Faculté de mathématiques
1ère Année Lic MI
Sections 2, 3, 4, 9

Année: 2015 – 2016
Module: ALG II
05 Février 2016

Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1 On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Donner le type de la matrice A
2. Donner la valeur de chacun des éléments a_{14}, a_{23} , a_{33} et a_{32}
3. Ecrire la matrice transposée ${}^tA$ de A et donner son format.

Exercice 2 Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & \cdots & 7 \\ \cdots & 9 & \cdots \\ 8 & \cdots & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Compléter l'écriture de A de type 4×3 avec : $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$.
2. Ecrire la matrice transposée ${}^tA$ de A et donner son type.

Exercice 3 $(*)$ Donner une matrice dont la transposée est égale à son opposée.

Exercice 4 $(*)$ Donnez la matrice A telle que pour tout indice i et j avec, $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, le terme a_{ij} soit donné par la formule $a_{ij} = 2i - j$.

Exercice 5 On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
Calculez $A + B$, $A - B$, $3A$, $4B$, $3A - 4B$.

Exercice 6 $(*)$ Efectuer le produit des matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

1- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 2- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3- $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 4- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

5- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 6- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 8 Calculer, puis comparer les produits AB et BA

1- $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ 2- $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 9 On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

où x est un réel. Déterminer x pour que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice 10 $(*)$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?

Exercice 11 $(*)$ Calculez et comparez $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 $(*)$ On considère la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5

Exercice 13 $(*)$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$

1. Calculer B^2, B^3, en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
3. En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 14 $(*)$ Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1- $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z &=& 3 \\ 3x-y-2z &=& 0 \\ x+y-z &=& -2 \\ x+2y+z &=& 1 \end{array}\right.$ 2- $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t &=& 1 \\ x-y+2z-3t &=& 2 \\ 2x+4z+4t &=& 3 \\ 2x+2y+3z+8t &=& 2 \\ 5x+3y+9z+19t &=& 6 \end{array}\right.$ 3- $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z+t &=& 1 \\ x+2y+3z+4t &=& 2 \\ 3x-y-3z+2t &=& 5 \\ 5y+9z-t &=& -6 \end{array}\right.$

4- $\left\{\begin{array}{lcl} x-y+z+t &=& 5 \\ 2x+3y+4z+5t &=& 8 \\ 3x+y-z+t &=& 7 \end{array}\right.$ 5- $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+3z &=& 0 \\ 2x+3y-z &=& 0 \\ 3x+y+2z &=& 0 \end{array}\right.$

Exercice 15 Pour tout a réel, on considère la matrice A et le système linéaire (S) définis par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (S) \left\{\begin{array}{ccccccccc} ax &+& y &+& z &+& t &=& 1 \\ x &+& ay &+& z &+& t &=& 1 \\ x &+& y &+& az &+& t &=& 1 \\ x &+& y &+& z &+& at &=& 1 \end{array}\right.$$

aux inconnues réelles x, y, z, t.

1. Discuter le rang de A suivant les valeurs de a.
2. Pour quelles valeurs de a le système (S) admet-il une unique solution ?
3. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il incompatible ?
4. Pour quelles valeurs de a le système (S) admet-il une infinité de solutions ?

Exercice 16 ($*$) Inverser en utilisant un système linéaire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 ($*$) Inverser en utilisant la méthode de Gauss-Jordan les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 Discuter et résoudre suivant les valeurs des rèels λ et a :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 2y - z + t & = & \lambda \\ 2x + y - z & = & \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z & = & 2\lambda \\ (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z & = & 3\lambda + a \\ 3x - z + 3t & = & -\lambda^2 \end{array} \right.$$