2. Lois paramétriques continues.

2.1. Loi uniforme sur [a,b] (ou du rectangle). Cœst la loi dœune variable aléatoire continue qui a pour fonction de densité

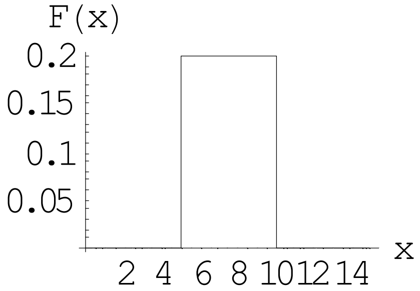
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & si \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

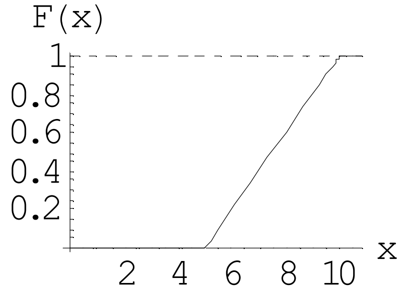
La fonction de répartition est de la forme:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

Les premiers moments valent $m = E(X) = (a+b)/2 \ ; \ \sigma^2 = (b-a)/12.$

Si $x - x' = y - y'$, alors $P(x \leq X < x') = P(y \leq X < y') = x' - x$, pour $a \leq x, x', y, y' \leq b.$
La densité et la fonction de répartition de la loi uniforme sur lœintervalle [5,10] sont représentés ci-dessous.



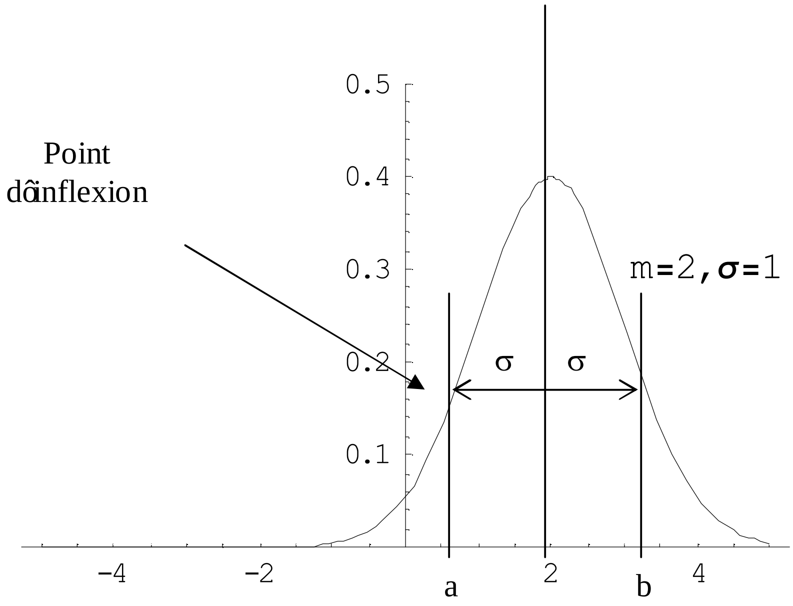


On la rencontre dans deux situations typiques :

- Au même titre que son équivalent discret, lorsque les valeurs de la variable (continue) sont équiprobables sur lœintervalle [a,b]. Dans cet esprit, la loi uniforme sur [0,1] est à la base des techniques de simulation : génération de nombres aléatoires pour la simulation de systèmes, cryptologie, jeux vidéosé
- Pour lœapproximation dœautres distributions continues sur des intervalles relativement petits. Si une variable $X \in N(m, \sigma^2)$ et donc suit une loi normale, et quœon sœintéresse au comportement de la variable dans lœintervalle des 3σ (voir également chapitre) $m - \dfrac{\sigma}{3} \leq X \leq m + \dfrac{\sigma}{3}$, alors la loi uniforme est une bonne approximation sur cet intervalle, pour certains objectifs. On la encontre également pour la modélisation des erreurs de mesures.

2.4. Loi normale (ou de Gauss, ou Laplace-Gauss) La variable X suit une loi normale de paramètres m et σ^2, on note $X \in N(m,\sigma^2)$, si sa densité est de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2} dy .$$



La courbe de Gauss est en forme de cloche. Sur la courbe ci-dessus, $P(X > a) = 0.1587$, $P(a \leq X < b) = 0.68$.

Propriétés :

1. $E(X) = m$; $Var(X) = \sigma^2$. Le mode, la médiane coïncident avec m (la fonction de densité est symétrique par rapport à la droite $x = m$.
2. Les moments sôexpriment en onction des moments centrés

$$m_k = \sum_{i=1}^{k} C_k^i \mu_i m^{k-i}, \mu_0 = 1.$$

3. Les moments centrés dòordre impairs sont nuls, à cause de la symétrie.

$$\mu_{n+2} = (n+1)\sigma^2 \mu_n,\ n = 1,2,... \text{ Ainsi, } \mu_{2k} = 1.3...(2k-1)\sigma^{2k}$$

Pour les valeurs paires, $\mu_{n+2} = (n+1)\sigma^2 \mu_n$, $n = 1,2,...$, par exemple, pour la loi $N(0,1)$, $\mu_2 = \sigma^2$.

4. La variable centrée réduite $Z = (X - m)/\sigma$ suit une loi normale $N(0,1)$, de moyenne nulle et de variance unité.
5. $a_X = 0;\ e_X^0 = 3;\ e_X = 0.$
6. La somme de deux variables aléatoires indépendantes $X \in N(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \in N(m_2, \sigma_2^2)$ suit également une loi normale $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
7. La différence de deux variables aléatoires indépendantes $X \in N(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \in N(m_2, \sigma_2^2)$ suit également une loi normale $X \in N(m_1 - m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
1. La fonction de répartition de la *loi normale standard* $N(0,1)$ (i.e. de la v.a. Z)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

et la densité de Z

$$\varphi_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

sont tabulées ou existent sous forme de sous-programmes dans la plupart des logiciels comportant un module statistique. On peut donc calculer la probabilité de tout événement

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Notons que la fonction $\Phi(x)$ sòexprime en fonction de la fonction de Laplace ou fonction dòerreur $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy,\ x \ge 0$, $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1\right]$, ce qui permet éventuellement dòutiliser les tables ou commandes informatiques de cette fonction.

6. $\Phi(0) = 1/2, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \Phi(\infty) = 1.$ $P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$

7.Le taux de défaillance de la loi normale est une fonction monotone du temps.

8. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes (deux à deux) de lois normales $N(m, \sigma_i^2)$, et α_i, des nombres réels ≥0, tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ alors la variable pondérée $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est encore une variable normale de paramètres $N(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 m_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2)$ (voir chapitres suivants). La moyenne empirique $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi normale $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$.

9. En fait, nous verrons plus loin que la propriété précédente reste vraie pour des variables aléatoires quelconques. La somme dɑun grand nombre de « petites » variables aléatoires suit approximativement une loi normale (Théorème de limite centrale).

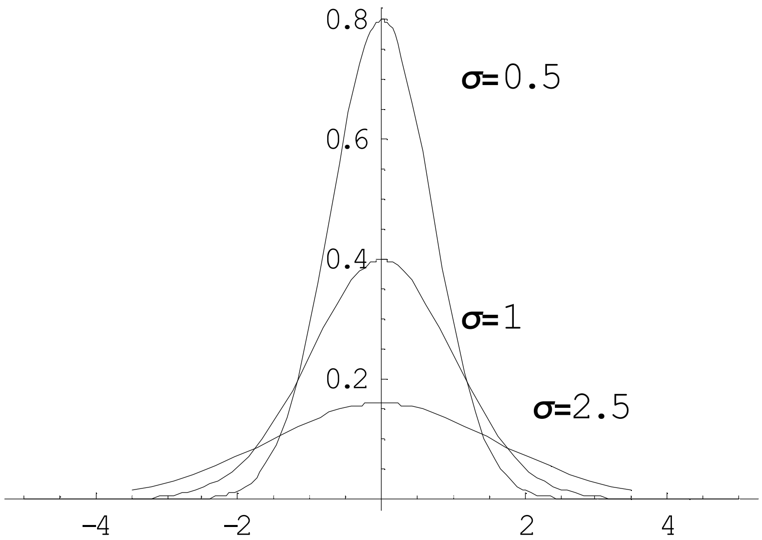


Figure 5. Densités des lois Normales pour $\sigma = 0.5, \sigma = 1, \sigma = 2.5$ $(m = 0)$.

Exemple 8 : Indiquons brièvement comment utiliser les tables de la loi normale (versions papier ou logicielle).

Supposons $X \in N(1,4)$; alors $Y = \frac{X-1}{2} \in N(0,1)$.On peut évaluer à lôaide des tables de la loi normale (cf. table 1, annexe D) ou à lôaide de logiciels comportant un module statistique :

$$\theta = P(X < 1.5) = P\left(Y < \frac{1.5-1}{2}\right) = P(Y < 0.25) = 0.59871$$

Remarque : Il faut toujours se référer au menu dôaide de la table ou du logiciel pour avoir en retour la valeur correcte. Voici quelques scénarios

(i) version tables.

Quel que soit le menu dôaide, la table fournit la valeur de la surface hachurée, et qui correspond à la valeur $\theta = u_{0.59871} = 0.25$

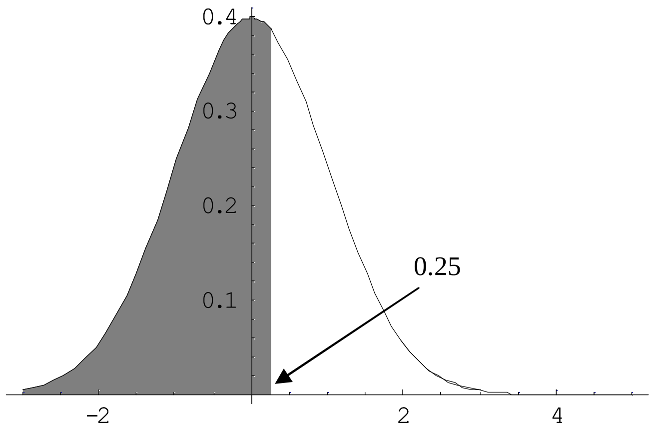


Figure 6. Aire hachurée=0.59871

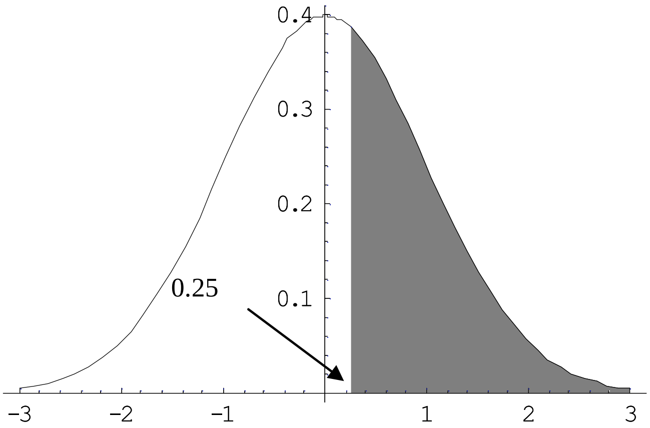


Figure 7. Aire hachurée$=1-P(Y<0.25)=P(Y\geq 0.25)$=0.40129

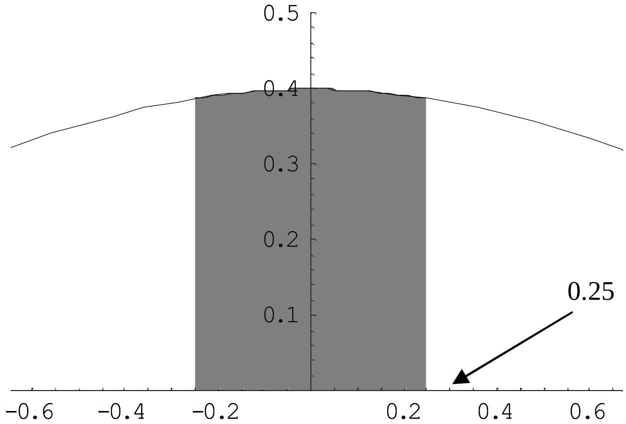
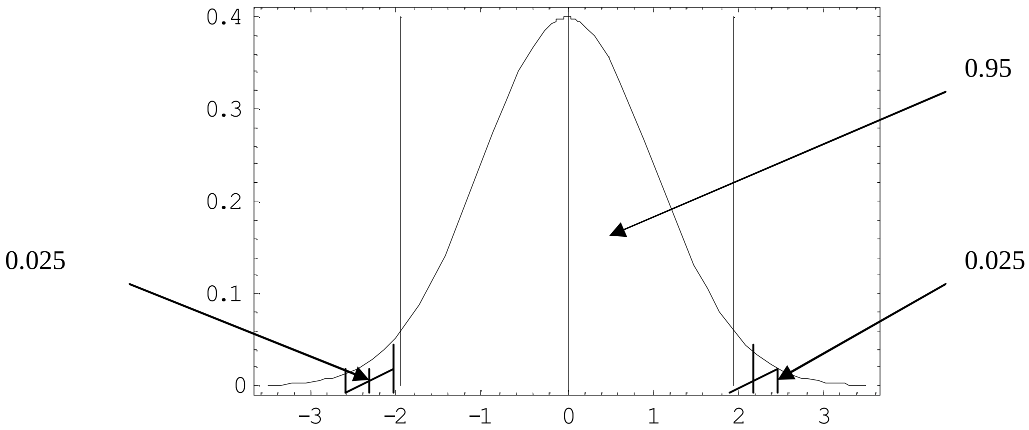


Figure 8. Aire hachurée= $P(-0.25<Y<0.25)$ =0.29742

Certaines tables fournissent les surfaces à gauche et à droite (hachurées sur la courbe ci-dessous) des deux parallèles aux axes des ordonnées, soit ici $P(Y<-1.96)+P(Y>1.96)=0.5$.



(ii) Version logicielle :

- La synthaxe en Excel pour évaluer θ est la suivante

LOI.NORMALE(x ;m ;σ ;C)

Soit la feuille de calcul Excel suivante

	A	B	C	D	E
1					
2	1.5				
3	1				
4	2				

La commande prend la syntaxe suivante : LOI.NORMALE(A2;A3;A4;VRAI)

La variable logique C prend la valeur VRAI si on souhaite évaluer la valeur de la fonction de répartition $\Phi(x)$ et FAUX si lœon souhaite celle de la valeur de la fonction de densité $\varphi(x)$

- En Mathematica, la syntaxe est

dist=NormalDistribution[1 ,2]

CDF[dist,1.5]
Ou bien en passant par la loi normale standard

dist=NormalDistribution[0 ,1]
CDF[dist,0.25]

La valeur renvoyée correspond à celle de la figure 6.
Avec Matlab (ou Maple), on peut utiliser directement la fonction erf[x] et la formule de la propriété 5 ci-dessus.

Exemple 9: La durée de vie dûun élément est exprimée en cycles et suit une loi normale de moyenne m=20 000 cycles et σ=2 000 cycles. Trouver la probabilité de bon fonctionnement pendant une période de 19000 cycles et la valeur correspondante du taux de défaillance

$\overline{F}(x) = P\left(Z > \dfrac{X - 20000}{2000} \right) = P(Z > -0.5) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5)$ La valeur est donnée par les tables de la fonction $\Phi(0.5) =$ et $\overline{F}(19000) = 0.69146$.

2.5. Loi exponentielle. Cûest la loi dûune variable aléatoire positive de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ \ x \geq 0 \\ 0 \quad si & x < 0 \end{cases} \qquad \text{et } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si\ \ x \geq 0 \\ 0 \quad si & x < 0 \end{cases}$$

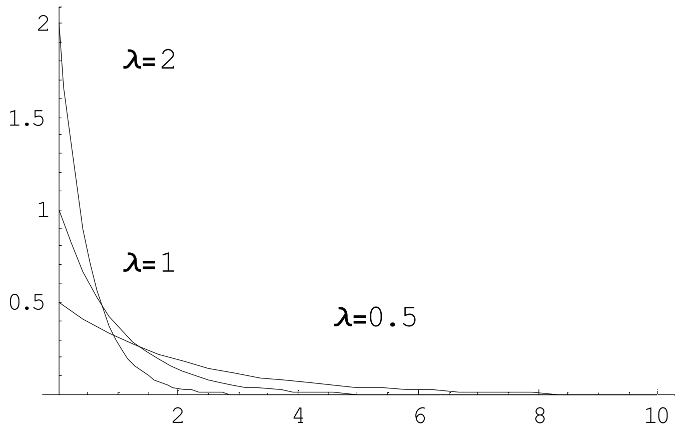


Figure 3. Densités de la loi Exponentielle de paramètre $\lambda = 0.5, 1\ et\ 2$.

Propriétés :

2. $m = E(X) = 1/\lambda$; $m_2 = 2/\lambda^2$, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$;

$$E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k} \quad \alpha_X = 2; e_X^0 = 9,\ e_X = 6,\ u_p = -\frac{1}{\lambda} Log(1-p) \quad .$$

Les moments centrés peuvent être calculés récursivement $\mu_{k+1} = (-1)^{k+1} + \frac{k+1}{\lambda}\mu_k, k = 0,1,2,...$

3. Le risque instantané $\lambda(t) = \lambda$ (on lôappelle encore *taux de défaillance* ou taux dôincidence) est constant .
4. Cette loi est particulièrement adaptée pour modéliser des durées de temps ayant la propriété dôabsence de mémoire, i.e. $P(X - t > x / X > t) = P(X > x)$.

Côest notamment le cas pour la durée de vie de certains composants électroniques : « la *durée de vie* (mesurée en heures de fonctionnement) dôun composant dôâge t, suit la même loi (exponentielle de paramètre λ) quôun élément neuf (dôâge $t = 0$).

La loi exponentielle est la seule loi continue possédant la propriété d*ôabsence de mémoire* 3 ou 4. Lôéquivalent pour le cas discret de loi sans mémoire est la loi géométrique. Dans la littérature technique anglophone de fiabilité et dôanalyse de survie, on qualifie un élément possédant une telle loi de survie de *as good as new*, côest-à-dire *aussi bon que neuf* . Cette loi est dôun usage très répandu dans de nombreuses applications pour plusieurs raisons parmi lesquelles :

1. La pratique de modélisation permet souvent de justifier une absence de mémoire auquel cas la loi exponentielle est bien adaptée (exemple de la durée de vie dôun élément toujours aussi bon que neuf) ;
2. Même si la propriété ci-dessus nôest pas vraie, il est possible parfois de se ramener moyennant certaines transformations mathématiques à des lois exponentielles.
3. Elle est souvent utilisée en guise dôapproximation première et grossière, avant de pouvoir procéder à une étude plus crédible.

Dans tous les cas, lôintérêt est que cette loi est dôun usage très simple et que les calculs analytiques revêtent une forme simple est commode. Notons quôelle nôest cependant pas adaptée des variables qui décrivent des éléments sujets à lôusure, car dans ce cas le taux de défaillance nôest pas constant.

2.7. Loi dôErlang $E_k(\lambda)$.

C'est la variable aléatoire de fonction de densité

$$p_i = \frac{\lambda^i x^{i-1} e^{-\lambda i}}{(i-1)!} \ , \ i = 0,1,2,....$$

et de fonction de répartition $\quad F(i) = 1 - e^{-\lambda i} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$

$$E(X) = k/\lambda \ ; \ \ \sigma^2 = k/\lambda^2 \ \ ; \ \ \lambda(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}}$$

Le taux de défaillance de la loi d'Erlang est monotone et $\lambda(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} \lambda(x) = \lambda$ (voir figure 4). Puisque $Var(X) = \frac{(E(X))^2}{k}$, on constate que lorsque l'espérance mathématique reste constante, la dispersion de la loi d'Erlang diminue lorsque le nombre d'étapes k augmente et à la limite lorsque $k \to \infty$, on obtient une distribution concentrée en un point unique.

La loi d'Erlang est en fait un cas particulier de la loi Gamma décrite plus loin lorsque le paramètre k n'est pas forcément un entier, mais un nombre réel positif. Cette appellation est due aux travaux de A.K. Erlang, l'un des précurseurs de la théorie des files d'attente actuellement utilisée pour la modélisation des systèmes informatiques, télécommunication et systèmes de production. Elle a été utilisée à l'époque pour modéliser la durée des conversations téléphoniques.

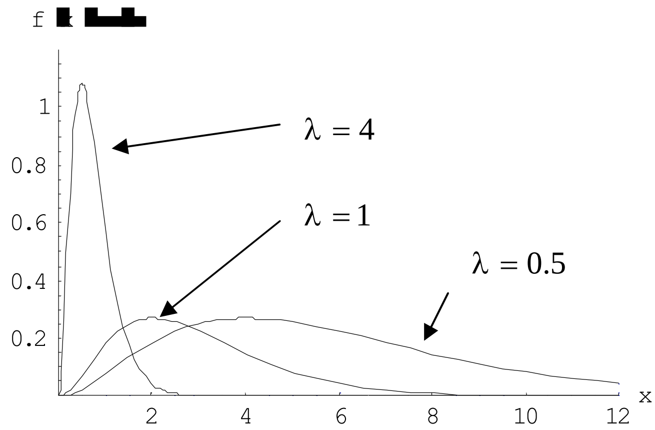
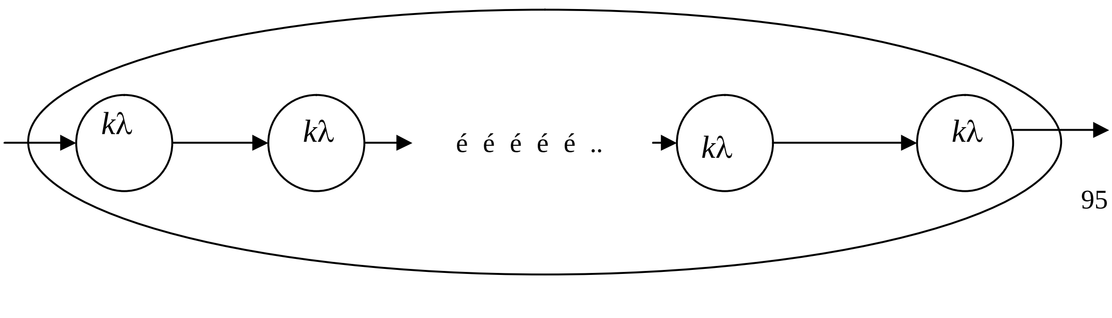


Figure 4. Densité de la loi dõErlang de paramètres λ=4 ; λ=1 et λ= 0.5 (k=3)

- Si $X_1, X_2,..., X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune exponentielle de paramètre λ, alors la somme $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ suit une loi dõErlang dõordre k et de paramètre λ. Ceci sert souvent de définition de cette loi.
- On interprète la loi dõErlang comme la loi dõune variable qui sõexprime comme la somme de k étapes exponentiellement distribuées. A titre dõexemple, imaginons une chaîne de fabrication en série constituée de k phases de production (perçage, fraisage, alésage,é). Si chaque étape de fabrication a une durée de loi exponentielle de même paramètre λ, alors la durée totale du processus de fabrication suit une loi dõErlang. Pour $k = 1$, on obtient évidemment la loi exponentielle.
- **Exemple 7:** *Modèle de chocs*. On suppose que la panne dõun système se produit dès quõil a subi k chocs. Si on suppose que les intervalles entre chocs successifs sont indépendants et identiquement distribués de loi commune exponentielle de même paramètre λ, alors la durée de vie du système (temps jusquõau k-ième choc) suit une loi dõErlang dõordre k.



Remarque: Pour éviter les confusions possibles, notons que la loi d'Erlang est parfois donnée sous une forme quelque peu différente. Ceci est dû également à des soucis de modélisation et de notation. La densité s'écrit

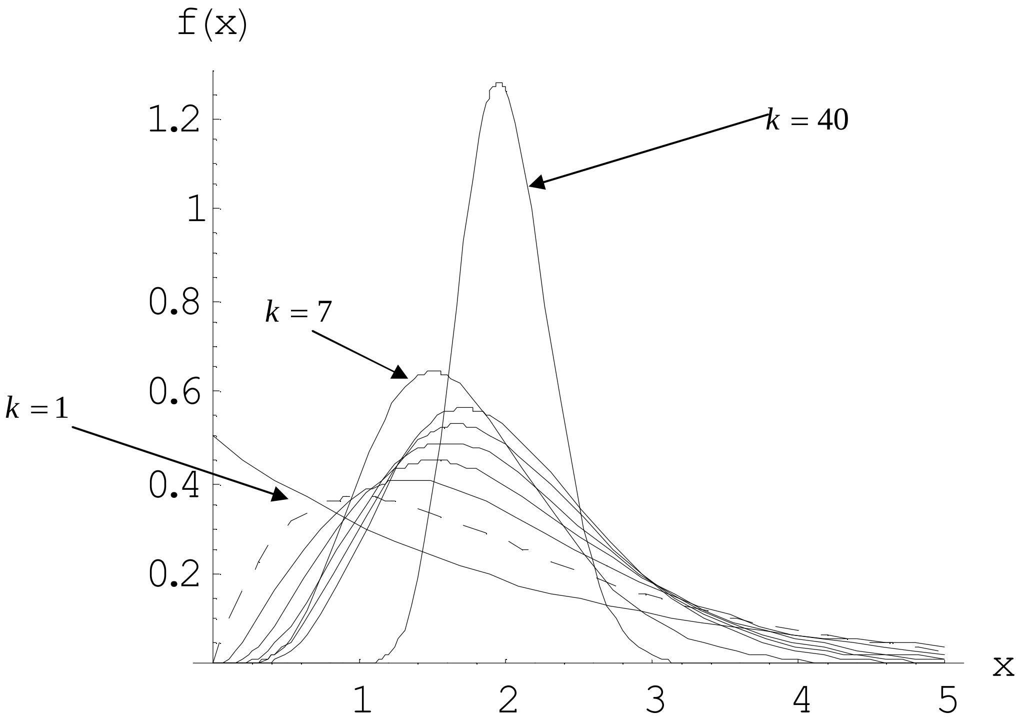
$$f(x) = \frac{k\lambda(k\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda x}, x \geq 0$$

Ceci est motivé par la volonté de coller cette définition au modèle graphique de phases ci-dessus. Dans ce cas, il faut revoir le calcul des caractéristiques. Dans le cas ci-dessus, la durée moyenne du travail total reste (par rapport aux notations de la loi exponentielle) égale à λ , qui rappelons-le est $\lambda = 1/m$, $m = E(X)$. La durée moyenne d'une phase est $E(X_i) = \frac{1}{k\lambda}$, et $Var(X_i) = \left(\frac{1}{k\lambda}\right)^2$. Par conséquent,

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = k\left(\frac{1}{k\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} = m$$

De la même manière, $\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{k\lambda^2}$. Le coefficient de variation $C_X = \frac{1}{\sqrt{k}} < 1$, car $k \geq 1$

$k = 1$



Dans cette écriture, on remarque que l'écart-type de la durée totale est celui d'une étape à un facteur prés de $1/\sqrt{k}$ .Nous verrons plus loin que lorsque k augmente, la loi d'Erlang convergera » vers une loi normale, mais ce type de densité nous donne une information supplémentaire : la manière dont cette convergence s'effectue. Le graphique ci-dessus est assez représentatif de cette convergence. On note que pour toutes les courbes la moyenne ne change pas, mais l'écart-type diminue avec le coefficient $1/\sqrt{k}$, indiquant par là une plus petite dispersion autour de la moyenne.

2.8. Loi Gamma $G(\alpha,\beta)$.

Une variable aléatoire positive suit une loi Gamma de paramètre d'échelle $\alpha \in IR_+^*$ et de paramètre de forme $\beta \in IR_+^*$ si sa densité est de la forme

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \dfrac{(\alpha x)^{\beta -1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} & si \quad x > 0,\ \alpha > 0, \beta > 1 \\ 0 \quad si \quad x \le 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\alpha x} u^{\beta-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma_{\alpha x}(\beta)}{\Gamma(\beta)}$$

où $\Gamma_x(\beta) = \int_0^x y^{\beta-1} e^{-y} dy$ où $\Gamma(\alpha) = \Gamma_\infty(\beta) = \int_0^\infty y^{\beta-1} e^{-y} dy$ est la fonction Gamma dôEuler . β est un paramètre de forme, α un paramètre dôéchelle. Si $\beta = n \in IN$, on obtient la loi dôErlang dôordre n.

La fonction Gamma possède les propriétés suivantes :

(i) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(ii) $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

(iii) $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour n entier $n = 1,2,...$

(iv) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}$, $(2n-1)!! = 1,3,5,...,(2n-1),...$

(vi) $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = (\frac{n}{2} - 1)!$ pour n pair ; $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = (\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2} - 2)... \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, si n impair.

Les moments dôordre k $m_k = E(X^k) = \frac{\Gamma(\beta + k)}{\alpha^k \Gamma(\beta)}$

En particulier , lôespérance mathématique et la variance

$$m = E(X) = \beta / \alpha \ ; \ \sigma^2 = Var(X) = \beta / \alpha^2$$

$$\mu_3 = \frac{2\beta}{\alpha^3} \ ; \ \mu_4 = \frac{3\beta(\beta + 2)}{\alpha^4}$$

$$\alpha_X = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \ ; \ e_X = \frac{3(\beta + 2)}{\beta}.$$

La fonction de risque (ou taux de défaillance)

$$\lambda(x) = \frac{\alpha(\alpha x)^{\beta-1} e^{-\alpha t}}{\Gamma(\beta) - \Gamma_{\alpha x}(\beta)}$$

Comme pour la loi d'Erlang, la loi Gamma comprend la loi exponentielle comme cas particulier ($\beta = 1, \alpha = \lambda$) et lorsque le paramètre de forme augmente, la courbe possède une forme de plus en plus aiguë comme le montre la figure 12

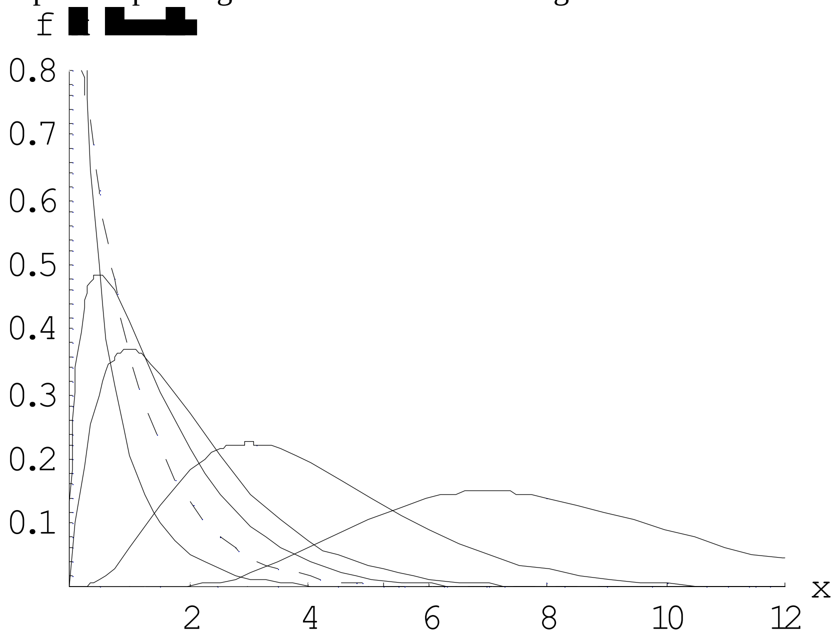


Figure 12 Densité de la loi Gamma (α=1 et β=0.5, 1,1.5, 2,4 ,8.

Ce paramètre de forme sert également de critère de détection de la monotonie du taux de défaillance

- Pour $\beta > 1$, le taux défaillance $\lambda(x)$ est croissant de $\lambda(0) = 0$ à $\lim_{x \to \infty} \lambda(x) = \alpha$.
- Pour $\beta < 1$, $\lambda(x)$ est décroissant de $\lim_{x \to 0} \lambda(x) = \infty$ à $\lim_{x \to \infty} \lambda(x) = \alpha$.

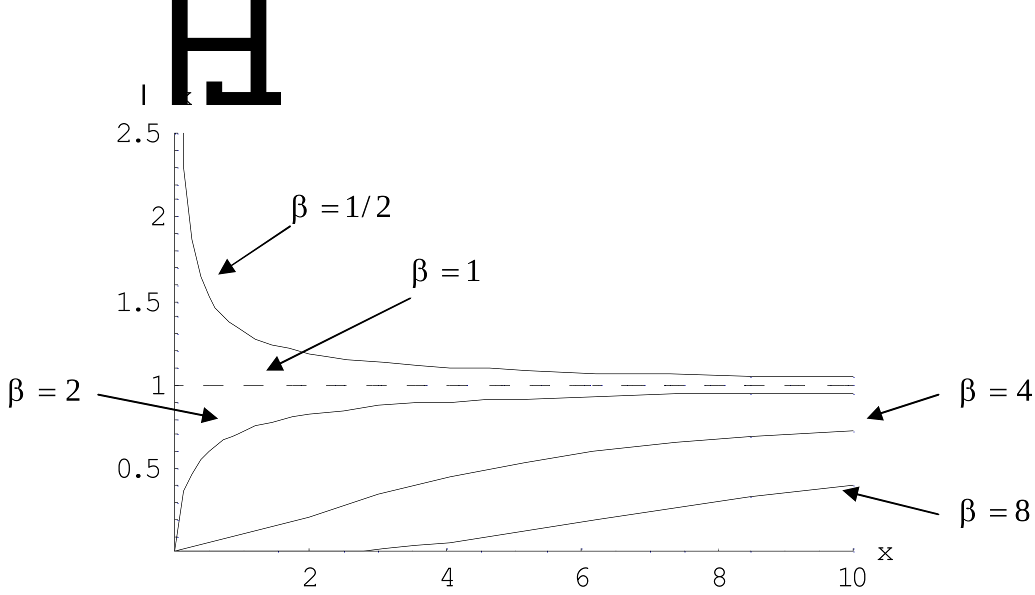


Figure 13: Fonction de risque de la loi Gamma (α=1)

Nous avons vu que pour $\beta = n \in IN$ entier, la loi Gamma n’est rien d’autre que la loi d’Erlang $G(\alpha, n)$ d’ordre n et de paramètre α. Un autre cas particulier est le cas où $\alpha = 1/2$ et $\beta = n/2$ auquel cas nous obtenons la loi du khi-deux à n degrés de liberté $G(1/2, n/2)$. Enfin, $G(1,\lambda)$ est la loi exponentielle

La loi Gamma est invariante par rapport à l’opération de convolution au sens suivant : Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires de loi Gamma $G(\alpha, \beta_1)$ et $G(\alpha, \beta_2)$, alors la somme $X_1 + X_2$ suit également une loi Gamma $G(\alpha, \beta_1 + \beta_2)$. La loi Gamma est surtout utilisée pour approcher des lois de densité uni-modale de forme non symétrique. Lorsque le paramètre de forme β croît, la loi Gamma se rapproche de la loi normale.