité C initialement déchargé.

7.1. Etude de la charge du condensateur.

L'interrupteur K est en position 1 : dès que l'interrupteur K est mis en position 1, un courant i commence à circuler dans le circuit de la figure III.17.b En effet, les électrons quittent la borne négative du générateur, traversent la résistance R et s'accumulent sur la plaque B du condensateur. La plaque A se charge alors positivement par phénomène d'influence.

Au fur et à mesure que le condensateur se charge, le courant i diminue jusqu'à ce que la d.d.p entre les armatures du condensateur soit égale à la f.é.m du générateur. Un régime d'équilibre est alors atteint lorsque i devient égal à zéro.

Afin d'établir l'équation de la charge du condensateur, on applique la deuxième loi de Kirchhoff à la maille du circuit de la figure III.17.b. On obtient alors,

$$V_c + Ri(t) - e = 0$$

où :

$$V_c = \frac{q(t)}{C}$$

est la d.d.p entre les armatures du condensateur

et
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

l'intensité du courant qui circule dans le circuit pendant la charge.

Soit
$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = e \quad (48)$$

C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre avec second membre. En utilisant la même méthode⁹ qu'au § 1.8, avec les conditions initiales

$$\begin{cases} t=0s \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow K = \ln(Ce) \quad (49)$$

on trouve les expressions de la quantité de charge $q(t)$ et du courant $i(t)$:

$$q(t) = Ce \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right) \quad (50)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (51)$$

La grandeur RC que l'on notera τ , a la dimension d'un temps et est appelée "*constante de temps du circuit*".

A partir des graphes représentant Les évolutions en fonction du temps de $q(t)$ et $i(t)$ (figures III.18), plusieurs constatations émergent, à savoir :

⁹ Voici une autre méthode pour résoudre l'équation (48). On peut l'écrire sous la forme:

$$\frac{dq}{q - Ce} = -\frac{dt}{RC}$$

En intégrant cette équation, on obtient :

$$\int \frac{dq}{q - Ce} = \int -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln(|q - Ce|) = -\frac{t}{RC} + K \quad (52)$$

A la fin de la charge, le condensateur aura accumulé une quantité de charge q telle que :

$$V_c = \frac{q}{C} = e.$$

La charge q accumulée à un instant quelconque t est inférieure à Q . L'équation (52) devient alors :

$$\ln(Ce - q) = -\frac{t}{RC} + K \quad (53)$$

Où K est une constante d'intégration, qu'on peut facilement déterminer à partir des conditions initiales. En effet,

$$\begin{cases} t=0s \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow K = \ln(Ce)$$

Lorsqu'on remplace dans l'équation (53), K par cette valeur, on obtient :

$$\ln\left(1 - \frac{q}{Ce}\right) = -\frac{t}{RC}$$

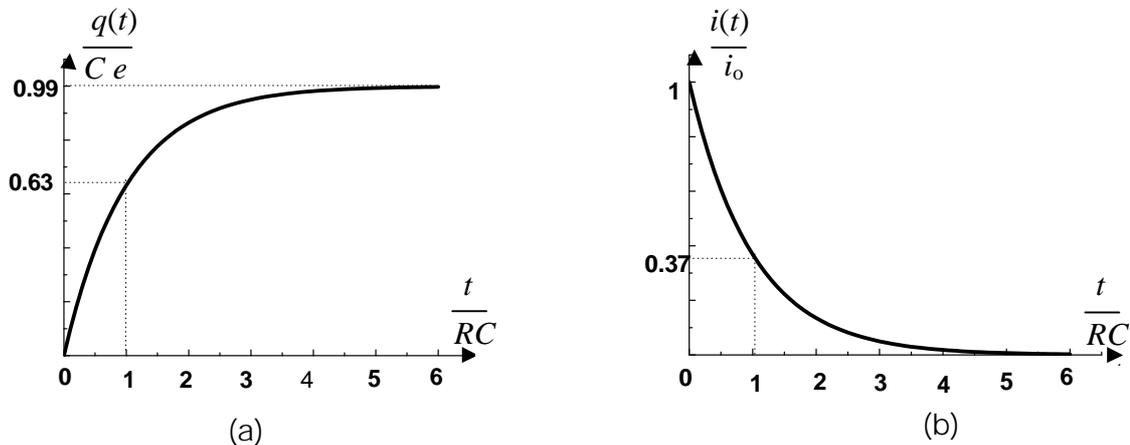
D'où l'expression de la quantité de charge $q(t)$:

$$q(t) = Ce \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right)$$

La constante de temps $\tau = RC$ représente le temps nécessaire pour que le condensateur atteigne 63% de sa charge totale. Donc, τ permet la mesure de la vitesse à laquelle le condensateur se charge.

Un condensateur ne se charge pas instantanément lorsqu'on le relie à un générateur.

- La charge q n'atteint jamais tout à fait la valeur maximale Ce . En effet, au bout d'une durée égale à 5τ , le condensateur atteindra 99% de sa charge finale.



Figures III. 18

Pratiquement, la charge finale d'un condensateur est atteinte au bout d'une durée de 5τ : c'est la durée du régime transitoire.

- A $t = 0$ s, le courant i vaut $i_0 = \frac{e}{R}$ (la d.d.p. entre les armatures du condensateur est nulle). Il diminue d'une façon exponentielle avec le temps, et au bout d'une durée égale à τ , il atteint 37% de sa valeur initiale.

Ordre de grandeur de la constante de temps τ : pour un condensateur de capacité $C = 1\mu F$ et une résistance $R = 200\Omega$ on a une constante de temps $\tau = RC = 2 \cdot 10^{-4}$ s.

En général, un condensateur se charge totalement en un temps très court.

Bilan d'énergie

Après multiplication des membres de l'équation (48) par $idt = dq$, il vient :

$$Ri^2 dt = e dq - \frac{1}{C} q dq \quad (54)$$

D'où,

$$\int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^{Ce} e dq - \int_0^{Ce} \frac{1}{C} q dq$$

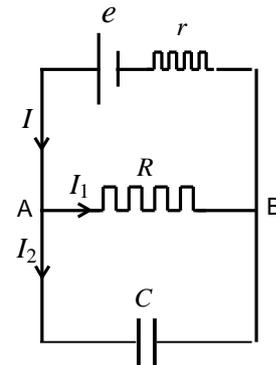
Ce qui donne :

$$\int_0^\infty Ri^2 dt = Ce^2 - \frac{1}{2} Ce^2 \begin{cases} Ce^2 & = \text{énergie fournie par le générateur} \\ \frac{1}{2} Ce^2 & = \text{énergie emmagasinée par le condensateur} \end{cases}$$

L'énergie dissipée par effet Joule dans R est donc égale à $\frac{1}{2} Ce^2$

Exercice III.6.

Soit le circuit de la figure ci-contre, constitué d'un générateur réel (e , r), d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C .



Sachant qu'à $t=0s$, le condensateur était complètement déchargé :

1°/ Ecrire l'équation différentielle qui régit la charge du condensateur. En déduire l'expression de $q(t)$.

2°/A quel instant on peut dire que le condensateur s'est totalement chargé?

3°/Calculer les courants qui circulent dans ce circuit en régime permanent

A.N : $E = 5 \text{ V}$, $r = 50 \Omega$, $R = 5 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \mu \text{ F}$

Solution III. 6.

1°/ On applique la première loi de Kirchhoff au nœud A : $I = I_1 + I_2$ (a)

La différence de potentiel, entre les points A et B, est :

$$V_{AB} = e - rI \quad (b), \quad V_{AB} = RI_1 \quad (c) \quad \text{et} \quad V_{AB} = \frac{1}{C}q \quad (d)$$

$$\text{Or} \quad I_2 = \frac{dq}{dt} \quad (e), \quad (c) \Rightarrow I_1 = \frac{V_{AB}}{R} \quad \text{avec} \quad (d) \quad I_1 = \frac{1}{RC}q \quad (f)$$

A partir de (a), (e) et (f), il vient :

$$I = \frac{1}{RC}q + \frac{dq}{dt} \quad (g)$$

$$(b) \Rightarrow I = \frac{e - V_{AB}}{r} \quad \text{et avec} \quad (d) \quad I = \frac{e}{r} - \frac{q}{rC} \quad (h)$$

A partir de (g) et (h) on obtient :

$$\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) \frac{1}{C} q = \frac{e}{r} \quad \text{ou bien} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau} q = \frac{e}{r} \quad (j)$$

où : $\tau = \frac{rR}{r+R} C = 49,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ est le temps de relaxation.

La solution générale de l'équation (j) est :

$$q(t) = \frac{e}{r} \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad \text{avec} \quad q_0 = \frac{e}{r} \tau = 4,95 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2°/ Calculons la valeur de la charge pour différentes valeurs de t :

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	5τ
q/q_0	0.63	0.86	0.95	0.98	0.993	0.997	0.999

A l'instant $t = 5\tau$, le condensateur peut être considéré complètement chargé

3°/ En régime permanent, on a :

$$I_2 = 0 \text{ mA} \quad \text{et} \quad I = I_1 = \frac{e}{r+R} = 0,99 \text{ mA}$$

7.2. Etude de la décharge du condensateur .

Le condensateur ayant atteint sa charge finale $C e$, plaçons l'interrupteur K (Figure III.17.a) en position 2.

Il en résulte un courant i en provenance de la plaque du condensateur chargée positivement. Il se dirige vers l'autre plaque en traversant la résistance R (figure III.19).

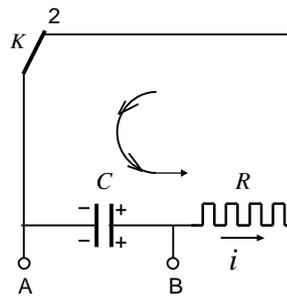


Figure III.19

Afin d'établir l'équation de la décharge du condensateur, on écrit la loi de la maille du circuit de la figure III.19, en choisissant comme sens positif de parcours de la maille, le sens réel du courant. On obtient alors,

$$V_c = Ri(t) \text{ avec } \begin{cases} V_c = \frac{q}{C} = \text{d.d.p entre les armatures du condensateur} \\ i(t) = -\frac{dq}{dt} > 0 \text{ (on a une diminution de la charge, (dq}<0)) \end{cases}$$

L'équation ci-dessus devient :

$$\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt} \tag{55}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, sans second membre.

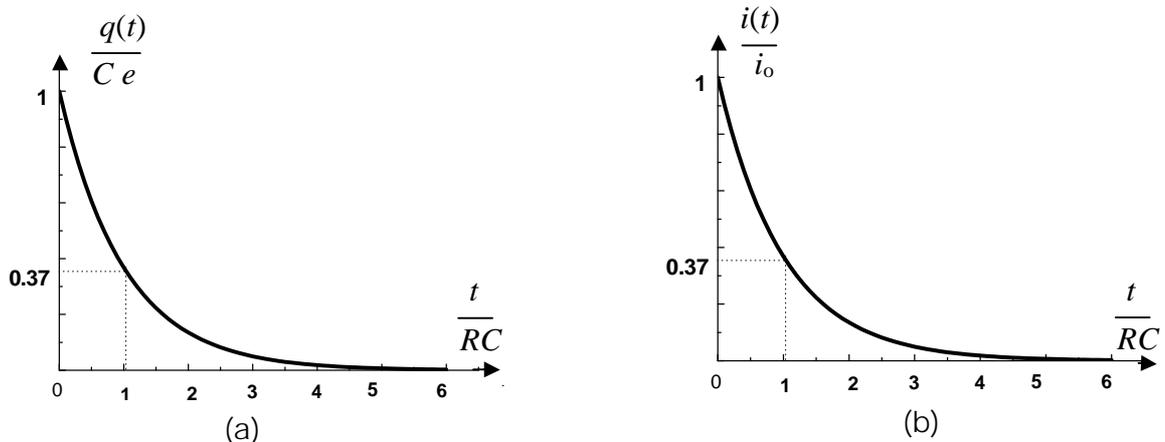
En tenant compte des conditions initiales ($t = 0s, q = C e$), l'équation (55) aura pour solution :

$$q(t) = C e \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{56}$$

Le courant de décharge est directement déduit à partir de l'équation (56). Il s'écrit :

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{e}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{57}$$

Les évolutions de $q(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps sont représentées par les graphes de la figure III.20.



Figures III.20

Il est à noter que dans ce cas, le condensateur perd au bout d'une durée égale à τ , 63% de sa charge initiale.

Exercices : Chapitre III

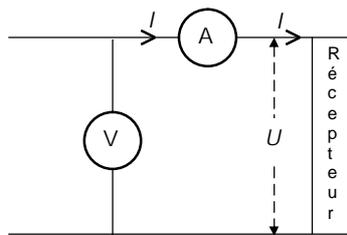
Exercice III.7. Calcul d'une résistance.

Calculer l'expression de la résistance d'un conducteur, homogène de conductivité σ , dont les faces sont des sphères concentriques, de rayons r_1 et r_2 , soumises à une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$.

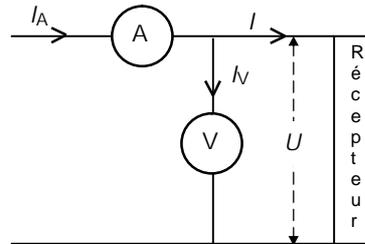
Exercice III. 8. Montage amont, montage aval.

1°) Mesure de puissance : Pour mesurer la puissance électrique P consommée par un récepteur, il suffit d'utiliser un ampèremètre et un voltmètre. On obtient la puissance mesurée P_m en multipliant les indications I_A et V de ces deux appareils. Dans ce problème on utilise un ampèremètre de résistance interne $R_A = 0,5 \Omega$ et un voltmètre de résistance $R_V = 50 \text{ k}\Omega$. Calculer la puissance P et l'erreur systématique¹⁰ que l'on commet lorsque le voltmètre est placé en amont de l'ampèremètre et du récepteur ; les indications des deux appareils sont : $V = 250,25 \text{ V}$ et $I = 500 \text{ mA}$.

Même question lorsqu'il est placé en aval ; on lit, à présent, $V = 250 \text{ V}$ et $I = 505 \text{ mA}$.



Montage amont



Montage aval

U est la tension aux bornes du récepteur.

2°) Mesure d'une résistance : pour mesurer une résistance électrique, on peut utiliser la méthode précédente avec un ampèremètre et un voltmètre. Le récepteur est une résistance pure R . Calculer R et l'erreur systématique que l'on commet dans le montage amont puis dans le montage aval. (Utiliser les mêmes valeurs numériques que dans la 1^{ère} question).

Exercice III. 9. Shunt d'un ampèremètre.

Un ampèremètre est un appareil de mesure dont la résistance R_A de l'élément moteur ne peut supporter que de faibles intensités I_A de l'ordre de quelques milliampères. Pour mesurer des intensités I plus importantes, on ne fait passer dans l'élément moteur qu'une faible fraction I_A du courant I . L'autre partie I_S est dérivée vers une résistance R_S placée en parallèle aux bornes de R_A . R_S est appelée shunt.

1°) Le facteur multiplicateur n d'un shunt est le nombre par lequel il faut multiplier I_A pour avoir le courant à mesurer I . Montrer que :

$$n = 1 + \frac{R_A}{R_S}$$

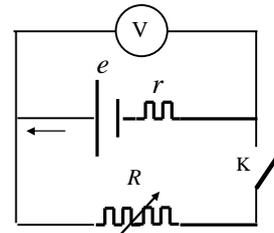
2°) L'indication d'un ampèremètre shunté indique $I_A = 35 \text{ mA}$, le facteur multiplicateur du shunt est $n = 100$, calculer le courant I et la résistance R_S du shunt si $R_A = 4 \Omega$.

¹⁰ Une erreur systématique est due à une cause bien déterminée et se produit dans un même sens.

Une erreur aléatoire est due à une cause mal définie. Ces erreurs varient en fonction du temps et se répartissent de part et d'autre d'une valeur moyenne.

Exercice III. 10. Résistance interne d'une pile.

Pour mesurer la résistance interne r d'une pile de f.e.m e , on utilise le dispositif de la figure ci-dessous où K désigne un interrupteur, R une résistance variable fixée à 6Ω , et V un voltmètre de résistance interne r_V .



Lorsque K est ouvert, le voltmètre indique $V_1 = 4,5$ volts et lorsqu'il est fermé la tension indiquée est $V_2 = 3$ volts

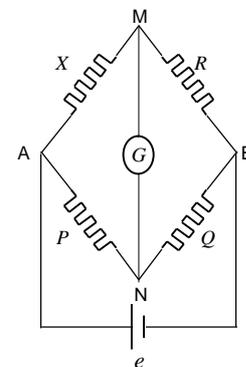
1°) Exprimer la valeur de la résistance interne r en fonction de R , V_1 et V_2 lorsque r_V est supposée infinie.

2°) Evaluer l'erreur $\Delta r/r$ sachant que $\Delta R/R = 1\%$ et que l'erreur ΔV qui résulte de la précision du voltmètre est la même le long de l'échelle des graduations. Sur le calibre utilisé ($7,5$ volts), l'erreur maximale garantie par le constructeur est $\Delta V = 0,02$ volt.

3°) Calculer l'erreur systématique due à la présence, dans le circuit, du voltmètre, sachant que sa résistance interne $r_V = 1.500 \Omega$.

Exercice III. 11. Pont de Wheatstone.

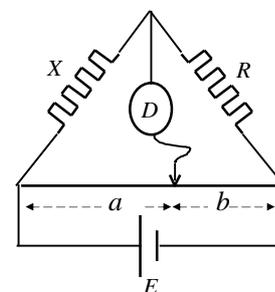
Le pont de Wheatstone, représenté sur la figure ci-contre, est constitué par quatre résistances formant un quadrilatère sur les diagonales desquelles on a placé d'une part un galvanomètre G et d'autre part une source de courant continu e . X est la résistance à mesurer, R une résistance étalon, P et Q deux résistances variables.



A l'équilibre, le galvanomètre indique un courant nul ($i = 0$) Exprimer, à l'équilibre, la résistance inconnue X en fonction de R , P et Q .

Exercice III. 12. Pont à fil. Erreurs liées.

Pour mesurer une résistance inconnue X on utilise, comme le montre la figure ci-contre, un pont de Wheatstone à fil calibré, de longueur L .



1°) Exprimer la résistance X en fonction des résistances a , b , et R .

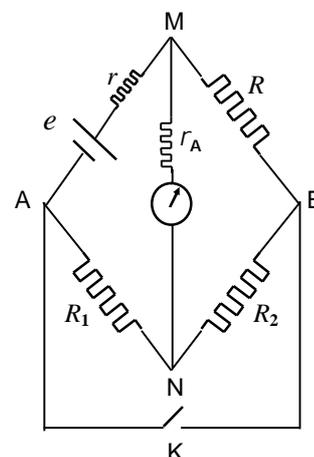
2°) Calculer l'erreur $\varepsilon = \Delta X/X$. On ne tient pas compte de l'erreur d'indétermination du zéro

3°) Quelle est la position du curseur qui correspond à la valeur minimale de l'erreur ε ?

A.N. $L = 60$ cm, $a = (23 \pm 0, 1)$ cm, $R = (1 \pm 0,01) \Omega$.

Exercice III. 13. Pont de Mance.

Dans le but de mesurer la résistance interne r d'une pile, de force électromotrice e , on utilise le pont de Mance représenté sur la figure ci-contre. R est une résistance étalon, R_1 et R_2 deux résistances réglables.



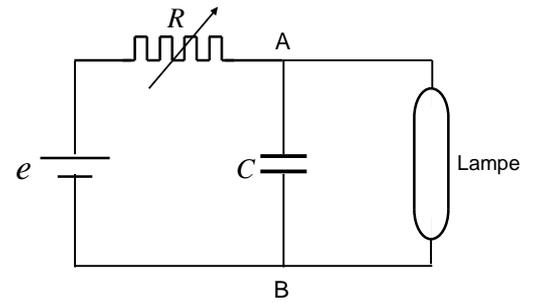
1°) Déterminer l'intensité du courant qui circule dans le milliampèremètre, inséré dans la branche AB , lorsque l'interrupteur K est

- a) ouvert
- b) fermé.

2°) Quelle relation doit exister entre les quatre résistances r , R_1 , R_2 et R , pour que le courant soit le même dans les deux cas. En déduire l'expression de la résistance interne r de la pile.

Exercice III. 14. **Oscillations de relaxation.**

L'oscillateur, représenté sur la figure ci-contre, comporte un générateur de courant continu de f.e.m e qui alimente un condensateur de capacité C à travers une résistance variable R . Une lampe à néon est branchée aux bornes du condensateur entre lesquelles la tension est $u(t)$. Cette lampe ne fonctionne qu'à partir d'une tension d'amorçage U_A et s'éteint à la tension de désamorçage U_D .



La lampe se comporte comme une faible résistance r lorsqu'elle s'allume et comme une résistance infinie lorsqu'elle est éteinte.

1°) La lampe est éteinte : $u(t) < U_A$. Exprimer la tension $u(t)$ en fonction de t , e et de la constante de temps $\tau = RC$.

2°) La lampe est allumée : $U_D < u(t) < U_A$. Exprimer $u(t)$ en fonction de t , e , r et C .

3°) Tracer la courbe représentative de la fonction $u(t)$.

4°) Montrer que, si l'on néglige la durée de la décharge du condensateur, la période de cet oscillateur est :

$$T = RC \operatorname{Log} \left(\frac{e - U_D}{e - U_A} \right)$$

5°) On veut réaliser avec le dispositif précédent, où $e = 110 \text{ V}$, $C = 0,8 \mu\text{F}$, $U_A = 90 \text{ V}$ et $U_D = 40 \text{ V}$,

a) un feu clignotant : on règle alors la résistance de façon à avoir $R = 500 \text{ k}\Omega$. Quelle est la fréquence des éclairs lumineux ?

b) un stroboscope¹¹ : quelle doit-elle la valeur de R si on veut vérifier la vitesse de rotation d'un moteur dont la plaque signalétique indique 3000 tours par minute

¹¹ Un stroboscope est une source de lumière qui envoie des éclairs à fréquence réglable. Pour mesurer la vitesse de rotation de l'arbre d'un moteur, on effectue la mesure lorsque la période des éclairs est égale à celle de la période de rotation de l'arbre. A ce moment un trait tracé sur l'arbre paraît immobile.