UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENE

Faculté de Mathématiques

Département d'Analyse

B.P:32 El Alia , 16111 Bab Ezzouar Alger- Algérie Tél.: (213-21) 24-79-07

KESSI Arezki

Laboratoire Systèmes Dynamiques

CALCUL D'INTEGRALES

Sommaire

1 Notions générales sur les intégrales indéfinies

1.1 Définitions

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle quelconque (a,b). Une fonction F définie sur l'intervalle (a,b) est dite primitive de la fonction f si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*
1) La fonction F est continue sur l'intervalle (a,b)
2) La fonction F est dérivable sur l'intérieur de l'intervalle (a,b) et on a $F'(x)=f(x)$, en tout point x intéreur à (a,b).

Si $a\in(a,b)$ la fonction F doit être continue en ce point, mais elle peut ne pas y être dérivable. Dans le cas où F est dérivable au point a la valeur de sa dérivée peut ne pas être égale à la valeur de f au point a.

Exemple

Soit

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0<x\leq 1\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

La fonction $F(x)=x,\ \ 0\leq x\leq 1$ est une primitive de f. La fonction F ainsi définie est aussi primitive de la fonction $g(x)=1,\ \ 0\leq x\leq 1$. Une fonction peut être primitive de plusieurs fonctions.

Si une fonction $G(x)$ est une primitive d'une fonction $g(x)$ alors $G(x)+c$ est aussi une primitive de $g(x)$ car

$$[G(x)+c]'=G'(x)+c'=g(x)$$

D'autre part si G et Φ sont deux primitives de g alors $[G(x)-\Phi(x)]'=g(x)-g(x)=0$ d'où $G(x)=\Phi(x)+c$.

En conclusion si une fonction $G(x)$ est une primitive d'une fonction $g(x)$, alors $G(x)+c$ est aussi primitive de $g(x)$ et toute primitive de $g(x)$ est de la forme $G(x)+c$.

Définition 2 *L'ensemble de toutes les primitives d'une fonction f définie sur un intervalle (a,b) est appelé intégrale indéfinie de f. On le note $\int f(x)\,dx$*

Si une fonction $F(x)$ est une primitive d'une foction $f(x)$, alors on écrit

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c$$

bien qu'il est plus rigoureux d'écrire:

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+c\}$$

2 Intégration à l'aide d'un changement de variable

Dans certains cas à l'aide d'un changement de variable on peut transformer une intégrale indéfinie en une autre intégrale indéfinie plus simple à calculer. Ce chagement de variable se fait selon le théorème suivant:

Théorème 1 *Soient $f(x)$ et $\phi(t)$ deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et Δ, tel que $\phi(\Delta) \subset I$, ϕ est continue sur Δ et ϕ est dérivable sur l'intérieur de Δ. Alors si $f(x)$ admet une primitive $F(x)$ sur I, et donc $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, la fonction $f[\phi(t)]\,\phi'(t)$ admet aussi une primitive sur Δ qui est égale à $F[\phi(t)]$ et par suite on a*

$$\int f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt = F[\phi(t)] + c$$

Dans la pratique pour calculer une intégrale $\int f(x)\,dx$ en utilisant un changement de variable $x = \phi(t)$, on écrit:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

2.1 Exemples

1) *Calculer l'intégrale* $\int x\sqrt{x-1}dx$

Solution. En posant

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x = t^2 + 1, \quad dx = 2tdt$$

on obtient

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int \left(t^2+1\right) t.2tdt = 2\int \left(t^4 + t^2\right) dt = 2\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + c$$

En remplaçant de nouveau t par sa valeur en x on obtient

$$\int x\sqrt{x-1}dx = 2\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + 2\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

2) *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int \frac{dx}{3+e^x}$

Solution.

A l'aide du changement de variable

$$3 + e^x = t, \quad x = \ln(t-3), \quad dx = \frac{dt}{t-3}$$

l'intégrale initiale se transforme comme suit

$$\int \frac{dx}{3+e^x} = \int \frac{dt}{t(t-3)}$$

Sachant que

$$\frac{1}{t\,(t-3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-3}\right)$$

on peut écrire

$$\int\frac{dx}{3+e^x}=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-3}=\frac{1}{3}\left(\ln|t-3|-\ln|t|\right)+c$$

En remplaçant t par sa valeur en x on obtient

$$\int\frac{dx}{3+e^x}=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(3+e^x\right)\right)+c$$

3) *Calculer l'intégrale*: $\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{\left(x^4+3x^2+1\right)\arctan\frac{x^2+1}{x}}$

Solution

En divisant le numérateur et le dénominateur par x^2 on obtient

$$\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{\left(x^4+3x^2+1\right)\arctan\frac{x^2+1}{x}}=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)\arctan\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\right]\arctan\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

En faisant le changement de variable $x+\frac{1}{x}=t,\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$ on obtient

$$\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\right]\arctan\frac{x^2+1}{x}}=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)\arctan t}$$

De nouveau si on pose $\arctan t=u,\ \frac{dt}{1+t^2}=du$ on aboutit à l'égalité

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)\arctan t}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c$$

En remplaçant u par sa valeur en t et puis t par sa valeur en x, on obtient

$$\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{\left(x^4+3x^2+1\right)\arctan\frac{x^2+1}{x}}=\ln|\arctan t|+c=\ln\left|\arctan\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|+c$$

4) *Calculer l'intégrale*: $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$

Solution.

Si on pose $x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}$ on obtient

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx=-\int\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}t^2}dt=-\int t\sqrt{4t^2-1}dt$$

De nouveau en faisant le changement de variable $\sqrt{4t^2-1}=u,\ 4tdt=udu$ on obtient

$$\int t\sqrt{4t^2-1}dt=\frac{1}{4}\int u^2du=\frac{1}{12}u^3+c$$

En remplaçant u par sa valeur en t et puis t par sa valeur en x, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx = -\frac{1}{12}\left(\sqrt{4t^2-1}\right)^3 + c = -\frac{1}{12}\left(\sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}}\right)^3 + c$$

5) *Calculer l'intégrale*: $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$

Solution.

En divisant le numérateur et le dénominateur par $9\cos^2 x$ on obtient:

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x} = \frac{1}{9}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{4}{9}\tan^2 x + 1}$$

En posant $\frac{2}{3}\tan x = t$, $\frac{2}{3}\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, on obtient:

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{4}{9}\tan^2 x + 1} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}\arctan t + c$$

En remplaçant t par sa valeur en x on obtient

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x} = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2}{3}\tan x\right) + c$$

3 Intégration par parties

Théorème 2 *Si $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I, dérivables sur l'intérieur de I et l'intégrale $\int vdu$ existe sur I, alors l'intégrale $\int udv$ existe aussi sur I et on a*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

3.1 Exemples

1) *Calculer l'intégrale* $I = \int \arctan x dx$

Solution

Posons

$$u = \arctan x, \qquad dv = dx$$

alors on a

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = x$$

ce qui donne

$$I = \int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

2) *Calculer l'intégrale* $I = \int x\sin x dx$

Solution

Posons

$$u = x, \qquad dv = \sin x dx$$

par suite on obtient

$$du = dx, \qquad v = -\cos x dx$$

Dans ce cas on a

$$I = \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

3) *Calculer l'intégrale* $\int x^2 \ln x dx$

En posant

$$u = \ln x, \qquad dv = x^2 dx$$

on obtient

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

Par suite on peut écrire

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

4) *Calculer l'intégrale* $\int x^2 e^{3x} dx$

Solution

En posant

$$u = x^2, \qquad dv = e^{3x} dx$$

on déduit que

$$du = 2x dx, \qquad v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Par suite on peut écrire

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx$$

L'intégrale qui figure dans le membre de droite peut être calculée de la même manière, en posant

$$u = x, \qquad dv = e^{3x} dx$$

et donc

$$du = dx, \qquad v = \frac{1}{3}e^{3x} dx$$

d'où on obtient

$$\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{9}\int e^{3x} 3 dx = \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c'$$

Finalement on obtient

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + c$$

5) *Calculer l'intégrale* $\int e^x \sin x dx$

Solution

Si on pose

$$u = \sin x, \qquad dv = e^x dx$$

et donc

$$du = \cos x dx, \qquad v = e^x dx$$

on obtient

$$\int e^x \sin x dx = \ e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

De manière analogue pour calculer l'intégrale qui figure dans le membre de droite de la dernière égalité on pose

$$u = \cos x, \qquad dv = e^x dx$$

et donc

$$du = -\sin x dx, \qquad v = e^x$$

Par suite on obtient

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

D'où on déduit que

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

Ce qui donne

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + c$$

4 Intégrales de fonctions rationnelles

4.1 Première méthode

Une intégrale d'une fonction rationnelle peut toujours, à l'aide de la décomposition d'une fonction rationnelle (son intégrant) en éléments simples, se ramener à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x+a)^{\alpha}}$ ou $\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^{\beta}}dx$ avec $\alpha \in Z$, $\beta \in Z$.et $b^2 - 4c < 0$. Donc il suffit de connaitre les valeurs des intégrales de ces types pour en déduire celles des intégrales de fonctions rationnelles.

4.1.1 Intégrale du type $\int \frac{dx}{x+a}$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + k$$

4.1.2 Intégrales du type $\int \frac{dx}{(x+a)^\alpha}$, $\alpha > 1$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(x+a)^{\alpha-1}} + k$$

4.1.3 Intégrales du type $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx$

Il est à remarquer que $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$. Si on pose $t = x+\frac{p}{2}$ et $a^2 = q-\frac{p^2}{4} > 0$, on obtient:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2} = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} \\ &= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{2N-Mp}{2a}\arctan\frac{t}{a} + c \\ &= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-pM}{2a}\arctan\frac{2x+p}{2a} + c\end{aligned}$$

4.1.4 Intégrales du type $\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^\beta}dx$, $\beta > 1$

Si on pose comme ci-dessus, $t = x+\frac{p}{2}$ et $a^2 = q-\frac{p^2}{4} > 0$, on obtient:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^\beta}dx = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^\beta} + \frac{2N-pM}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\beta}$$

Etudions séparément les deux intégrales obtenues dans le second membre.

La première se calcule de manière très simple:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^\beta} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{(t^2+a^2)^\beta} = -\frac{1}{2\left(\beta-1\right)\left(t^2+a^2\right)^{\beta-1}}$$

Le calcul de la seconde intégrale est un peu plus compliqué. Soit

$$I_\beta = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\beta}, \quad \beta = 1, 2, 3, ...$$

Si on intègre par parties, en posant $u = \frac{1}{(t^2+a^2)^\beta}$, $dv = dt$ et donc $du = -\frac{2\beta tdt}{(t^2+a^2)^{\beta+1}}$, $v = t$ on obtient:

$$\begin{aligned}I_\beta &= \frac{t}{(t^2+a^2)^\beta} + 2\beta\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{\beta+1}}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^\beta} + 2\beta\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{\beta+1}}dt \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^\beta} + 2\beta\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\beta} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\beta+1}}\right]\end{aligned}$$

C'est à dire

$$I_\beta = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^\beta} + 2\beta I_\beta - 2\beta a^2 I_{\beta+1}$$

Ainsi on obtient la relation de récurrence

$$I_{\beta+1} = \frac{1}{2\beta a^2}\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^\beta} + \frac{2\beta-1}{2\beta a^2} I_\beta$$

qui nous permet de calculer I_β pour $\beta > 1$, sachant que I_1 est facile à calculer: $(I_1 = \arctan\frac{t}{a})$

4.1.5 Exemples

1) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x-2)}$

Solution. On sait que $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{-1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}$ alors on a:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)} &= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + c\end{aligned}$$

2) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{x^6+2x^4+2x^3-1}{x(x^2+1)^2}dx$

Solution. La décomposition en éléments simples de l'intégrant donne:

$$\frac{x^6+2x^4+2x^3-1}{x(x^2+1)^2} = x - \frac{1}{x} + \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{x}{x^2+1}$$

alors on a

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+2x^4+2x^3-1}{x(x^2+1)^2}dx &= \int xdx - \int\frac{dx}{x} + \int\frac{2xdx}{\left(x^2+1\right)^2} + \int\frac{xdx}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int\frac{d(x^2+1)}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c\end{aligned}$$

3) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$

Solution: On a

$$\begin{aligned}\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} &= \frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \\ 1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} &= 1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\end{aligned}$$

Les coefficients A, B et C peuvent être calculés en utilisant l'identité

$$5x^2-6x+1 = A\left(x-2\right)\left(x-3\right) + Bx\left(x-3\right) + Cx\left(x-2\right)$$

Si on pose $x=0$ on obtient $A=\frac{1}{6}$, si on pose $x=2$ on obtient $B=-\frac{9}{2}$ et si on pose $x=3$ on obtient $C=\frac{28}{3}$. En remplaçant ces valeurs dans le développement et en intégrant on obtient

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+c \qquad x\notin\{0,2,3\}$$

4) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{x^4}{x^4+3x^2+2}dx$

Solution: En faisant la division euclidienne on obtient

$$\frac{x^4}{x^4+3x^2+2}=1-\frac{3x^2+2}{x^4+3x^2+2}$$

Sachant que $x^4+3x^2+2=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)$ le deuxième terme du membre droit de cette égalité s'écrit sous la forme

$$\frac{-3x^2-2}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

En réduisant au même dénominateur on déduit l'égalité

$$-3x^2-2=(Ax+B)\left(x^2+2\right)+(Cx+D)\left(x^2+1\right)$$

En identifiant les coefficients de même puissance de x on obtient le système qui permet de calculer A, B, C et D:

$$\begin{gathered} A+C=0\\ B+D=-3\\ 2A+C=0\\ 2B+D=-2 \end{gathered}$$

De ce système on déduit: $A=C=0$, $B=1$ et $D=-4$. En remplaçant les constantes A, B, C et D par leurs valeurs et en intégrant terme à terme on obtient

$$\int \frac{x^4}{x^4+3x^2+2}dx = x+\arctan x-2\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+c$$

5) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$

Solution: La décomposition de l'intégrant en éléments simples est de la forme

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

En multipliant les deux membres par x et en remplaçant x par 0 on trouve $A=3$. En multipliant les deux membres par $(x-1)^2$ et en remplaçant x par 1 on trouve $B=2$. Enfin si on pose par exemple $x=2$ en tenant compte des valeurs trouvées de A et B on trouve $C=-2-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=-1$. Par suite on obtient

$$\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx = 3\ln|x|-\frac{2}{x-1}-\ln|x-1|+c$$

4.2 Deuxième méthode

4.2.1 Méthode d'Ostrogradsky

On sait que toute fonction rationnelle se décompose en éléments simples. D'après la première méthode, les intégrales indéfinies des éléments de la forme $\frac{1}{x-1}$ ou $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ sont des fonctions transcendentes de la forme: $A\arctan\left(a_1x+a_2\right)+B\ln\left(b_1x+b_2\right)+C$, les intégrales indéfinies des éléments de la forme: $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, $\alpha=2,3,...$ sont des fonctions rationnelles et les intégrales indéfinies des éléments de la forme $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0;\ \beta=2,3,...\right)$ sont des sommes de fonctions rationnelles et de fonctions transcendentes de la forme: $A\arctan\left(a_1x+a_2\right)+C$. Par conséquent toute intégrale indéfinie d'une fonction rationnelle est une somme de fonctions rationnelles ou de fonctions transcendentes qui sont primitives d'éléments de la forme $\frac{A}{x-a}$ ou $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{p^2}{4}-q<0$. En conclusion si $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $(\partial P<\partial Q)$, est une fonction rationnelle avec

$$Q\left(x\right)=\left(x-a_1\right)^{\alpha_1}...\left(x-a_r\right)^{\alpha_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}...\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\beta_s}$$

alors on a

$$\int\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}dx=\frac{P_1\left(x\right)}{Q_1\left(x\right)}+\int\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{j=1}^{s}\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}\right]dx=\frac{P_1\left(x\right)}{Q_1\left(x\right)}+\int\frac{P_2\left(x\right)}{Q_2\left(x\right)}dx \qquad (*)$$

avec

$$Q_2\left(x\right)=\left(x-a_1\right)...\left(x-a_r\right)\left(x^2+p_1x+q_1\right)...\left(x^2+p_sx+q_s\right)$$

et

$$Q_1\left(x\right)=\left(x-a_1\right)^{\alpha_1-1}...\left(x-a_r\right)^{\alpha_r-1}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1-1}...\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\beta_s-1}$$

Supposons que n, n_1 et n_2 sont respectivement les degrés de Q, Q_1 et Q_2. Comme $Q\left(x\right)=Q_1\left(x\right)Q_2\left(x\right)$, alors on a $n=n_1+n_2$. Du fait que les degrés de P_1 et P_2 sont strictement inférieurs respectivement à ceux de Q_1 et Q_2 on a $\partial P_1\leq n_1-1$ et $\partial P_2\leq n_2-1$. Alors le nombre de coefficients à chercher est: $n=n_1+n_2$. En dérivant la formule (*) on obtient

$$\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\left(\frac{P_1\left(x\right)}{Q_1\left(x\right)}\right)'+\frac{P_2\left(x\right)}{Q_2\left(x\right)}=\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}$$

Il est à remarquer que

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q_1Q_2}$$

avec

$$R=\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}$$

Par suite on a

$$\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q_1Q_2}+\frac{P_2}{Q_2}$$

d'où on peut écrire

$$P = P_1'Q_2 - P_1R + P_2Q_1$$

En égalisant les coefficients de même puissance en x on trouve un système de n équations à n inconnues qui nous permet de déduire les coefficients des polynômes P_1 et P_2.

4.2.2 Exemples

1) *Calculer l'intégrale*: $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx$

D'après la formule (*) on a

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx = \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}dx$$

En dérivant cette équation on obtient

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \left[\frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)},$$

$$\begin{aligned}&\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\\ &= \frac{(3Kx^2+2Lx+M)(1-x)(1+x^2)-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)\left[-2(1+x^2)+2x(1-x)\right]}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\\ &+\frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}\end{aligned}$$

En identifiant dans cette équation les coefficients de mêmes puissances en x (après avoir réduit au même dénominateur) on obtient le système suivant:

$$\begin{aligned} M+2N+m&=0\\ 2L+M-2N+l-2m&=1\\ 3K-M+4N+k-2l+2m&=-2\\ -K+3M-2k+2l-2m&=2\\ K+2L+2k-2l+m&=1\\ K-2k+l&=0\\ k&=0\end{aligned}$$

En résolvant ce système on obtient

$$K=\frac{1}{2};\quad L=-\frac{1}{2};\quad M=\frac{3}{2};\quad N=-1;\quad k=0;\quad l=-\frac{1}{2};\quad m=\frac{1}{2}$$

Par suite on a:

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + c$$

2) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

Solution: D'après la formule (*) on peut écrire

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+2)(x+3)^2} + \int \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$$

En dérivant les deux membres on obtient

$$\frac{ax^5+(8a-A+b)x^4+(2A-2B+21a+8b+c)x^3}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$+\frac{(15A-4B-3C+18a+21b+8c)x^2}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$+\frac{(12A+4B-10C+18b+21c)x+(6B-7C+18c)}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = 0$$

En égalisant à 0 chaque coefficient des puissances de x du numérateur on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a=0 \\ A=b \\ -2B+10b+c=0 \\ 36b-4B-3C+8c=0 \\ 30b+4B-10C+21c=0 \\ 6B-7C+18c=1 \end{cases}$$

La solution de ce système est : $\left[A=\frac{9}{4}, B=\frac{25}{2}, C=17, a=0, b=\frac{9}{4}, c=\frac{5}{2}\right]$. En remplaçant les paramètres a, b, c, A, B et C par leurs valeurs respectives on obtient

$$\int \frac{\frac{9}{4}x+\frac{5}{2}}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \frac{1}{8}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C$$

et par suite

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C$$

3) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}$

Solution: On a

$$\int \frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} + \int \frac{ax^2+bx+c}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}dx$$

En dérivant les deux membres de cette égalité et en réduisant au même dénominateur on obtient

$$ax^5 + (b-A)\,x^4 + (c-2B)\,x^3 + (a-3C)\,x^2 + (2A+b)\,x + (B+c) = 1$$

En identifiant les coefficients de même puissance en x on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = A \\ c = 2B \\ C = 0 \\ b + 2A = 0 \\ B + c = 1 \end{cases}$$

dont la solution est $\left[A = 0, B = \frac{1}{3}, C = 0, a = 0, b = 0, c = \frac{2}{3}\right]$. Par suite on a

$$\frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6}\left(\ln\left(-x+x^2+1\right) - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\right)\right) + c$$

alors

$$\int \frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{1}{3}\frac{x}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} + \frac{1}{9}\ln\frac{\left(x+1\right)^2}{\left(-x+x^2+1\right)} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + c$$

4) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}dx$

Solution: On sait que cette intégrale est de la forme

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2\left(x+1\right)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+2x+3} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{\left(x^2+2x+3\right)\left(x+1\right)}dx$$

En dérivant et en réduisant au même dénominateur on obtient

$$Cx^4 + (2C-A+D)\,x^3 + (3C-2B-A+2D+E)\,x^2$$

$$+ (3A-4B+3D+2E)\,x + (3A-2B+3E) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8$$

En identifiant les coefficients de même puissance en x on obtient le système suivant

$$\begin{cases} C = 1 \\ 2C - A + D = 4 \\ 3C - 2B - A + 2D + E = 11 \\ 3A - 4B + 3D + 2E = 12 \\ 3A - 2B + 3E = 8 \end{cases}$$

dont la solution est : $\left[A=-\frac{1}{2}, B=-1, C=1, D=\frac{3}{2}, E=\frac{5}{2}\right]$. En remplaçant A, B, C, D et E par leurs valeurs on obtient

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}dx=-\frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+2x+3}+\frac{1}{2}\int \frac{2x^2+3x+5}{\left(x^2+2x+3\right)(x+1)}dx$$

Sachant que

$$\frac{2x^2+3x+5}{\left(x^2+2x+3\right)(x+1)}=\frac{ax+b}{x^2+2x+3}+\frac{c}{x+1}=\frac{-1}{x^2+2x+3}+\frac{2}{x+1}$$

on a

$$\int \frac{2x^2+3x+5}{\left(x^2+2x+3\right)(x+1)}dx=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+2\ln|x+1|+c$$

et donc

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}dx=-\frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+2x+3}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\ln|x+1|+c$$

5) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^2}$

Solution: L'intégrale à calculer est de la forme

$$\int \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}+\int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}dx$$

En dérivant et en réduisant au même dénominateur on obtient l'identité

$$1=Ex^7+(F-A)x^6+(G-2B)x^5+(H-3C)x^4+(E-4D)x^3+(3A+F)x^2+(2B+G)x+(C+H)$$

Pour que cette identité soit vérifiée il est nécessaire qu'on ait

$$A=0, B=0, C=\frac{1}{4}, F=0, G=0, H=\frac{3}{4}, D=0, E=0$$

Par suite l'intégrale s'écrit sous la forme

$$\int \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^2}=\frac{x}{4\left(x^4+1\right)}+\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4+1}$$

On sait que x^4+1 peut s'écrire sous la forme

$$x^4+1=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+\beta x+\gamma\right)$$

En identifiant les coefficients de même puissance en x on obtient le système:

$$\begin{cases} a+\beta=0 \\ b+\gamma+a\beta=0 \\ a\gamma+b\beta=0 \\ b\gamma=1 \end{cases}$$

dont la solution est: $\left[a=\sqrt{2}, b=1, \beta=-\sqrt{2}, \gamma=1\right]$. Par suite on a

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant les coefficients de même puissance en x on obient le système

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C=0 \\ A+C-\sqrt{2}B+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases}$$

dont la solution est: $\left[A=\frac{1}{4}\sqrt{2}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{4}\sqrt{2}, D=\frac{1}{2}\right]$. Ainsi on déduit

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int\frac{x+\sqrt{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx-\int\frac{x-\sqrt{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&\qquad -\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)+c
\end{aligned}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\left(x^4+1\right)^2} &= \frac{x}{4\left(x^4+1\right)}+\frac{3\sqrt{2}}{32}\ln\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&\qquad +\frac{3\sqrt{2}}{16}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)+c
\end{aligned}$$

5 Intégrales de fonctions irrationnelles

On dit qu'une fonction f de n variables $u_1, u_2, ...u_n$ est une fonction rationnelle si elle s'écrit sous la forme:

$$f\left(u_1, u_2, ...u_n\right)=\frac{P\left(u_1, u_2, ...u_n\right)}{Q\left(u_1, u_2, ...u_n\right)}$$

où P et Q sont des polynômes des variables $u_1, u_2, ...u_n$, c'est à dire ils s'écrivent sous la forme

$$\sum_{k_1+k_2+...+k_n\leq k} a_{k_1k_2...k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2}...u_n^{k_n} \qquad\qquad k_i \in N$$

Si on remplace u_i par $\phi_i(x)$ on obtient $f[\phi_1(x), \phi_2(x), ...\phi_n(x)]$ qui est une fonction rationnelle de $\phi_1(x), \phi_2(x), ...\phi_n(x)$.

Exemples:

$f(x) = \frac{3x+\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}$ est une fonction rationnelle de $\sqrt{x}, \sqrt{1+x^4}$ et $\sqrt{1-x}$: $f(x) = R\left(\sqrt{x}, \sqrt{1+x^4}, \sqrt{1-x}\right)$.

$g(x) = \frac{\sin x+(\cos x)^3-\cos x}{3(\sin x)^2+\cos x}$ est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$: $g(x) = R(\sin x, \cos x)$.

5.1 Intégrales de la forme $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$

5.1.1 Méthode d'intégration

On considère le cas où $r_1, r_2, ..., r_s$ sont des nombres rationnels et $ad - bc \neq 0$.

Soit m un dénominateur commun des fractions $r_1, r_2, ...r_s$: $r_i = \frac{p_i}{m}$, $i = 1, 2, ..., s$.

Si on pose $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ on obtient $x = \frac{dt^m-b}{a-ct^m} = \rho(t)$, $dx = \rho'(t)\,dt$ et $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}$, $i = 1, 2, ...s$

En remplaçant ces valeurs dans l'intégrale initiale on obtient:

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx = \int R\left[\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, t^{p_1}, ..., t^{p_s}\right] \rho'(t)\,dt = \int R^*(t)\,dt$$

avec $R^*(t) = R\left[\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, t^{p_1}, ..., t^{p_s}\right] \rho'(t)$ donc $R^*(t)$ est évidemment une fonction rationnelle de t. D'où toute intégrale de la forme $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$ peut se rammener à une intégrale de fonction rationnelle. Pour calculer l'intégrale initiale il est évident qu'il faut d'abord calculer l'intégrale $\int R^*(t)\,dt$ et puis remplacer dans le résultat obtenu t par $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}$

5.1.2 Exemples

1) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Solution:

L'intégrant est de la forme $f(x) = R\left[(x)^{\frac{1}{2}}, (x)^{\frac{1}{3}}\right]$. $r_1 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $r_2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Le dénominateur commun de r_1 et r_2 est $m = 6$. Donc en posant $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$ on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\left[\int \left(t^2 - t + 1\right) dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] \\ &= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right] + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + c\end{aligned}$$

2) *Calculer l'intégrale* $\int \sqrt{(x-1)(x-2)}dx$

Solution:

Pour $x > 2$ on a $\int \sqrt{(x-1)(x-2)}dx = \int (x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$

Pour $x \leq 1$ on a $\int \sqrt{(x-1)(x-2)}dx = \int (2-x)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx$

Pour $1 < x < 2$ l'intégrale $\int \sqrt{(x-1)(x-2)}dx$ n'est pas définie.

Calculons par exemple l'intégrale pour $x > 2$. En posant $t^2 = \frac{x-1}{x-2}$ on obtient $x = \frac{1-2t^2}{1-t^2}$ et $dx = \frac{-2t^3}{(1-t^2)^2}dt$. Donc on a

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}dx = -\int \left(\frac{1-2t^2}{1-t^2} - 2\right)\frac{2t^4dt}{(1-t^2)^2} = 2\int \frac{t^4dt}{(1-t^2)^3}$$

$\left(\frac{1-2t^2}{1-t^2} - 2\right)\frac{2t^4}{(1-t^2)^2}$

Lintégrant de cette dernière égalité s'écrit sous la forme

$$\frac{t^4}{(1-t^2)^3} = \frac{3}{16(t+1)} - \frac{3}{16(t-1)} - \frac{5}{16(t-1)^2} - \frac{5}{16(t+1)^2} - \frac{1}{8(t-1)^3} + \frac{1}{8(t+1)^3}$$

En intégrant terme à terme on obtient

$$\int \frac{t^4dt}{(1-t^2)^3} = \frac{3}{16}\ln\frac{t+1}{t-1} + \frac{5}{8}\frac{t}{t^2-1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{(t+1)^2} + c$$

Il suffit de remplacer t par $\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$ et multiplier le résultat par 2 pour obtenir la valeur de l'intégrale initiale.

3) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$

Solution:

Le ppcm des dénominateurs des exposants est 6, alors on pose $2x-3 = t^6$ par suite on a

$$dx = 3t^5dt; \qquad \sqrt{2x-3} = t^3; \qquad \sqrt[3]{2x-3} = t^2$$

Ainsi on peut écrire

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx = \int \frac{3t^8}{t^2+1}dt = 3\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1\right)dt + 3\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= 3\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^5}{5} + t^3 - 3t + 3\arctan t + c$$

En revenant à la variable x on obtient

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx = 3\left\{\frac{1}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{7}} + \frac{1}{3}\sqrt{2x-3} - (2x-3)^{\frac{1}{6}} + 3\arctan(2x-3)^{\frac{1}{6}}\right\} + c$$

4) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x+1)^5}}$

Solution

Il est à remarquer que l'intégrant peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^5\left(x+1\right)^3}}=\left(x\left(x+1\right)\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}\right)^{-1}$$

On peut donc poser

$$\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}=t, \qquad \frac{x}{x+1}=t^4$$

Donc on obtient

$$x=\frac{t^4}{1-t^4}, \qquad x+1=\frac{1}{1-t^4}, \qquad dx=\frac{4t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt$$

Par suite on a

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3\left(x+1\right)^5}}=4\int\frac{1-t^4}{t^4}\left(1-t^4\right)\frac{1}{t}\frac{t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt=4\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{4}{t}+c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3\left(x+1\right)^5}}=-4\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}}+c$$

5) *Montrer que si des entiers p,q,n et k vérifient l'égalité $p+q=kn$, alors toute intégrale de la forme $\int R\left(x,(x-a)^{\frac{p}{n}}.(x-b)^{\frac{q}{n}}\right)dx$ peut se calculer à l'aide des intégrales fonctions rationnelles.*

Solution

Si on pose dans l'intégrant

$$\frac{x-a}{x-b}=t^n$$

on obtient

$$x=\frac{bt^n-a}{t^n-1}, \qquad dx=\frac{n\left(a-b\right)t^{n-1}}{\left(t^n-1\right)^2}dt, \qquad x-b=\frac{b-a}{t^n-1}$$

Par suite en tenant compte du fait que $\frac{p+q}{n}=k$ est un entier, on peut écrire

$$\begin{aligned}R\left(x,(x-a)^{\frac{p}{n}}.(x-b)^{\frac{q}{n}}\right)dx&=R\left(x,\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{p}{n}}.(x-b)^{\frac{p+q}{n}}\right)dx\\&=R\left(\frac{bt^n-a}{t^n-1},t^p\left(\frac{b-a}{t^n-1}\right)^k\right)\frac{n\left(a-b\right)t^{n-1}}{\left(t^n-1\right)^2}dt=r\left(t\right)dt\end{aligned}$$

L'intégrale initiale donc se ramène à une intégrale de fonction rationnelle.

6) *Calculer l'intégrale* $\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$

Solution

En posant $2+x=t^3$ on obtient:

$$\begin{aligned}\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx&=3\int\frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{\left(t-1\right)\left(t^2+t+2\right)}\right)dt\\&=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\int\left(\frac{t^2-2t}{\left(t-1\right)\left(t^2+t+2\right)}\right)dt\end{aligned}$$

En décomposant l'intégrant de la dernière intégrale en éléments simples on obtient

$$\begin{aligned}3\int\left(\frac{t^2-2t}{(t-1)\left(t^2+t+2\right)}\right)dt &= -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{15}{4}\int\frac{t-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}dt \\ &= -\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln\left|t^2+t+2\right|-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+c\end{aligned}$$

Par suite on a

$$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln\left|t^2+t+2\right|-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+c$$

avec $\quad t=(2+x)^{\frac{1}{3}}$

5.2 Intégrales de la forme $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Les intégrales de ce type peuvent être rammenées, à l'aide de changements de variables, à des intégrales de fonctions rationnelles. Trois cas peuvent se présenter. A chaque cas on associe un changement de variable qui permet d'obtenir l'intégrale de fonction rationnelle en question. Les changements de variables qu'on verra dans la suite sont appelés changements de variables d'Euler.

5.2.1 Cas où $a>0$

Le but est de trouver un changement de variable qui permet de supprimer la racine dans l'intégrant sans créer une autre. Pour cela on remplace la variable x par la variable t tel que

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t$$

En élevant au carré les deux parties on obtient

$$ax^2+bx+c=ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2$$

Par suite on peut écrire

$$x=\frac{t^2-c}{b\pm 2\sqrt{a}t}=R_1(t)$$

$R_1(t)$ est une fonction rationnelle de t, alors $R_1'(t)$ l'est aussi. On a $dx=R_1'(t)\,dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm R_1(t)\sqrt{a}\pm t=R_2(t)$ et donc en conclusion on obtient

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(R_1(t),R_2(t)\right)R_1'(t)\,dt=\int R^*(t)\,dt$$

Il est évident que $R^*(t)$ est une fonction rationnelle de t.

5.2.2 Cas où les racines de ax^2+bx+c sont réelles

Soit x_1 et x_2 solutions du trinôme ax^2+bx+c. Si $x_1=x_2$, alors

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)^2}=|x-x_1|\sqrt{a}$$

Dans le cas où l'expression sous le signe du radical est strictement négative, c'est à dire quand on a $a<0$, l'intégrale n'est pas définie, donc c'est un cas à ne pas étudier. .Par contre si on a $a\geq 0$ l'intégrant est une fonction rationnelle en x qui peut ne pas être la même sur les intervalles $]-\infty,x_1[$ et $]x_1,+\infty[$. Il faut donc étudier séparemment chacun des deux cas.

Etudions maintenant le cas où on a: $x_1\neq x_2$. L'expression sous le signe du radical s'écrit comme suit:

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$$

En faisant sortir $(x-x_1)$ du radical on obtient

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R_3\left(x,|x-x_1|\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}\right)$$

Ainsi on obtient l'intégrale d'une fonction déjà étudiée dont l'intégrant peut ne pas être le même sur les intervalles $]-\infty,x_1[$ et $]x_1,+\infty[$. On a vu que pour calculer une telle intégrale il suffit de faire le changement de variable: $t^2=\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$ ce qui est équivalent dans notre cas à poser: $\pm\left(x-x_1\right)t=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$.

Donc on peut aussi poser

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(x-x_1\right)t$$

Ces deux cas complètent l'étude de l'intégrale, car si aucun de ces deux cas n'est vérifié l'expression sous le radical est strictement négative, et l'intégrale ne peut être définie. Un autre cas peut être considéré en parallèle:

5.2.3 Cas où $c>0$

Dans ce cas on peut poser

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$$

En élevant au carré on obtient

$$ax^2+bx=\pm 2\sqrt{c}xt+x^2t^2$$

Ce qui donne

$$x=\frac{b\pm 2t\sqrt{c}}{t^2-a}=R_4\left(t\right),\quad dx=R_4'\left(t\right)dt\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm R_4\left(t\right)t=R_5\left(t\right)$$

En conclusion on obtient une intégrale d'une fonction rationnelle de la forme

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(R_4\left(t\right), r_5\left(t\right)\right) R_4'\left(t\right) dt$$

Il est à remarquer qu'une intégrale de la forme

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right) dx$$

peut toujours se ramener à une intégrale de la forme

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

en utilisant le changement de variable

$$t^2 = ax+b$$

En effet si on fait ce changement de variable on obtient

$$x = \frac{t^2-b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a}tdt, \quad \sqrt{cx+d} = \sqrt{\frac{c}{a}t^2 - \frac{cb}{a} + d} = \sqrt{At^2+B}$$

ce qui donne

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, |t|, \sqrt{At^2+B}\right) \frac{2}{a}tdt = \int R_6\left(t, \sqrt{At^2+B}\right) dt$$

Dans certains cas pour calculer une intégrale de la forme

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

on peut s'en passer des changements de variable d'Euler, en la transformant à l'aide d'autres changements de variable, (commencer par écrire $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$) en une intégrale d'une des formes suivantes:

$$\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt, \quad \int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt, \quad \int R\left(t, \sqrt{1+t^2}\right) dt$$

Ces intégrales peuvent être transformées en intégrales de fonctions trigonométriques ou hyperboliques à l'aide de changements de variable:

$$t = \sin u, \quad t = \cos u, \quad t = \tan u, \qquad t = \tfrac{1}{\cos u}$$
$$t = shu, \quad t = chu, \quad t = thu$$

Les intégrales de fonctions trigonométriques ou hyperboliques feront l'objet d'un chapitre dans la suite.

5.2.4 Exemples

1) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Solution

On a $a>0$, alors on peut poser $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$, ce qui donne $x=\frac{t^2-1}{1-2t}$ et $dx=-\frac{2}{(2t-1)^2}\left(t^2-t+1\right)dt$

En remplaçant dans l'intégrale x par sa valeur en t on obtient

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int \frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}dt=\int\left(\frac{2}{t-2}-\frac{1}{2t-1}+1\right)dt=t+2\ln|t-2|-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|+c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\sqrt{x^2+x+1}-x+2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}\right|+c$$

2) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x-x^2}}$

On a $c>0$ alors on peut poser $\sqrt{1-x-x^2}=1+tx$, ce qui donne $x=-\frac{2t+1}{t^2+1}$ et $dx=\frac{2}{(t^2+1)^2}\left(t^2+t-1\right)dt$

En remplaçant dans l'intégrale, x par sa valeur en t on obtient

$$\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{1-x-x^2}\right)}=\int\left(-\frac{2t^2+2t-2}{t^4+3t^3+t^2+3t}\right)dt=\int\left(\frac{1}{3(t+3)}-\frac{1}{t^2+1}(t+1)+\frac{2}{3t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t+3|-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\arctan t+\frac{2}{3}\ln|t|+c.$$

En revenant à la variable x on obtient

$$\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{1-x-x^2}\right)}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}+3\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}\right)^2+1\right)$$
$$-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}\right)+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}\right|+c$$

3) Calculer l'intégrale $\int \frac{x+\sqrt{x^2-3x+2}}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}dx$

Solution

L'intégrant est défini sur $]-\infty,1]\cup[2,+\infty[\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$.Le polynôme sous le signe du radical admet comme racines $x=1$ et $x=2$. Alors on peut poser $\sqrt{x^2-3x+2}=t(x-2)$. Ce qui donne

$$x=\frac{2t^2-1}{t^2-1},\quad dx=\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},\quad t=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$$

En remplaçant x dans l'intégrale par sa valeur en t on obtient

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2-3x+2}}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}dx=\int \frac{-2t^2-t+1}{-2t^2+t+1}dt=\int\left(\frac{2}{3(t-1)}+\frac{2}{3(2t+1)}+1\right)dt$$
$$=t+\frac{2}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{3}\ln|2t+1|+c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2-3x+2}}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}dx = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}-1\right|+\frac{1}{3}\ln\left|2\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}+1\right|+c$$

4) Calculer l'intégrale $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}dx$

Solution

L'intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dx = \int \frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

En posant $t = x - \frac{5}{2}$ on obtient

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}dx = \int \frac{t+\frac{5}{2}}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dt + \frac{5}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2t}{3}\right)^2-1}}dt$$

Ce qui donne

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}dx = \sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{5}{2}\arg ch\left(\frac{2t}{3}\right)+c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}dx = \sqrt{x^2-5x+4} + \frac{5}{2}\arg ch\left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)+c$$

5) Calculer l'intégrale $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$

Solution

Faisons le changement de variable: $2x+1=t$, duquel on déduit

$$x = \frac{t-1}{2}, \qquad dx = \frac{1}{2}dt$$

Par suite on obtient

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{4}\int \frac{(t+5)}{\sqrt{t^2-4}}dt = \frac{1}{4}\sqrt{t^2-4}+\frac{5}{4}\arg ch\left(\frac{t}{2}\right)+c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\arg ch\left(\frac{2x+1}{2}\right)+c$$

5.3 Intégrales de la forme $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Une telle intégrale peut être calculée à l'aide des changements de variable d'Euler, mais souvent ça demande de longs calculs. On propose une méthode de calcul qui dans certains cas est plus simple que la méthode qui utilise le changement de variable d'Euler. On cherche l'intégrale sous la forme:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

avec

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$$

les $n+1$ coefficients $b_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$ et a sont à déterminer.

En dérivant les deux membres de l'égalité initiale on obtient

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ce qui est équivalent à

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha$$

En remplaçant dans l'égalité précédente $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ par leurs valeurs on obtient:

$$\begin{aligned}
&2\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right) \\
&= 2\left(ax^2+bx+c\right)\left[(n-1)\,b_{n-1}x^{n-2} + ...kb_k x^{k-1} + ... + b_1\right] + \\
&(2ax+b)\left(b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_k x^k + ... + b_1 x + b_0\right) + 2\alpha
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de même puissance en x on obtient un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Les inconnues en question sont: $b_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$ et a.

$$\begin{gathered}
2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha \\
2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1 \\
\text{.............................} \\
2a_k = 2(k-1)\,ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)\,cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k \\
\text{...} \\
2a_{n-1} = 2(n-2)\,ab_{n-2} + 2(n-1)\,bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1} \\
2a_n = 2(n-1)\,ab_{n-1} + 2ab_{n-1}
\end{gathered}$$

De ce système on déduit les valeurs des coeffients $b_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$ et a et puis on calcule l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ pour remplacer toutes les inconnues par leurs valeurs dans le membre de droite de l'égalité initiale et obtenir l'intégrale recherchée.

5.3.1 Exemples

1) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+1}}$

Solution

Dans ce cas on a deux choix de changements de variable, car on $a > 0$ et $c > 0$. Posons

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$$

En élevant au carré les deux membres de cette égalité, après simplification on obtient

$$x + 2xt = t^2 - 1$$

Ce qui donne

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1} \qquad dx = \left(2\frac{t}{2t + 1} - \frac{2}{(2t + 1)^2}\left(t^2 - 1\right)\right) dt$$

En remplaçant dans l'intégrale on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{1}{1 + t - \frac{t^2 - 1}{2t + 1}} \left(2\frac{t}{2t + 1} - \frac{2}{(2t + 1)^2}\left(t^2 - 1\right)\right) dt \\ &= 2\int \frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)(t + 2)(t + 1)} dt = 2\int \left(\frac{1}{2t + 1} + \frac{1}{t + 2} - \frac{1}{t + 1}\right) dt \\ &= -2\ln|t + 1| + 2\ln|t + 2| + \ln|2t + 1| + c\end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} = &-2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + x + 1} + 1\right| + 2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + x + 1} + 2\right| \\ &+ \ln\left|2\left(x + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + 1\right| + c\end{aligned}$$

2) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{1 + 3x^2 + x^4}} dx$

Solution

En posant $x^2 = z,\quad 2xdx = dz$ l'intégrale s'écrit sous la forme

$$\int \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{1 + 3x^2 + x^4}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{z - 1}{z\sqrt{z^2 + 3z + 1}} dz$$

Pour calculer l'intégrale obtenue on peut poser

$$\sqrt{z^2 + 3z + 1} = t - z$$

ce qui donne après avoir élevé au carré les deux membres de l'égalité

$$z = \frac{t^2 - 1}{3 + 2t}, \qquad dz = \frac{2t^2 + 6t + 2}{(3 + 2t)^2} dt, \qquad z - 1 = \frac{t^2 - 2t - 4}{3 + 2t}, \qquad \sqrt{z^2 + 3z + 1} = \frac{t^2 + 3t + 1}{3 + 2t}$$

En remplaçant la variable z par la variable t dans l'intégrale on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{z - 1}{z\sqrt{z^2 + 3z + 1}} dz &= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{t^2 - 2t - 4}{3 + 2t} . 2\frac{t^2 + 3t + 1}{(3 + 2t)^2}}{\frac{t^2 - 1}{3 + 2t} . \frac{t^2 + 3t + 1}{3 + 2t}} dt \\ &= \int \frac{t^2 - 2t - 4}{(t^2 - 1)(3 + 2t)} dt = \int \frac{(t^2 - 1) - (2t + 3)}{(t^2 - 1)(3 + 2t)} dt \\ &= \int \frac{dt}{3 + 2t} - \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln|3 + 2t| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t + 1}{t - 1}\right| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(3 + 2t)(t + 1)}{t - 1}\right| + c\end{aligned}$$

En revenant à la variable z on obtient

$$\frac{1}{2}\int\frac{z-1}{z\sqrt{z^2+3z+1}}dz=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{z^2+3z+1}+2z+3\right)\left(\sqrt{z^2+3z+1}+z+1\right)}{\sqrt{z^2+3z+1}+z-1}\right|+c$$

Enfin en revenant à la variable x on déduit

$$\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(2\sqrt{x^4+3x^2+1}+2x^2+3\right)\left(\sqrt{x^4+3x^2+1}+x^2+1\right)}{\sqrt{x^4+3x^2+1}+x^2-1}\right|+c$$

Il est à remarquer qu'on aurait pu poser $\sqrt{z^2+3z+1}=tz+1$

3) *Calculer l'intégrale* $\int\frac{\left(x^3-x+1\right)dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$

Solution

On cherche l'intégrale sous la forme

$$\int\frac{\left(x^3-x+1\right)dx}{\sqrt{x^2+x+5}}=\left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+x+5}+K\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$$

En dérivant les deux membres de cette égalité on obtient

$$\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+x+5}+\left(Ax^2+Bx+C\right)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+5}}+\frac{K}{\sqrt{x^2+x+5}}$$

En réduisant au même dénominateur on déduit

$$2x^3-2x+2=2\left(2Ax+B\right)\left(x^2+x+5\right)+\left(Ax^2+Bx+C\right)(2x+1)+2K$$

En identifiant les coefficients de même puissance on obtient le système

$$\begin{cases}6A=2\\5A+4B=0\\20A+3B+2C=-2\\10B+C+2K=2\end{cases}$$

dont la solution est: $A=\frac{1}{3},B=-\frac{5}{12},C=-\frac{89}{24},K=\frac{79}{16}$

Il nous reste à calculer l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$. On a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}}=\int\frac{\sqrt{\frac{4}{19}}dx}{\sqrt{\frac{4}{19}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}}=\arg\sinh\left(\sqrt{\frac{4}{19}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

Par suite on obtient

$$\int\frac{\left(x^3-x+1\right)dx}{\sqrt{x^2+x+5}}=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{89}{24}\right)\sqrt{x^2+x+5}+\frac{79}{16}\left(\arg\sinh\left(\sqrt{\frac{4}{19}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)+c$$

4) *Calculer l'intégrale* $\int\frac{xdx}{\left(\sqrt{-x^2+7x-10}\right)^3}$

Solution

Dans ce cas le coefficient de x^2 et celui de la constante sont tous deux négatifs, mais le polynôme sous le radical admet comme solutions 5 et 2. Donc on peut poser par exemple

$$\sqrt{-x^2+7x-10} = \sqrt{(2-x)(x-5)} = (x-5)\,t$$

En élevant au carré les deux membres de cette égalité on déduit

$$2-x = (x-5)\,t^2, \quad x = \frac{2+5t^2}{t^2+1}, \quad dx = 6\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}dt, \quad (x-5)\,t = \frac{-3t}{t^2+1}$$

Par suite en remplaçant ces valeurs dans l'intégrale initiale on obtient

$$\int \frac{xdx}{\left(\sqrt{-x^2+7x-10}\right)^3} = -\frac{2}{9}\int \frac{5t^2+2}{t^2}dt = -\frac{2}{9}\int\left(5+\frac{2}{t^2}\right)dt = -\frac{2}{9}\left(5t-\frac{2}{t}\right)+c$$

En revenant à la variable initiale on trouve

$$\int \frac{xdx}{\left(\sqrt{-x^2+7x-10}\right)^3} = -\frac{2}{9}\left(5\frac{\sqrt{-x^2+7x-10}}{x-5} - 2\frac{x-5}{\sqrt{-x^2+7x-10}}\right)+c$$

5) *Calculer l'intégrale* $\int \sqrt{4x^2+3x+2}dx$

Solution

Cette intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int \frac{4x^2+3x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}}dx$$

Par suite on cherche l'intégrale sous la forme

$$\int \frac{4x^2+3x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}}dx = (ax+b)\sqrt{4x^2+3x+2}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$$

En dérivant les deux membres de cette égalité on obtient

$$\frac{4x^2+3x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}} = a\sqrt{4x^2+3x+2}+(ax+b)\frac{8x+3}{2\sqrt{4x^2+3x+2}}+\frac{\alpha}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$$

En réduisant tous les termes au même dénominateur on peut déduire

$$8x^2+6x+4 = a\left(8x^2+6x+4\right)+(ax+b)(8x+3)+2\alpha$$

En identifiant les coefficients de même puissance on btient le système

$$\begin{cases} 16a = 8 \\ 9a+8b = 6 \\ 4a+3b+2\alpha = 4 \end{cases}$$

dont la solution est: $\left[a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{16}, \alpha=\frac{23}{32}\right]$. L'intégrale est donc de la forme:

$$\int \frac{4x^2+3x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}}dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}\right)\sqrt{4x^2+3x+2}+\frac{23}{32}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$$

Il nous reste à calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x+2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{8}{\sqrt{23}}dx}{\sqrt{\frac{16}{23}\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2+1}}dx \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{4}{\sqrt{23}}\left(2x+\frac{3}{4}\right)\right)+c\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\int \sqrt{4x^2+3x+2}dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}\right)\sqrt{4x^2+3x+2}+\frac{23}{64}\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{4}{\sqrt{23}}\left(2x+\frac{3}{4}\right)\right)+c$$

5.4 Intégrales du binôme différentiel

On appelle binôme différentiel l'expression de la forme

$$f(x) = x^m\left(a+bx^n\right)^p$$

On va donner la méthode qui permet de trouver l'intégrale de f dans le cas où a et b sont des nombres réels, et m, n et p des nombres rationnels.

En posant $x = t^{\frac{1}{n}}$ on obtient

$$dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt \quad \text{et} \quad \int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1}dt = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^q dt$$

avec $q = \frac{m+1}{n}-1$

On étudie séparement les trois cas suivants:

5.4.1 Cas où p est un entier relatif

Soit $q = \frac{r}{s}$ avec r et s des entiers. D'après ce qu'on a déjà vu, il suffit de poser $z = t^{\frac{1}{s}}$ pour transformer cette intégrale en une intégrale de fonction rationnelle.

5.4.2 Cas où q est un entier relatif

Soit $p = \frac{r}{s}$ avec r et s des entiers. De même que précedemment, d'après ce qu'on a déjà vu, il suffit de poser $z = (a+bt)^{\frac{1}{s}}$ pour transformer cette intégrale en une intégrale de fonction rationnelle.

5.4.3 Cas où $p+q$ est un entier relatif

Soit $p=\frac{r}{s}$ avec r et s des entiers. L'intégrale à calculer peut s'écrire sous la forme

$$\int (a+bt)^p\, t^q dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt$$

De nouveau il suffit de poser $z=\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$ pour transformer cette intégrale en une intégrale de fonction rationnelle.

Il a été montré que si m, n et p ne vérifient aucun des cas précédents, l'intégrale du binôme différentiel ne peut pas être calculée à l'aide des fonctions usuelles.

5.4.4 Exemples

1) *Calculer l'intégrale* $\int \sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt{x})^2\, dx$

Solution

On a $p=2$, $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$ et $q=\frac{m+1}{n}-1=\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{2}}-1=\frac{5}{3}$. En posant $x=t^2$, on obtient

$$dx=2tdt, \qquad \int \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx = 2\int (1+t)^2\, t^{\frac{5}{3}} dt$$

En posant de nouveau $t=u^3$, on obtient

$$dt=3u^2du, \qquad \int (1+t)^2\, t^{\frac{5}{3}} dt = 3\int \left(1+u^3\right)^2 u^7 du = \frac{3}{8}u^8+\frac{6}{11}u^{11}+\frac{3}{14}u^{14}+c$$

En revenant aux variables initiales on obtient

$$\int \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{3}{4}t^{\frac{8}{3}}+\frac{12}{11}t^{\frac{11}{3}}+\frac{3}{7}t^{\frac{14}{3}}+c=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$$

2) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}}$

Solution

On a: $m=2$, $n=\frac{3}{2}$ et $p=-\frac{1}{3}$, alors $q=\frac{2+1}{\frac{3}{2}}-1=1$. Si on pose $x=t^{\frac{2}{3}}$, $dx=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}$, on obtient

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}}=\frac{2}{3}\int \frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}dt$$

Si de nouveau on pose $1+t=u^3$, $dt=3u^2du$ on obtient

$$\int \frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}dt = 3\int \frac{\left(u^3-1\right)u^2}{u}du=\frac{3}{5}u^5-\frac{3}{2}u^2+c$$

En revenant aux variables initiales on déduit

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}}=\frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{3}}-(1+t)^{\frac{2}{3}}+c=\frac{2}{5}\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{5}{3}}-\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}+c$$

3) *Calculer l'intégrale* $\int \sqrt[3]{x+x^3}dx$

Solution

Cette intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int \sqrt[3]{x+x^3}dx = \int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+x^2}dx$$

On a donc $m=\frac{1}{3}$, $n=2$, $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{m+1}{n}-1=\frac{\frac{1}{3}+1}{2}-1=-\frac{1}{3}$ et $p+q=0$. En posant $x=t^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+t}t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}dt$$

En posant de nouveau $\frac{1+t}{t}=u^3$, $t=\frac{1}{u^3-1}$, $dt=\frac{-3u^2}{(u^3-1)^2}du$ on obtient

$$\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}dt=\frac{-3}{2}\int \frac{u^3}{(u^3-1)^2}du=\frac{1}{2}\int ud\left(\frac{1}{u^3-1}\right)=\frac{1}{2}\frac{u}{u^3-1}-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3-1}$$

Il reste à chercher la valeur de l'intégrale $\int \frac{du}{u^3-1}$. C'est une intégrale de fonction rationnelle. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^3-1} &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1}-\frac{1}{3}\int \frac{u+2}{u^2+u+1}du=\frac{1}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{6}\ln\left(u^2+u+1\right)-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+u+1}\\ &=\frac{1}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{6}\ln\left(u^2+u+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\sqrt{\frac{4}{3}}du}{\frac{4}{3}\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+1}=\\ &=\frac{1}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{6}\ln\left(u^2+u+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right)+c\end{aligned}$$

En revenant aux variables initiales on déduit

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{x+x^3}dx &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}}{\frac{1+t}{t}-1}-\frac{1}{6}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}-1\right|+\frac{1}{12}\ln\left(\left(\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}+1\right)\\ &\quad+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}+\frac{1}{2}\right)\right)+c\\ &=\frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{x^2}}}{\frac{1+x^2}{x^2}-1}-\frac{1}{6}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{x^2}}-1\right|+\frac{1}{12}\ln\left(\left(\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{x^2}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{x^2}}+1\right)\\ &\quad+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{x^2}}+\frac{1}{2}\right)\right)+c\end{aligned}$$

4) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Solution

On a $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} - 1 = 1$. En posant $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$, on peut écrire

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 4\int t\sqrt[3]{1+t}dt$$

Si de nouveau on pose $1 + t = u^3$, $dt = 3u^2du$, on obtient

$$\int t\sqrt[3]{1+t}dt = 3\int \left(u^3-1\right)u^3du = \frac{3}{7}u^7 - \frac{3}{4}u^4 + c$$

En revenant aux variables initiales on obtient

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{12}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}} - 3(1+t)^{\frac{4}{3}} + c = \frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}} - 3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}} + c$$

5) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$

Solution

On a $m = -1$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$ et $q = \frac{-1+1}{\frac{1}{3}} - 1 = -1$. En posant $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$ on obtient

$$\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2} = 3\int \frac{dt}{t\left(1+t\right)^2} = 3\int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{t+1}\right]dt = 3\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{3}{t+1} + c$$

Par suite on peut écrire

$$\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2} = 3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\right| + \frac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + c$$

6 Intégrales de fonctions transcendentes

6.1 Intégrale de la forme $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

En général pour calculer une intégrale de la forme $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ il suffit de poser $u = \tan\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$ pour transformer une telle intégrale en une intégrale de fonction rationnelle. En effet dans ce cas on obtient

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$
$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$
$$x = 2\arctan u, \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

Après avoir remplacé ces valeurs dans l'intégrant on trouve

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}$$

Dans certains cas particuliers les calculs se simplifient en faisant d'autres changements de variable:

1) Si la fonction $R(\sin x, \cos x)$ est impaire par rapport à la première variable:

$(R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x))$, on pose $\cos x = t$

2) Si la fonction $R(\sin x, \cos x)$ est impaire par rapport à la deuxième variable:

$(R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x))$, on pose $\sin x = t$

3) Si la fonction $R(\sin x, \cos x)$ est paire par rapport aux deux variables:

$(R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x))$, on pose $\tan x = t$

6.1.1 Exemples

1) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

Solution

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$, on déduit

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Par suite on obtient

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = 2\int \frac{dt}{-t^2+2t+1} = \int \left(-\frac{\sqrt{2}}{4\left(t-1-\sqrt{2}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{4\left(t-1+\sqrt{2}\right)}\right) dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\left(t-1+\sqrt{2}\right)}{\left(t-1-\sqrt{2}\right)}\right| + c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\left(\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\right)}\right| + c$$

2) Calculer l'intégrale $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

Solution

L'intégrant est une fonction paire par rapport au sin et au cos, alors on peut poser $t = \tan x$ $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; ce qui nous conduit à

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{2-\frac{1}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sqrt{2}dt}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}t\right) + c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + c$$

3) Calculer l'intégrale $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

Solution

L'intégrant est une fonction paire par rapport au *sin* et au *cos* donc on peut poser $t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Après avoir fait ce changement de variable on obtient

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx = \int t^2\left(1+t^2\right)\frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^3}{3} + c$$

En revenant à la variable initiale on déduit

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

4) Calculer l'intégrale $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$

Solution

L'intégrant est une fonction impaire par rapport au sin donc on peut poser $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$. Ce changement de variable nous donne

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = -\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} (-\sin x)\, dx = \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt$$

En développant en éléments simples l'intégrant de la dernière intégrale on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(t-1)} - \frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) + c\end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale on déduit le résultat

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| - \frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1} \right) + c$$

5) Calculer l'intégrale $\int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^3 x} dx$

Solution

L'intégrant est une fonction impaire par rapport au cos donc on peut poser $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. A l'aide de ce changement variable l'intégrale se ramène à

$$\int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^4 x} \cos x dx = \int \frac{1+t^3}{(1-t^2)^2} dt$$

En développant en éléments simples l'intégrant de la dernière intégrale on obtient

$$\int \frac{1+t^3}{(1-t^2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{3}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)^2} \right) dt = \frac{1}{4} \ln|t-1| + \frac{3}{4} \ln|t+1| - \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + c$$

En remplaçant t par sa valeur en x on obtient

$$\int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{4} \ln|\sin x - 1| + \frac{3}{4} \ln|\sin x + 1| - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin x - 1} + c$$

6.2 Intégrale de la forme $\int \sin^p x \cos^q x dx$

On étudie le cas où p et q sont des nombres rationnels. L'intégrale $\int \sin^p x \cos^q x dx$ peut se ramener à une intégrale du binôme différentiel à l'aide des changements de variable $u = \sin x$ ou $u = \cos x$. En effet en posant par exemple $u = \sin x$ on obtient:

$$\cos x = \left(1-u^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad du = \cos x dx, \quad dx = \left(1-u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du$$

et donc on aura

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = \int u^p \left(1-u^2\right)^{\frac{q-1}{2}} du$$

Dans le cas où p et q sont des nombres entiers relatifs l'intégrale devient plus simple si on utilise un changement de variable choisi selon la parité de ces deux nombres:

1) si p est impair on pose $u = \cos x$

2) si q est impair on pose $u = \sin x$

3) si p et q sont impairs on pose $u = \cos 2x$

4) si p et q sont pairs on pose $u = \tan x$ ou bien on linéarise l'intégrant en utilisant les formules $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ et $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

6.2.1 Exemples

1) Calculer l'intégrale $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Solution

L'intégrant est une fonction paire par rapport au sin et au cos, alors on peut éliminer une des deux fonctions en la remplaçant par sa valeur en fonction de l'autre:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \cos^4 x - \cos^6 x$$

En linéarisant la partie droite de cette dernière égalité on obtient:

$$\begin{aligned}\cos^4 x - \cos^6 x &= \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(-\cos^3(2x) - \cos^2(2x) + \cos(2x) + 1\right)\end{aligned}$$

Par suite on peut écrire

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x) - \int \frac{1+\cos(4x)}{2} dx - \frac{1}{2}\int \left(1-\sin^2(2x)\right) 2\cos(2x) dx\right)$$

Après intégration on trouve

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{6}\sin^3(2x)\right) + c$$

2) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$

Solution

On a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} = \int (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{3}{2}} dx = \int (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{5}{2}} \cos x dx$$

En posant $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ on obtient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} = \int t^{-\frac{1}{2}} \left(1-t^2\right)^{-\frac{5}{4}} dt$$

En posant $t = u^{\frac{1}{2}}$, $dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ on obtient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{5}{4}}du = \frac{1}{2}\int u^{-2}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{-\frac{5}{4}}du$$

De nouveau en posant $\frac{1-u}{u} = v^4$, $u = \frac{1}{v^4+1}$ $du = -4\frac{v^3}{(v^4+1)^2}dv$ on obtient

$$\frac{1}{2}\int u^{-2}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{-\frac{5}{4}}du = -2\int \left(\frac{1}{v^4+1}\right)^{-2} v^{-5}\frac{v^3}{(v^4+1)^2}dv = -2\int \frac{dv}{v^2} = \frac{2}{v} + c$$

En revenant respectivement aux variables antérieures on obtient le résultat suivant

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} = 2\left(\frac{1-u}{u}\right)^{\frac{1}{4}} + c = 2\left(\frac{1-t^2}{t^2}\right)^{\frac{1}{4}} + c = 2\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{4}} + c = \sqrt{\tan x} + c$$

3) Calculer l'intégrale $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}dx$

Solution

On pose $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Alors l'intégrale s'écrit sous la forme

$$\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}dx = \int t^5\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{3}}dt$$

De nouveau on pose $t = u^{\frac{1}{2}}$, $dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$. Par suite on obtient

$$\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}dx = \frac{1}{2}\int u^2(1-u)^{-\frac{1}{3}}du$$

Enfin on pose $1-u = v^3$, $u = 1-v^3$, $du = -3v^2dv$. Ainsi on obtient

$$\frac{1}{2}\int u^2(1-u)^{-\frac{1}{3}}du = -\frac{3}{2}\int \left(1-v^3\right)^2\frac{1}{v}v^2dv = -\frac{3}{2}\left(\frac{v^8}{8} - \frac{2v^5}{5} + \frac{v^2}{2}\right) + c$$

En revenant successivement aux variables antérieures on aboutit au résultat

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}dx &= -\frac{3}{2}\left(\frac{(1-u)^{\frac{8}{3}}}{8} - \frac{2(1-u)^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{(1-u)^{\frac{2}{3}}}{2}\right) + c \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{(\cos x)^{\frac{16}{3}}}{8} - \frac{2(\cos x)^{\frac{10}{3}}}{5} + \frac{(\cos x)^{\frac{4}{3}}}{2}\right) + c\end{aligned}$$

4) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

Solution

En posant $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, on obtient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \int \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}dx = \int t^{-\frac{1}{2}}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{4}}dt$$

En posant de nouveau $t = u^{\frac{1}{2}}$, $dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ on obtient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \frac{1}{2}\int u^{-1}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{-\frac{1}{4}}du$$

Enfin en posant $\frac{1-u}{u} = v^4, \quad u = \frac{1}{v^4+1} \qquad du = -4\frac{v^3}{(v^4+1)^2}dv$ on aboutit au résultat suivant

$$\frac{1}{2}\int u^{-1}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{-\frac{1}{4}} du = -2\int \left(1+v^4\right) v^{-1}\frac{v^3}{\left(1+v^4\right)^2}dv = -2\int \frac{v^2}{1+v^4}dv$$

En développant en éléments simples l'intégrant de la dernière intégrale on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} &= \frac{\sqrt{2}}{8}\int\left(\frac{2v-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{v^2-\sqrt{2}v+1} - \frac{2v+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{v^2+\sqrt{2}v+1}\right)dv \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{v^2-\sqrt{2}v+1}{v^2+\sqrt{2}v+1} + \int\left(\frac{\sqrt{2}}{v^2-\sqrt{2}v+1} + \frac{\sqrt{2}}{v^2+\sqrt{2}v+1}\right)dv\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{v^2-\sqrt{2}v+1}{v^2+\sqrt{2}v+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}v-1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}v+1\right)\right) + C
\end{aligned}$$

En revenant aux variables initiales on retrouve l'intégrale en fonction de x.

5) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$

Solution

Dans cet exemple on peut éviter de transformer l'intégrale en une intégrale d'un binôme différentiel mais utiliser d'autres changements de variables. En effet on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} &= \int\frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{\tan^3 x}} = \int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\tan^3 x}}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan^3 x}}d\left(\tan x\right) \\
&= -2\frac{1}{\sqrt{\tan x}} + \frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + c
\end{aligned}$$

6.3 Intégrale de la forme $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx$

L'intégrant qui est un produit de deux fonctions trigonométriques peut être transformé en une somme de fonctions trigonométriques en utilisant une des formules suivantes

$$\begin{aligned}
\sin\alpha x\cos\beta x &= \tfrac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)x + \sin\left(\alpha-\beta\right)x\right] \\
\sin\alpha x\sin\beta x &= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)x - \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right] \\
\cos\alpha x\cos\beta x &= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)x + \cos\left(\alpha-\beta\right)x\right]
\end{aligned}$$

6.3.1 Exemples

1) Calculer l'intégrale: $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$

Solution

En linéarisant le sinus on obtient

$$\begin{aligned}\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx = &\int \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right)-\cos x\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right)dx\\ &= \int\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3x}{2}\right)-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{5x}{2}\right)-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+c\end{aligned}$$

2) Calculer l'intégrale: $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}dx$

Solution

En utilisant les formules ci-dessus on obtient

$$\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin\frac{7x}{12}+\sin\frac{x}{12}\right)dx = -6\left(\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{12}+\cos\frac{x}{12}\right)+c$$

3) Calculer l'intégrale $\int \sin^2 x\cos^2 xdx$

Solution

En linéarisant l'intégrant on obtient

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^2 xdx &= \frac{1}{4}\int(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))\,dx = \frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2(2x)\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\int(1+\cos(4x))\,dx\right) = \frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin(4x)+c\end{aligned}$$

4) Calculer l'intégrale $\int \tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$

Solution

On a

$$\begin{aligned}\int \tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx &= \int\frac{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx\\ &= \int\left(\frac{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-1\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-x = \int\frac{dx}{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}}-x\end{aligned}$$

En posant dans la dernière intégrale $t = 2x+\frac{\pi}{3}$ on obtient

$$\int\frac{dx}{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos t+\frac{1}{2}}$$

En posant $\tan\frac{t}{2} = u$ on obtient

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos t+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int\left(\frac{1}{u+\sqrt{3}}-\frac{1}{u-\sqrt{3}}\right)dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}}\right|+c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}}{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}\right|-x+c$$

5) Calculer l'intégrale $\int \sin x.\sin \frac{x}{2}.\sin \frac{x}{3} dx$

Solution

On a

$$\begin{aligned}
\int \sin x.\sin \frac{x}{2}.\sin \frac{x}{3} dx = & \int \sin x.\sin \frac{x}{2}.\sin \frac{x}{3} dx = \frac{1}{2}\int \sin x \left(\cos \frac{x}{6} - \cos \frac{5x}{6}\right) dx \\
& = \frac{1}{4}\int \left(\sin \frac{7x}{6} + \sin \frac{5x}{6} - \sin \frac{11x}{6} - \sin \frac{x}{6}\right) dx \\
& = -\frac{3}{14}\cos \frac{7x}{6} - \frac{3}{10}\cos \frac{5x}{6} + \frac{3}{22}\cos \frac{11x}{6} + \frac{3}{2}\cos \frac{x}{6} + c
\end{aligned}$$

6.4 Intégrale de la forme $\int f(shx, chx)\, dx$

Tous les types d'intégrales, qu'on a vu concernant les fonctions trigonométriques, peuvent être concidérées pour les fonctions hyperboliques. Il suffit de faire les changements de variables correspondants en utilisant les formules hyperboliques correspondantes aux formules trigonométriques. Pour retrouver les formules hyperboliques correspondantes aux formules trigonométriques, il suffit de remplacer dans les formules trigonométriques: $\cos x$ par chx et $\sin x$ par $ishx$

6.4.1 Remarque

L'intégrale d'une fonction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ peut toujours à l'aide d'un changement de variable se ramener à l'une des trois formes suivantes:

$$\begin{aligned}
&a) \quad \int R\left(x, \sqrt{p^2t^2+q^2}\right) dt \\
&b) \quad \int R\left(x, \sqrt{p^2t^2-q^2}\right) dt \\
&c) \quad \int R\left(x, \sqrt{q^2-p^2t^2}\right) dt
\end{aligned}$$

De telles intégrales peuvent être transformées en intégrales de fonctions trigonométriques ou hperboliques en posant respectivement

$$\begin{aligned}
&a) \quad t = \frac{q}{p}\tan z \quad \text{ou} \quad t = \frac{q}{p}\sinh z \\
&b) \quad t = \frac{q}{p}\sec z \quad \text{ou} \quad t = \frac{q}{p}\cosh z \\
&c) \quad t = \frac{q}{p}\sin z \quad \text{ou} \quad t = \frac{q}{p}\tanh z
\end{aligned}$$

6.4.2 Exemples

1) Calculer l'intégrale $\int \sinh x.\cosh(3x)\, dx$

Solution

On a

$$\int \sinh x.\cosh(3x)\,dx = \int (\sinh(4x) - \sinh(2x))\,dx = \frac{1}{4}\cosh(4x) - \frac{1}{2}\cosh(2x) + c$$

2) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sinh^2 x.\cosh^2 x}$

Solution

L'intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x.\cosh^2 x} = \int \frac{\left(\cosh^2 x - \sinh^2 x\right)dx}{\sinh^2 x.\cosh^2 x} = \int \frac{dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\cosh^2 x}$$

Ce qui donne

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x.\cosh^2 x} = -\cot anhx - \tanh x + c$$

3) Calculer l'intégrale $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$

Solution

On a

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}$$

Par suite en posant $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) = u \quad du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$ on peut écrire

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}dx = \frac{3}{4}\int \sqrt{u^2+1}du$$

En posant de nouveau $u = \sinh t$ on obtient

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \frac{3}{4}\int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t dt = \frac{3}{4}\int \cosh^2 t dt = \frac{3}{8}\int (1+\cosh(2t))\,dt$$
$$= \frac{3t}{8} + \frac{3\sinh(2t)}{16} + c$$

En revenant à la variable initiale on déduit le résultat.

4) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+5}}$

Solution

On a

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$$

En posant $u = x + 2$ on obtient

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2+1}}$$

Si on pose de nouveau $u = \sinh t, \quad du = \cosh t dt,$ on aura

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\coth t + c$$

En revenant à la variable initiale on déduit

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+5}} = -\frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t} + c = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} + c$$
$$= -\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x+2} + c$$

5) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

Solution

On a

$$\sqrt{(x^2+4)^3} = \left(\sqrt{(x^2+4)}\right)^3 = \left(2\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\right)^3$$

En posant $\frac{x}{2} = \sinh u \quad dx = 2\cosh u du$ on obtient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\cosh^2 u} = \frac{1}{4}\tanh u + c$$

En revenant à la variable initiale on obtient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c$$

6.5 Intégrale de la forme $\int e^{ax}P(x)\,dx$

En intégrant plusieurs fois par parties (n fois, n étant le degré de $P(x)$) on obtient

$$\int e^{ax}P(x)\,dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} + ... + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + c$$

Dans la pratique il suffit de poser

$$\int e^{ax}P(x)\,dx = e^{ax}Q(x) + c$$

avec $Q(x)$ un polynôme de même degré que $P(x)$. Pour trouver les coefficients du polynôme $Q(x)$ il suffit de dériver les deux membres de l'égalité et d'identifier les coefficient de même puissance en x.

6.5.1 Exemples

1) Calculer l'intégrale $\int e^{2x}(x^2+3x+5)\,dx$

Solution

En appliquant la formule précédente on obtient

$$\int e^{2x}\left(x^2+3x+5\right)dx = e^{2x}\left(\frac{x^2+3x+5}{2} - \frac{2x+3}{4} + \frac{2}{8}\right) + c$$
$$= e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 2\right) + c$$

2) Calculer l'intégrale $\int e^{4x}\left(x^3+1\right)dx$

Solution

L'intégrale est de la forme: $e^{4x}\left(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta\right)+c$

En dérivant on obtient

$$\begin{aligned}\left(e^{4x}\left(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta\right)+c\right)' &= e^{4x}\left(4\alpha x^3+\left(3\alpha+4\beta\right)x^2+\left(2\beta+4\gamma\right)x+\left(\gamma+4\delta\right)\right)\,4) \\ &= e^{4x}\left(x^3+1\right)\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de même puissance en x on obtient le système

$$\begin{cases} 4\alpha=1 \\ 3\alpha+4\beta=0 \\ 2\beta+4\gamma=0 \\ \gamma+4\delta=1 \end{cases}$$

dont la solution est $\left[\alpha=\frac{1}{4},\beta=-\frac{3}{16},\gamma=\frac{3}{32},\delta=\frac{29}{128}\right]$

L'intégrale est donc égale à: $e^{4x}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{32}x+\frac{29}{128}\right)+c$

3) Calculer l'intégrale $\int e^{3x}\left(2x+1\right)dx$

Solution

En utilisant l'intégration par parties on peut écrire

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\left(2x+1\right)dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\left(2x+1\right)-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\left(2x+1\right)-\frac{2}{9}e^{3x}+c \\ &= \frac{2}{3}xe^{3x}+\frac{1}{9}e^{3x}+c\end{aligned}$$

4) Calculer l'intégrale $\int e^{-x}\ln(e^x+1)dx$

Solution

On calcule cette intégrale par parties, en posant:

$$\begin{aligned} u &= \ln\left(e^x+1\right), & dv &= e^{-x}dx \\ du &= \frac{e^x}{e^x+1}dx, & v &= -e^{-x}\end{aligned}$$

Par suite on obtient

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\ln(e^x+1)dx &= -e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)+\int\frac{dx}{e^x+1}=-e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)+\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx \\ &= -e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)+x-\ln\left(e^x+1\right)+c\end{aligned}$$

5) Calculer l'intégrale $\int\left(x^2+x-\frac{5}{6}\right)\ln\left(x-1\right)dx$

Solution

On calcule cette intégrale par parties, en posant:

$$u = \ln(x-1), \qquad dv = \left(x^2 + x - \frac{5}{6}\right) dx$$

$$du = \frac{1}{x-1} dx, \qquad v = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6}$$

Par suite on obtient

$$\begin{aligned}\int \left(x^2 + x - \frac{5}{6}\right) \ln(x-1)\, dx &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6}\right) \ln(x-1) - \frac{1}{6} \int \left(2x^2 + 5x\right) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6}\right) \ln(x-1) - \frac{1}{6} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right) + c\end{aligned}$$

6.6 Intégration par parties de certaines fonctions particulières

Certaines intégrales se calculent en les intégrant une ou plusieurs fois par parties. Parmi elles on peut énumérer les intégrales suivantes

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx, \quad \int x^n \cos bx dx, \quad \int x^n \sin bx dx$$
$$\int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \arcsin x dx, \quad \int x^n \arccos x dx, \quad \int x^n \arctan x dx$$
$$\int x^n arcc \tan x dx, \quad \int x^n \ln x dx, \quad (n \text{ est un entier naturel})$$

6.6.1 Exemples

1) Calculer l'intégrale $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$

Solution

En utilisant la méthode d'intégration par parties on peut écrire

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \cos(bx)\, dx$$

$$du = ae^{ax} dx, \qquad v = \frac{1}{b} \sin(bx)$$

Par suite on obtient

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx)\, dx$$

En utilisant de nouveau la méthode d'intégration par parties on aura

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \sin(bx)\, dx$$

$$du = ae^{ax} dx, \qquad v = -\frac{1}{b} \cos(bx)$$

Et donc on peut écrire

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\right)dx$$
$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

Ce qui donne

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{be^{ax}}{a^2+b^2}\left(\sin(bx) + \frac{a}{b}\cos(bx)\right) + c$$

2) *Calculer l'intégrale* $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Solution

Calculons par parties l'intégrale $\int \frac{dx}{1+x^2}$

$$u = \frac{1}{1+x^2}, \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{-2xdx}{(1+x^2)^2}, \qquad v = x$$

En appliquant la formule d'intégration par parties on obtient

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}dx$$
$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

De la dernière égalité on déduit que

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right) + c$$

3) *Calculer l'intégrale* $\int \sin^n dx$

Solution

En intégrant par parties on obtient

$$\int \sin^n dx = -\int \sin^{n-1} xd(\cos x) = -\cos x.\sin^{n-1}x + (n-1)\int \sin^{n-2}x.\cos^2 xdx$$
$$= -\cos x.\sin^{n-1}x + (n-1)\int \sin^{n-2}xdx - (n-1)\int \sin^n xdx$$

De cette égalité on obtient

$$\int \sin^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x.\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}xdx \qquad (*)$$

Il suffit de calculer les intégrales $\int \sin dx$ et $\int \sin^2 dx$ pour en déduire par induction, en utilisant la formule (*), la valeur de l'intégrale $\int \sin^n dx$.

4) *Calculer l'intégrale* $\int \ln^2 xdx$

Solution

Intégrons par parties en posant: $u = \ln^2 x \qquad dv = dx$

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx$$

On intègre de nouveau par parties l'intégrales du second membre

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

Par suite on obtient

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$$

5) Calculer les intégrales $\quad I_1 = \int \sin(\ln x) dx \;$ et $\; I_2 = \int \cos(\ln x) dx$

Solution

En intégrant par parties on obtient

$$\begin{cases} I_1 = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx \\ I_2 = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = x \sin(\ln x) \\ I_2 - I_1 = x \cos(\ln x) \end{cases}$$

En résolvant ce dernier système on obtient

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}(x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)) \\ I_2 = \frac{1}{2}(x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)) \end{cases}$$

7 Intégrales qui ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles

Nous venons de voir des fonctions usuelles dont les primitives sont des fonctions usuelles. Cependant il existe des fonctions usuelles dont les primitives ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.Ce type de fonctions nous l'avons déjà rencontré dans l'intégration du binôme différentiel. Pour ceraines valeurs des paramètres m, n et p l'intégrale du binôme différentiel ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Par exemple il est aussi possible de montrer que les intégrales suivantes ne peuvent pas être exprimées à l'aide des fonctions usuelles:

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx, \quad \int e^{-x^2} dx$$

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx, \;\; P(x) \text{ est un polynôme de troisième ou quatrième degré}$$