Logique des propositions

S. Mazouz & K. Akli
USTHB
2015-2016

Plan

Introduction

Proposition : toute phrase, toute expression à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).
Exemples :

1. Un triangle isocèle possède deux côtés égaux.
2. La terre tourne autour de la lune
3. 2+3=6

- Rangez vos affaires (ordre)
- Quelle heure est-il?(Question)
- Combien avez-vous acheté ce livre?(Question)

Introduction

- La logique des propositions permet:
  - La représentation des propositions d'une manière formelle à l'aide d'un ***langage*** ;
  - La déduction de nouvelles propositions à partir d'un ensemble de propositions en utilisant *un **système déductif*** ;
  - La vérification formelle de la véracité ou de la fausseté des propositions par l'utilisation de ***tables de vérité***.

Langage

Un langage formel est :

- Un ensemble de mots ou **symboles**. Cet ensemble est appelé **alphabet**.
- Et des règles de combinaison de ces mots. Ces règles indiquent comment construire des propositions complexes appelées **formules** (grammaire).

Langage (Alphabet)

Définition 1 (Alphabet) : L'alphabet du langage L_P ($\neg$,$\wedge$) se compose de trois classes de symboles :

1. **Symboles de variables propositionnelles** désignés par les lettres latines majuscules éventuellement indicées A, B, C, A1, B2,… ;
2. **Symboles logiques ou connecteurs** : ce sont les symboles qui permettent de lier les propositions entre elles.
   - un connecteur unaire (ou monaire) $\neg$, appelé *« non logique »*
   - un connecteur binaire $\wedge$, appelé *« et logique »* ou *« conjonction »*.

   Ce sont des connecteurs primitifs ou de base.
3. **Symboles impropres :** les parenthèses (et).

Langage(Formules)

Définition 2 (Formules) : L'ensemble des formules ou expressions bien formées (ebf) du langage L_P (¬, ∧) est défini récursivement de la manière suivante :

1. Toute variable propositionnelle de l'alphabet de L_P (¬, ∧) est une formule, dite formule atomique ;

2. Si α et β sont des formules de L_P (¬, ∧) alors ¬ α, α ∧ β et (α) sont des formules, dites formules composées.

3. Clause de clôture : Rien d'autre n'est une formule (*une expression ne peut être une formule qu'en vérifiant les points 1 ou 2)* .

Langage

Exemples

1. A, B, C sont des formules atomiques de L_P (¬, ∧).
2. ¬A, ¬ ¬ A, ¬ A∧B, ¬ (A∧B), ¬ ¬ (A∧ ¬ B) sont des formules de L_P (¬, ∧).
3. Par contre A ¬ ∧B, ∧ A ∧B, (A∧¬(B→C) ne sont pas des formules de L_P (¬, ∧).

Remarque

Les lettres grecques α, β, δ, γ, ... ne sont pas des symboles du langage L_P (¬, ∧). Ils désignent les noms de formules; ce sont des symboles du métalangage qui nous sert à décrire le langage L_P (¬, ∧).

Langage

Connecteurs d'abréviations

Connecteurs	notation	définition
ou logique	∨	α∨β=déf ¬(¬ α ∧ ¬ β)
Implication	→	α→β=déf ¬(α ∧ ¬ β)
Équivalence	↔	α↔β =déf (α → β) ∧ (β → α) =déf ¬(α ∧ ¬ β) ∧ ¬(β ∧ ¬α)

Priorité entre les connecteurs (par ordre décroissant) :
Les parenthèses (des plus internes aux plus externes) , ¬ (le plus interne d'abord) , ∧ et ∨ (de gauche à droite), → et ↔ (de gauche à droite)

Formules	Formules simplifiées
((α ∧ β) ∧ δ)	α ∧ β ∧ δ
((α→ β) →δ)	α→ β → δ
((α→ β) ∨δ))	(α→ β) ∨δ

Langage

Formalisation

si le train arrive en retard et il n'y a pas de taxis à la gare alors l'invité arrive en retard

Considérons les variables propositionnelles suivantes :

R : Le train arrive en Retard

T : il y a des taxis à la gare

I : l'invité arrive en retard

On obtient :

(R ∧¬T) → I

Système déductif

- Un système déductif : un ensemble de règles permettant en un nombre fini d'étapes de déterminer si une proposition peut être déduite à partir d'un ensemble d'hypothèses ou prémisses. Un tel procédé s'appelle déduction ou démonstration.
- Le système déductif **dans le langage** L_P(¬, ∧) est muni de quatre règles de déduction adoptées des règles naturelles de GENTZEN (1935).

- Pour chaque connecteur, des règles d'Introduction et d'Elimination sont considérées.

Système déductif

Règles du connecteur ∧

- Règle d'introduction (I ∧) :

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\ \mathrm{I}\wedge$$

Elle exprime le fait que : « si on peut déduire α et si on peut déduire β alors on peut déduire la formule α ∧ β ».

Système déductif
Règles du connecteur ∧

Règle d'élimination (E ∧)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ E\wedge \qquad\qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ E\wedge$$

La déduction de $\alpha \wedge \beta$ permet celle de α d'une part ou de β d'autre part».

13

Système déductif
Règles du connecteur ¬

- Règle d'Elimination (E ¬)

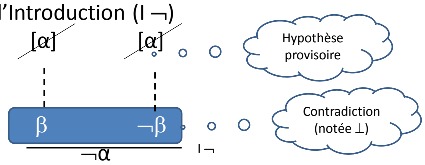
$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ E\neg$$

La déduction de $\neg\neg\alpha$ permet celle de α.

14

Système déductif
Règles du connecteur ¬

- Règle d'Introduction (I ¬)



- Si sous l'hypothèse « provisoire» α, on peut déduire une formule et sa négation (contradiction), alors on peut déduire sa négation ($\neg\alpha$) à partir de toutes les prémisses antérieures sauf α (α est éliminée, on dit aussi que α est déchargée).

15

Système déductif
Règles du connecteur ¬

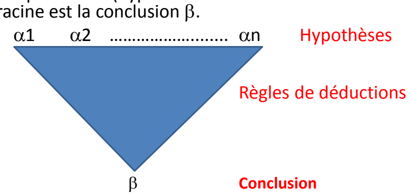
Remarque Les hypothèses provisoires sont mises entre crochets.

$$\cfrac{\begin{matrix}\cancel{[\alpha]}\\ \vdots \\ \beta\wedge\neg\beta=\perp\end{matrix}}{\neg\alpha}\ I\neg$$

16

Système déductif

Définition (Déduction) : Une déduction dans le système déductif $L_p(\neg, \wedge)$ est un arbre fini utilisant les règles naturelles de Gentzen (I¬), (E¬), (I∧) et (E∧) dont les feuilles sont les prémisses (hypothèses formulées ou faits observés) et la racine est la conclusion β.



17

Système déductif

Notations

Soient Γ un ensemble de formules et β une formule, on note :

- $\Gamma |\!— \beta$: s'il existe une déduction D ayant pour conclusion β et dont toutes les prémisses non éliminées sont dans Γ. On dit que D est une déduction de β à partir de Γ.
- $|\!— \beta$: s'il existe une déduction D ayant pour conclusion β et dont toutes les prémisses ont été éliminées. Dans ce cas, $\Gamma = \varnothing$, on dit que β est un théorème dans $L_p(\neg, \wedge)$.
- Si Γ est un ensemble de formules et $\beta, \alpha, \alpha 1, ..., \alpha n$ sont des formules, alors on notera :
  - $\alpha 1, ..., \alpha n |\!— \beta$ au lieu de $\{\alpha 1, ..., \alpha n\} |\!— \beta$
  - $\Gamma, \alpha |\!— \beta$ au lieu de $\Gamma \cup \{\alpha\} |\!— \beta$

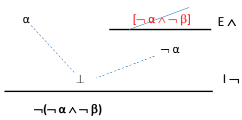
18

Système déductif

Exemple montrer la déductibilité de $\alpha \vee \beta$ à partir de α qu'on notera : $\alpha \mid\!— \alpha \vee \beta$?

- Etant donné qu'on est dans le système déductif de $L_P(\neg, \wedge)$, on doit remplacer le $\vee$ par sa définition. On doit alors prouver : $\alpha \mid\!— \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$

- De façon générale, si la conclusion est de la forme $\neg \beta$, on peut ajouter β comme hypothèse provisoire. Dans cet exemple, on ajoute la formule $\neg \alpha \wedge \neg \beta$. Les hypothèses ajoutées sont mises entre crochets.



- De l'hypothèse provisoire $\neg \alpha \wedge \neg \beta$, on déduit par la règle (E$\wedge$) la formule $\neg \alpha$ et on obtient une contradiction avec la prémisse α. Dans ce cas, on utilise la règle (I $\neg$) qui permet d'éliminer la formule $\neg \alpha \wedge \neg \beta$ et de déduire sa négation. On obtient notre conclusion et il ne reste que α.

19

Système déductif

Montrer la déduction $\mid\!— \alpha \vee \neg \alpha$ qui peut se traduire aussi par montrer que $\alpha \vee \neg \alpha$ est un théorème?

20

Système déductif

- Montrer qu'à partir de $\alpha \rightarrow \beta$ et α on peut déduire β i.e. $\alpha \rightarrow \beta , \alpha \mid\!— \beta$.

21

Système déductif

Démontrer l'équivalence entre les deux déductions :

$$\Gamma, \alpha \mid\!— \beta \Leftrightarrow \Gamma \mid\!— \alpha \rightarrow \beta \text{ ?}$$

22

Système déductif

Montrer la déduction $\mid\!— (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$

23

Système déductif

Montrer que le raisonnement suivant est correct :

Hypothèses :

1. si le train arrive en retard et il n'y a pas de taxis à la gare alors l'invité arrive en retard

2- l'invité n'est pas arrivé en retard

3- le train est arrivé en retard

Conclusion : il y avait des taxis à la gare

24

Système déductif

Définition
Un ensemble de formules {α1, …, αn} est inconsistant ssi α1, …, αn $\vdash \bot$

Exemple
L'ensemble {$B \rightarrow A$, B, $\neg A$} est inconsistant

25