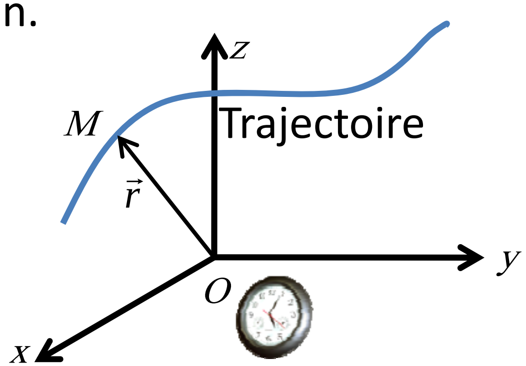
Chapitre 2
Cinématique

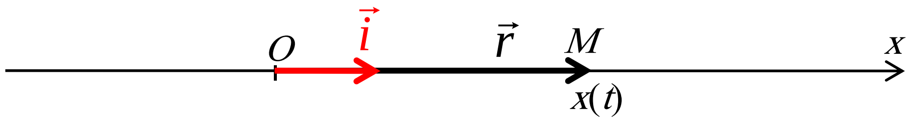
1. Généralités

- La cinématique est l'étude des mouvements des objets en faisant abstraction (بغض النظر) des causes qui les engendrent (تولدها) .
- Un point matériel est une idéalisation géométrique (sans dimensions) qui représente un corps réel dont on néglige le mouvement de rotation autour de soi-même.
- Pour étudier un mouvement, il faut:
    - un système de référence ou repère = (trois axes orientés + une origine)
    - une horloge
- La trajectoire est l'ensemble des points de l'espace occupés par le mobile *M* à tous les instants.
- Le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ est appelé vecteur position.



2. Mouvement rectiligne

La trajectoire est une droite. On choisit un seul axe comme système de référence avec une origine O et un vecteur unitaire. Les vecteurs position, vitesse et accélération sont:



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}\,,\ \vec{v}(t) = v(t)\vec{i}\,,\quad \vec{a}(t) = a(t)\vec{i}$$

Vitesse et accélération moyennes

$$v_m(t_1,t_2) = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{(t_2-t_1)} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad a_m(t_1,t_2) = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{(t_2-t_1)} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- ❑ La vitesse moyenne est définie comme si le mouvement était rectiligne et uniforme.
- ❑ Elle ne donne aucune information précise sur le mouvement.

Vitesse et accélération instantanées

Dans un intervalle de temps très petit, le mouvement est rectiligne est uniforme. Si l'intervalle de temps tend vers 0, la vitesse et l'accélération moyennes s'identifient à la vitesse et accélération instantanées, respectivement:

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} v_m(t_1,t_2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a_m(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} a_m(t_1,t_2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

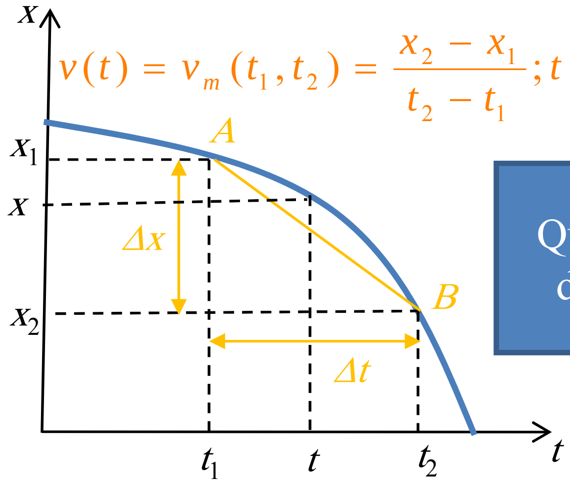
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Propriétés:

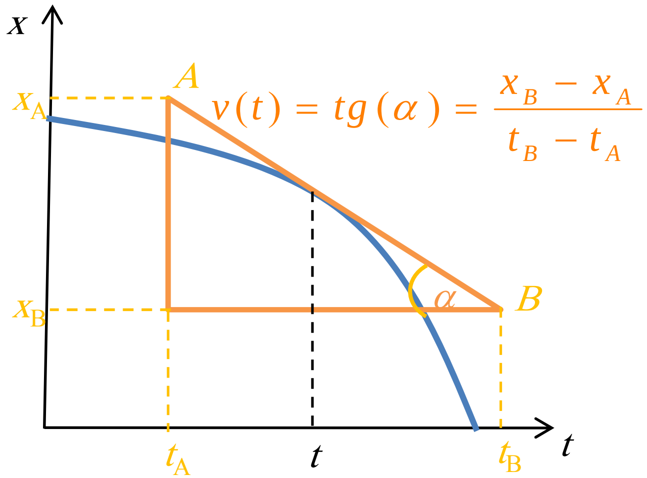
- MRU: $v_{\mathrm{m}}(t_1,t_2) = v(t) = \text{const}\ \forall\ t_1,t_2$ et t.
- MRUV: $a_{\mathrm{m}}(t_1,t_2) = a(t) = \text{const}\ \forall\ t_1,t_2$ et t.
- Δt assez petit : $v(t_m) = v_{\mathrm{m}}(t_1,t_2)$ et $a(t_m) = a_{\mathrm{m}}(t_1,t_2)$ où $t_m = (t_1+t_2)/2$ = milieu de l'intervalle de temps $[t_1,t_2]$

Diagramme des espaces (⚠ ce n'est pas la trajectoire) :

C'est la courbe $x(t)$ représentant la position en fonction du temps. Il permet une description complète du mouvement. Il permet de déduire les vitesses moyenne et instantanée, ainsi que l'accélération à chaque instant.



Quand $\Delta t \to 0$, la corde AB devient la tangente à $x(t)$.



Passage de $x(t)$ à $v(t)$, méthode 1: $v_m = v$

- On veut calculer v à l'instant $t = t_m = 2$s.
- On choisit t_1 et t_2 pour que t soit le milieu de l'intervalle Δt. Exemple : $t_1 = 1.98$s et $t_2 = 2.02$s
- On détermine x_1 et x_2 sur le diagramme. Exemple: $x_1 = 2.3$m et $x_2 = 2.0$m
- $v_m(1.98, 2.02) = \Delta x / \Delta t = -0.3/0.04 = -7.50$ m/s
- $v(2) = v_m(1.98, 2.02) = -7.50$ m/s

Passage de $x(t)$ à $v(t)$, méthode 2: pente $tg(\alpha)$ الميل

- On veut calculer v à l'instant $t = 2$s.
- On trace la tangent au point $x(t)$.
- On choisit t_A et t_B éloignés. Exemple : $t_A = 0.52$s et $t_B = 3.02$s
- On détermine x_A et x_B sur la tangente. Exemple: $x_A = 20.04$m et $x_B = 1.23$m
- $v(2) = (x_A - x_B)/(t_A - t_B) = -7.52$ m/s

L'application de la méthode 1 à plusieurs instants, permet de déduire le diagramme des vitesses (courbe $v(t)$). A son tour, ce diagramme permet de déterminer le diagramme des accélérations (courbe $a(t)$) de la même façon.

Nature du mouvement

Pour $v \neq 0$

Sens : positif (+) si $v > 0$, négatif (-) si $v < 0$

Rectiligne : trajectoire = droite ou direction de v = const

Uniforme : (Δx = const si Δt = const) ou $|v|$ = const ou $a = 0$

Varié : $|v|$ = varie ou $a \neq 0$

Accéléré : $|v|\uparrow$ ou (v et a) dans le même sens ou $av > 0$

Retardé : $|v|\downarrow$ ou (v et a) dans des sens opposés ou $av < 0$

Uniformément : (Δv = const si Δt = const) ou a = const

Pour $v = 0$

Corps au repos

Exemples: Mouvement rectiligne uniforme

Nature	MRU, +	MRU, -
Justif.1	$a = 0,\ v > 0$	$a = 0,\ v < 0$
Justif. 2	$/v/$ = const, $v > 0$	$/v/$ = const, $v < 0$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Nature	MRUA, +	MRUA, -
Justif.1	a = const, et $av > 0$, et $v > 0$	a = const, et $av > 0$, et $v < 0$
Justif. 2	a = const, et $\|v/\uparrow$, et $v > 0$	a = const, et $\|v/\downarrow$, et $v < 0$

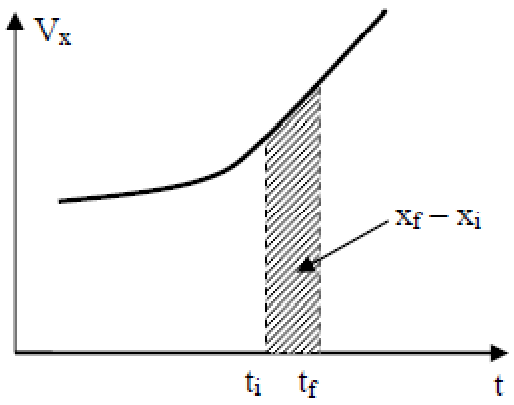
On utilise une justification ou l'autre, pas les deux à la fois.

Relations intégrales

Passage de la vitesse à la position

La position et la vitesse sont reliées par : $V_x(t) = \frac{dx}{dt}$ soit : $dx = V_x(t)\,dt$

Par intégration entre deux instants $t = t_i$ et $t = t_f$, on obtient :



$$x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} V_x(t)\,dt$$

= aire **algébrique** délimitée par la courbe de $V_x(t)$, l'axe des temps et les droites $t = t_i$ et $t = t_f$

Passage de l'accélération à la vitesse

L'accélération et la vitesse sont reliées par : $a_x(t) = \frac{dV_x}{dt}$ soit $dV_x = a_x(t)\,dt$

L'intégration entre deux instants $t = t_i$ et $t = t_f$ donne : $V_x(t_f) - V_x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} a_x(t)\,dt$

Cette expression représente l'**aire algébrique délimitée par la courbe de** $a_x(t)$**, l'axe des** temps et les droites $t = t_i$ et $t = t_f$

L'aire au-dessus de l'axe des temps est positive. L'aire au-dessous de l'axe des temps est négative.

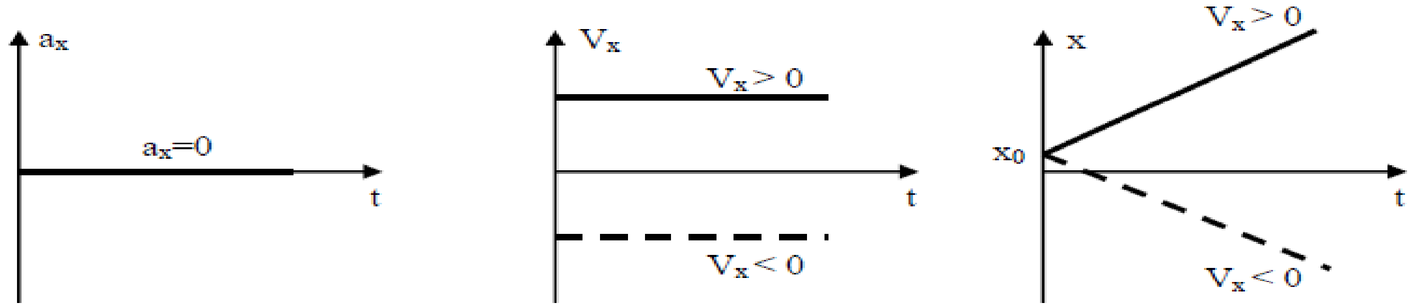
Etude cinématique de mouvements rectilignes particuliers

Mouvement rectiligne uniforme

le mouvement étant uniforme lorsque V(x)=cte . Ce qui implique a(x)=dV(x)/dt = 0.

A partir de la formule intégrale, pour xo = x(0), on obtient : $x(t) = x_0 + \int_0^t V_x\, dt = V_x \cdot t + x_0$

Diagrammes :



Mouvement rectiligne uniformément varié

Mouvement uniformément varié lorsque a(x)=Cte. En utilisant le calcul intégral, on obtient:

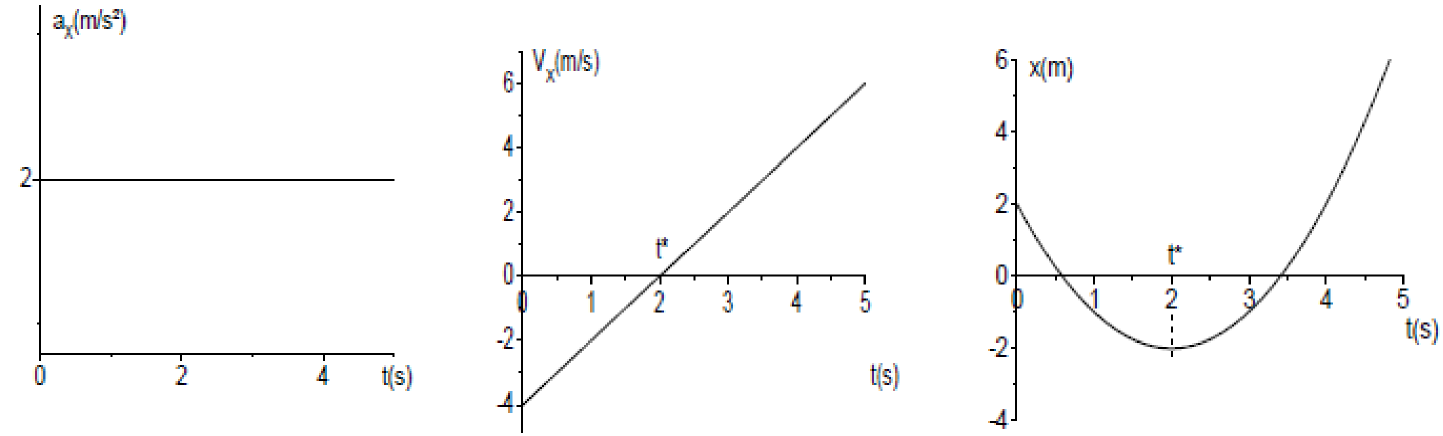
- pour la vitesse : $V_x(t) = V_{x0} + \int_0^t a_x dt = a_x t + V_{x0}$ avec $V_{x0} = V_x(0)$

- pour la position : $x(t) = x_0 + \int_0^t V_x dt = x_0 + \int_0^t (a_x t + V_{x0})\, dt$

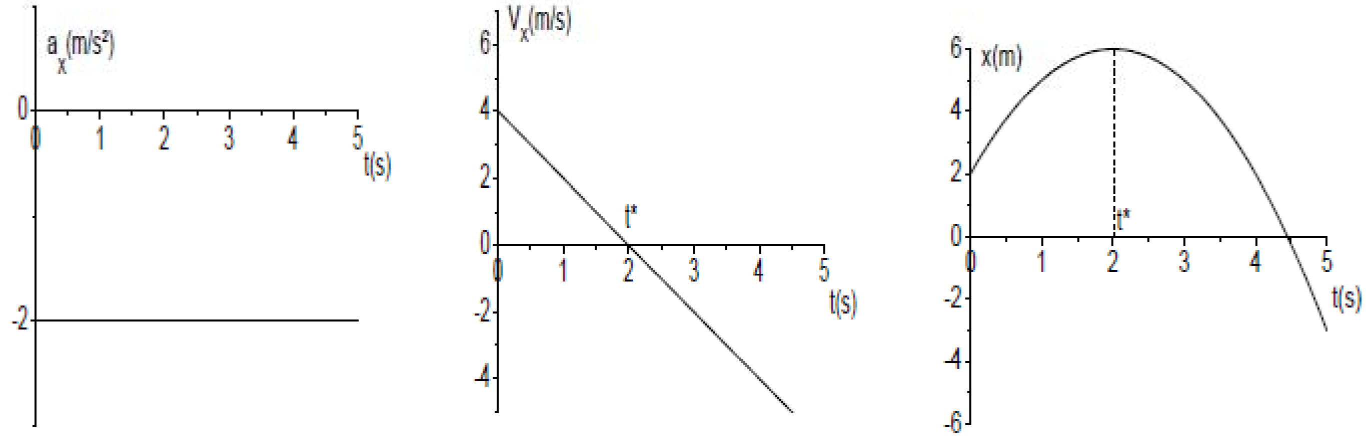
$$= \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{x0} t + x_0 \quad \text{avec } x_0 = x(0)$$

Exemples de diagrammes :

- Cas où $a_x > 0$



- Cas où $a_x < 0$

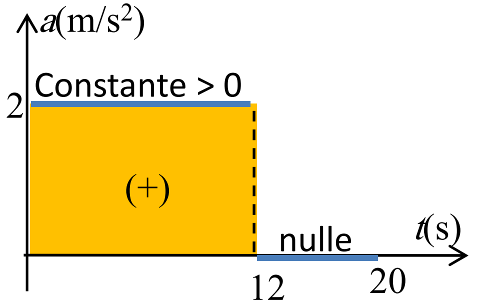


Passage de a à v $\quad v(t) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t} a(t')dt' = A(t_1, t, a) \Leftrightarrow v(t) = \int a(t)dt + C_1$

Passage de v à x $\quad x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' = A(t_0, t, v) \Leftrightarrow x(t) = \int v(t)dt + C$

- La constante C se détermine par la connaissance de la position à un instant quelconque (par exemple t_0)
- $A(t_0, t, v)$ = aire (algébrique) délimitée par l'axe des temps, la droite verticale t_0, la droite verticale t et la courbe $v(t)$.
- L'aire au-dessus de l'axe des temps est positive. L'aire au-dessous de l'axe des temps est négative.

Diagramme des accélérations → Vitesses limites de chaque phase → Diagramme des vitesses



- Données : $t_1 = 0s$ et $v(0) = -15m/s$
- $v(12) - v(0) = A(0,12,a) = 24m/s$
- $v(12) = 9m/s$
- $v(20) - v(12) = 0m/s$
- $v(20) = v(12) = 9m/s$

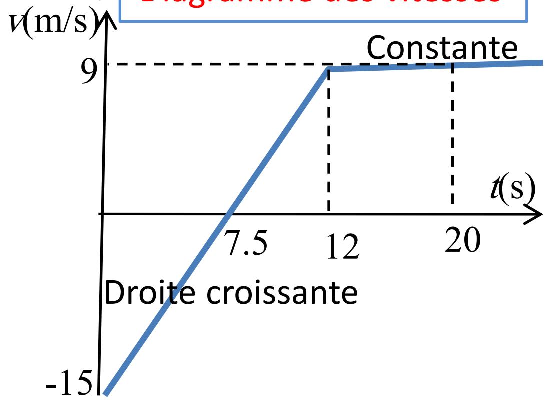
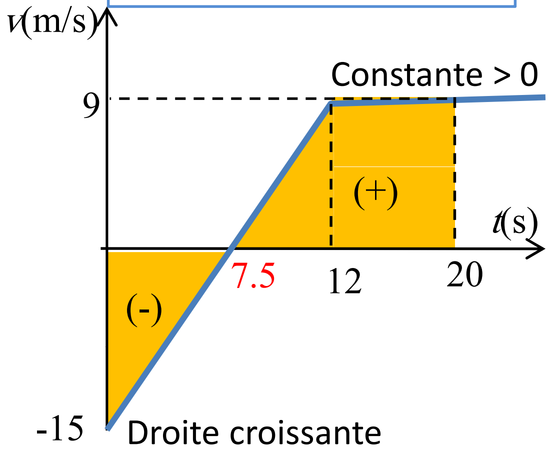


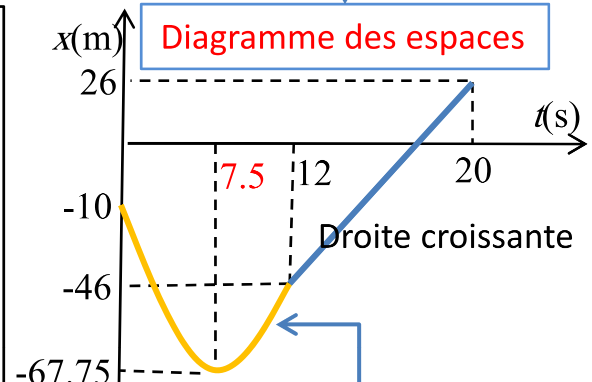
Diagramme des vitesses → Abscisses limites de chaque phase → Diagramme des espaces



- Données : $t_0 = 0s$ $\quad x(0) = -10m$
- $x(7.5) - x(0) = A(0,7.5,v) = -57.7\ 5m$
- $x(12) - x(7.5) = A(7.5,12,v) = 20.25m$
- $x(20) - x(12) = A(12,20,v) = 72m$
- $x(7.5) = -67.75m$; $\quad (x = \text{min car } v = 0)$
  $x(12) = -46m$; $\quad x(20) = 26m$
- Distance parcourue entre 0s et 12:

$d = |A(0,7.5,v)| + |A(7.5,12,v)| = 88\ m$

$\neq x(12) - x(0)$ car $(v < 0)$ puis $(v > 0)$



Pente tourne dans le sens (+) ou concavité (تقعر) vers le haut car v = croissante