Logique des propositions partie 2

S. Mazouz & K. Akli
USTHB

2015-2016

Sémantique

- Donner une sémantique à un langage formel : définir une fonction (au sens mathématique), appelée Interprétation, qui est capable d'associer à toute formule bien formée un « sens ».
- Le sens d'une formule sera simplement une valeur de vérité (vrai ou faux).

Sémantique

On procède en deux étapes :

1. On donne un sens aux symboles du langage c-à-d d'une part les variables propositionnelles et d'autre part les connecteurs

2. On donne une méthode de calcul pour déterminer le sens d'une formule complexe à partir du sens des constituants plus simples.

Sémantique
Interprétation (Tables de vérité)

1. On interprète les variables propositionnelles (v.p) en leur associant une valeur de vérité. Chaque v.p ne peut prendre que deux valeurs de vérité : vrai ou faux, notées V et F

2. On interprète les connecteurs en associant à chaque connecteur sa table de vérité qui définit son sens.

Sémantique
Interprétation (Tables de vérité)

A	$\neg$A
V	F
F	V

A	B	A$\wedge$B	A$\vee$B	A$\rightarrow$B	A$\leftrightarrow$B
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Sémantique
Interprétation (Tables de vérité)

3. On interprète une formule α en lui associant une table de vérité. La méthode de calcul repose sur la décomposition de cette formule en sous-formules.

Exemple : Etablir la table de vérité de la formule $\alpha = \neg A \wedge B \rightarrow \neg C \vee A$

A	B	C	$\neg$A	$\neg$C	$\neg$A$\wedge$B	$\neg$ C$\vee$A	α
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	V

instanciation

Sémantique
Interprétation (Tables de vérité)

L'interprétation d'une formule α, pour chaque instanciation, peut être donnée par les règles suivantes :

1. $\neg\alpha$=V ssi α=F
2. $\alpha\wedge\beta$ =V ssi α=V et β=V
3. $\alpha\vee\beta$ =V ssi α=V ou β=V
4. $\alpha\rightarrow\beta$ =V ssi α=F ou β=V
5. $\alpha\leftrightarrow\beta$ =V ssi (α=V et β=V) ou (α=F et β=F)

7

Sémantique

Définition(Satisfaisable)

Une formule α est satisfaisable s'il existe une instanciation (une ligne du TV) donnant la valeur V à α. α est dite satisfaite pour cette instanciation.

Un ensemble de formules Γ est satisfaisable s'il existe une instanciation pour laquelle toutes les formules de Γ sont vraies.

8

Sémantique

Exemples

Instanciation	A	B	α=A$\wedge\neg$B	β=B$\rightarrow$A	δ=A$\rightarrow$B
1	V	V	F	V	V
2	V	F	V	V	F
3	F	V	F	F	V
4	F	F	F	V	V

La formule α est satisfaisable car il existe une instanciation (ligne 2) où α=V

La formule β est aussi satisfaisable car il existe une instanciation (ligne 4 par exemple) où β=V

L'ensemble des formules $\{\alpha, \beta\}$ est satisfaisable car il existe une instanciation (ligne 2) où α=V et β=V

L'ensemble des formules $\{\alpha, \beta, \delta\}$ n'est pas satisfaisable car il n'existe aucune instanciation où les trois formules soient vraies en même temps.

9

Sémantique

Définition (Tautologie)
Une formule α est une tautologie ssi elle est vraie pour toute instanciation, et on note $|= \alpha$.

Définition(Antilogie)
Une formule α est une antilogie ssi elle est fausse pour toute instanciation.

Remarque
La valeur de vérité d'une tautologie ou d'une antilogie est indépendante des valeurs de vérité des variables propositionnelles qui y apparaissent.

Exemples A$\vee\neg$A est une tautologie alors A$\wedge\neg$A est une antilogie.

Est-ce que A$\rightarrow$A est une tautologie??

10

Sémantique

Remarques

Soient α et β deux formules :

1. $|= \neg\alpha$ ($\neg\alpha$ est une tautologie)
$\Leftrightarrow$ α est une antilogie
$\Leftrightarrow$ α n'est pas satisfaite c à d il n'existe aucune instanciation satisfaisant α

2. $|\neq \alpha$ (α n'est pas une tautologie)
$\Leftrightarrow$ α n'est pas une tautologie
$\Leftrightarrow$ il existe au moins une instanciation ne satisfaisant pas α
Donc non tautologie n'implique pas antilogie.

11

Sémantique

3. $|= \alpha\wedge\beta \Leftrightarrow |= \alpha \ et\ |= \beta$
4. $|= \alpha\rightarrow\beta \Leftrightarrow$ *pour chaque instanciation* $si\ \ \alpha = V\ alors\ \beta = V$
5. $|= \alpha\rightarrow\beta$ et $|= \alpha \Rightarrow |= \beta$
6. $|= \alpha\leftrightarrow\beta \Leftrightarrow$ *pour chaque instanciation* $si\ \ \alpha\ et\ \beta$ *ont même valeur de vérité*
7. $|= \alpha\vee\beta \Leftrightarrow$ *pour chaque instanciation* $\alpha = V\ \ ou\ \beta = V$

12

Sémantique

Définition (Equivalence Logique)
Soient α et β deux formules, on dit que α est logiquement équivalente à β,
notée $\alpha \equiv \beta$, ssi
α et β ont même valeur de vérité pour chaque instanciation.

Exemples

$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
$\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha)$
$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

13

Sémantique

Remarque
Ne pas confondre l'équivalence logique $\equiv$ avec le connecteur logique $\leftrightarrow$:

- $\leftrightarrow$ est un symbole de l'alphabet du langage propositionnelle
- $\equiv$ est un symbole du méta langage.

Propriétés de l'équivalence logique

1. $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des formules

2. $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow\ \models \alpha \leftrightarrow \beta$

14

Sémantique
Interprétation (Tables de vérité)

Complexité de la méthode des TVs :
Etant donné une formule α avec n v.ps,
il y a 2^n interprétations (instanciations) possibles.

Le temps de calcul est exponentiel avec le nombre de variables propositionnelles

Par exemple, une formule avec 100 vps possède
1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376 interprétations

Si on teste 1 milliard d'interprétations par seconde, on en aura pour 40 196 936 841 311 années !!!

15

Sémantique

Théorème de substitution
Soient α une formule contenant la v.p A
et α' la formule obtenue en substituant toutes les occurrences de A dans α par une formule β alors
si $\models \alpha$ alors $\models \alpha'$

Exemple
$\alpha = (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$,
La substitution de toutes les occurrences de B par la formule $A \wedge \neg B$
$\alpha' = \alpha[A/ A \wedge \neg B] = (A \vee (A \wedge \neg B)) \leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee A)$
Or α est une tautologie donc α' est une tautologie

16

Sémantique

Théorème de remplacement
Soit β une sous formule de α. Si $\beta \equiv \beta'$ alors
1. Le remplacement de β par β' dans α donne une formule α' équivalente à α ($\alpha \equiv \alpha'$).
2. Si $\models \alpha$ alors $\models \alpha'$.

Ainsi, on ne change pas la valeur de vérité d'une formule en remplaçant une sous-formule par une sous-formule équivalente.

17

Sémantique

Ce théorème nous permet de produire une démonstration mathématique au sens classique en mathématique : partant d'une formule qu'on sait vraie, on peut produire par remplacement de nouvelles formules en préservant l'équivalence ; ce seront donc de nouvelles formules vraies.

Exemples
Montrer l'équivalence $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
1ère méthode : Utiliser les tables de vérité
2ème méthode : Utiliser le théorème de remplacement en se basant sur des équivalences déjà prouvées ou plus simples à faire.

$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
$\equiv \neg(\neg\beta \wedge \alpha)$ car $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
$\equiv \neg(\neg\beta \wedge \neg\neg\alpha)$ car $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$
$\equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ car $\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \alpha \rightarrow \beta$

18

Sémantique

Corollaire

Une formule est logiquement équivalente à une formule qui ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$. On dira que $\{\neg, \wedge\}$ est un système complet de connecteurs.

Preuve

En utilisant le théorème de remplacement et les équivalences logiques suivantes :

$$\alpha\vee\beta \equiv \neg(\neg\beta\wedge\neg\alpha)$$
$$\alpha\rightarrow\beta \equiv \neg(\alpha\wedge\neg\beta)$$
$$\alpha\leftrightarrow\beta \equiv \neg(\alpha\wedge\neg\beta)\wedge\neg(\beta\wedge\neg\alpha)$$

On obtient une formule équivalente à la formule initiale et où tous les connecteurs $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ sont éliminés.

19

Sémantique
Système Complet de Connecteurs

Définition (système complet de connecteurs)

Un ensemble Ω de connecteurs est un système complet de connecteurs (SCC) si toute formule de la forme $\neg\alpha$ et $\alpha\wedge\beta$ peut s'exprimer au moyen des connecteurs de Ω.

Explication

- $\{\neg, \wedge\}$ est un SCC donc toute formule de la logique de propositions est exprimable avec $\{\neg, \wedge\}$
- Et si toute formule de la forme $\neg\alpha$ et $\alpha\wedge\beta$ peut s'exprimer au moyen des connecteurs de Ω
- Par transitivité, toute formule de la logique des propositions est exprimable avec les connecteurs de Ω.

20

Sémantique
Système Complet de Connecteurs

Exemple

$\Omega 1 = \{\neg, \vee\}$ est un SCC car :

- $\neg$ appartient à $\Omega 1$
- $\alpha\wedge\beta$ peut être exprimé à l'aide des connecteurs de $\Omega 1$: on utilise le théorème de remplacement

$$\alpha\wedge\beta \equiv \neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta \qquad \text{car } \alpha\equiv\neg\neg\alpha$$
$$\equiv \neg\neg(\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta) \qquad \text{car } \alpha\equiv\neg\neg\alpha$$
$$\equiv \neg(\neg\beta\vee\neg\alpha) \qquad \text{car } \neg(\neg\beta\wedge\neg\alpha)\equiv\alpha\vee\beta$$

De la même manière, on peut montrer que $\{\neg, \vee\}$ est un SCC.

21

Sémantique
Système Complet de Connecteurs

Remarques

1. Aucun ensemble de connecteurs monaires ne peut former un système complet de connecteurs. En effet toute formule construite à partir d'un ensemble de connecteurs monaires ne peut intégrer qu'une seule variable propositionnelle.
2. Il existe d'autres systèmes complets de connecteurs tels que $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, etc.…
3. Il existe des systèmes complets de connecteurs de plus de deux connecteurs tels que $\{\neg, \wedge, \vee\}$, etc.…
4. Il existe des systèmes complets de connecteurs dont l'un des connecteurs est d'arité supérieure à 2.

22

Sémantique
Système Complet de Connecteurs

5. Il existe deux systèmes complets de connecteurs à un seul connecteur binaire : les barres de Shaffer.

Supposons qu'un tel connecteur existe et notons le $|$. Pour pouvoir exprimer le connecteur $\neg$, la table de vérité de $|$ est telle que :

- à l'instanciation « V, V » elle doit donner F
- et à l'instanciation « F, F », elle doit donner V.

Ce qui nous donne 4 possibilités pour $|$ comme illustrée ci-dessous.

A	B	?	?	?	?
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

23

Sémantique
Système Complet de Connecteurs

- Les deux colonnes centrales correspondent à $\neg B$ et $\neg A$, donc ne conviennent pas (le connecteur ne peut être monaire)
- Les deux autres colonnes donnent à $\neg(A\wedge B)$ et $\neg(A\vee B)$. On peut montrer qu'ils correspondent aux barres de Shaffer.

Notons $A\uparrow B = \neg(A\wedge B)$ et $A\downarrow B=\neg(A\vee B)$.

On a d'une part $\neg A\equiv \neg(A\wedge A) \equiv A\uparrow A$

et d'autre part

$$A\wedge B \equiv (A\wedge B) \vee (A\wedge B) \qquad \text{car } \alpha \equiv \alpha \vee \alpha$$
$$\equiv \neg\neg(A\wedge B) \vee \neg\neg(A\wedge B) \qquad \text{car } \alpha \equiv \neg\neg\alpha$$
$$\equiv \neg(A\uparrow B) \vee \neg(A\uparrow B)) \qquad \text{car } \neg(\alpha\wedge\beta) \equiv \alpha\uparrow\beta$$
$$\equiv \neg((A\uparrow B) \wedge (A\uparrow B)) \qquad \text{car } \neg\alpha \vee \neg\beta \equiv \neg(\alpha\wedge\beta)$$
$$\equiv (A\uparrow B) \uparrow (A\uparrow B) \qquad \text{car } \neg(\alpha\wedge\beta) \equiv \alpha\uparrow\beta$$

Donc $\{\uparrow\}$ est un SCC

24