Chapitre 2 # Intégrales généralisées.

I. Introduction.

Nous savons que $\forall a > 0, \quad \int_1^a \frac{1}{x}dx = ln\ a$

et par suite

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x}dx = +\infty.$$

Nous savons également que $\forall a > 0 \quad \int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{a} + 1,$

et par suite

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Nous écrirons $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty,$ et nous dirons que l'intégrale diverge.

De même, nous écrirons $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1,$ et nous dirons que l'intégrale converge.

Considérons le problème de convergence suivant:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Nous voyons, que dans ce cas, on a une étude à faire au voisinage de 1 et une étude à faire au voisinage de -1. Pour cela, on étudiera séparèment les deux intégrales

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \text{ et } \int_{-a}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt, \text{ pour } 0 \leq a < 1,$$

et on fera tendre a vers 1. Il s'avère que

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = [Arc\ sin\ t]_0^a$$

et par suite, comme $Arc\ sin\ a$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on voit que cette première intégrale est convergente. De même, on a des conclusions analogues pour la deuxième intégrale. On conclut alors que l'intégrale initiale est convergente et on écrit

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi.$$

II. Définitions et exemples

Définitions: Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $b \leq +\infty$. On dit que f est localement intégrable sur $[a, b[$ si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a, b[$.

Soit f une fonction définie et localement intégrable sur un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction F définie sur $[a, b[$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

tend vers une limite l finie lorsque x tend vers b. Cette limite est l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$. On écrit

$$\int_a^b f(t)dt = l.$$

Exemples:

$$\text{Comme } \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}, \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,$$

l'intégrale est convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

$$\text{Par contre, } \int_0^1 \frac{1}{1-x}dx \text{ diverge.}$$

En effet,

$$\forall a,\ 0 \leq a < 1,\ \int_0^a \frac{1}{1-x}dx = [-\ln(1-x)]_0^a,$$

et la divergence résulte du fait que

$$\lim_{a\to 1} ln(1-a) = -\infty.$$

Définition. Soit f une fonction définie et localement intégrable sur un intervalle de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et c un élément quelconque de $]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si chacune des intégrales

$$\int_c^b f(t)dt, \text{ et } \int_a^c f(t)dt \text{ est convergente.}$$

On notera que la définition est indépendante du choix de c.

Mises en garde: 1. Il se peut que $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt$, pour $\alpha > 0$, tende vers une limite finie lorsque $\alpha \to +\infty$ sans que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente. En effet, il suffit de considérer une fonction impaire continue. Par exemple, $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ diverge alors que

$$\int_{-a}^{+a} x\,dx = 0,\ \forall a > 0.$$

2. Si f est une fonction définie, localement intégrable et bornée sur $]a, b[$, on peut affirmer directement que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente. En effet, on peut prolonger f en a et en b par n'importe quelles valeurs, l'existence de l'intégrale sera assurée car, en fait, la fonction est intégrable sur $[a, b]$. Comme exemple, on pourra étudier la fonction

$$x \longmapsto sin(\frac{1}{x}),\ \text{pour } x \in]0, 1].$$

Calcul pratique: Lorsque f est continue sur $]a, b[$, si F est une primitive de f,

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,\quad \text{pour } a < c < b,$$

alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si F admet une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en b et on a

$$F(b-) - F(a+) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque: La formule de changement de variable permet de ramener dans certains cas l'étude de la convergence sur un intervalle non borné à un intervalle borné.

La formule d'intégration par parties peut être aussi d'une grande utilité pour étudier la convergence de certaines intégrales.

Exemple 1:

$$\int_0^1 lnx\,dx \ \text{ est convergente.}$$

Grâce à une intégration par parties et en se plaçant d'abord sur un intervalle de la forme $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$, on a

$$\int_a^1 lnx\,dx = [x\,ln(x)]_a^1 - \int_a^1 1\,dx = [x\,ln(x)\ - x]_a^1.$$

On voit bien que lorsque a tend vers 0, l'intégrale tend vers une limite finie. Par conséquent, l'intégrale converge.

Exemple 2:

$$\text{Pour tout } n \geq 0,\ I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \ \text{ est convergente et vaut } n!.$$

En effet, on se place d'abord sur un intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$ sur lequel on peut établir, grâce à une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} qui est $I_{n+1} = (n+1)I_n$ avec $I_0 = 1$. La convergence de I_n entraine celle de I_{n+1}.

III. Critères généraux de convergence:

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b[$ et c un élément quelconque de $]a, b[$, on note $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. On rappelle que la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence de la limite à droite $F(a+)$ et de la limite à gauche $F(a-)$. Nous allons d'abord établir des résultats valables pour les fonctions positives.

1. Cas d'une fonction positive localement intégrable:

On se place sur un intervalle de la forme $[a, b[$, le cas d'un intervalle de le forme $]a, b]$ se ramène au cas précédent avec un changement de variable convenable.

Soit f une fonction localement intégrable et positive sur $[a, b[$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On rappelle que la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence de la limite à gauche $F(b-)$.

Proposition: Si F est majorée alors l'intégrale est convergente. Sinon, on a

$$\int_a^b f(t)dt = +\infty.$$

Critères de comparaison:

Soient f et g sont deux fonctions positives, localement intégrables sur $[a, b[$ vérifiant

$$f(t) \leq g(t), \ \forall t \in [a, b[, \text{ alors}$$

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Remarque: Il suffit de supposer $f(t) \leq g(t)$ au voisinage de b.

Exemple 1: $f(t) = e^{-t^2}$ et $g(t) = e^{-t}$ vérifient $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [0, x]$ avec $x > 0$ quelconque. La proposition précédente assure la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exemple 2:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sint} dt \text{ est divergente.}$$

Pour cela, on a
$$0 < sin\ t < t\ \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$$
et par suite sur le même intervalle
$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{sint}.$$
Comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}dt$ diverge, par conséquent $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sint}dt$ diverge aussi.

2. Cas d'une fonction localement intégrable quelconque:

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie localement intégrable sur l'intervalle considéré, non nécessairement positive.

Proposition: $I = [a, b[$ et l'intégrale considérée est notée $\int_a^b f(t)dt$.
$\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers b, la suite $(F(x_n))_n$ définie par $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt$ est convergente.

Démonstration: Si l'intégrale est convergente, alors pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers b, la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \int_a^{x_n} f(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$. Inversement, si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites convergentes vers b, les suites $(F(x_n))_n$ et $(F(y_n))_n$ sont nécessairement convergentes vers la même limite.(Sinon on pourrait construire à partir de $(x_n)_n$ et de $(y_n)_n$ une autre suite $(z_n)_n$ convergente aussi vers b mais pour laquelle $(F(z_n))_n$ serait divergente.)

Critère de Cauchy: Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$.
$$\int_a^b f(t)dt \text{ est convergente si et seulement si}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall u, v\ ;\ u, v \in]b - \delta, b[\ ;\ |\int_u^v f(t)dt| < \varepsilon.$$

Si $b = +\infty$, alors on remlacera $u, v \in]b - \delta, b[$ par $u, v > \delta$.

Démonstration: Pour la première implication, on écrit
$$\int_u^v f(t)dt = \int_a^v f(t)dt - \int_a^b f(t)dt - \int_a^u f(t)dt + \int_a^b f(t)dt.$$
En passant aux valeurs absolues et en majorant, on obtient:
$$|\int_u^v f(t)dt| < |\int_a^v f(t)dt - \int_a^b f(t)dt| + |\int_a^u f(t)dt - \int_a^b f(t)dt| < 2\epsilon.$$

Inversement, si l'intégrale de f vérifie le critère de Cauchy, cela signifie que pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers b, la suite $(F(x_n))_n$ est de Cauchy donc convergente vers une limite. De plus, cette limite ne dépend pas de la suite de $(x_n)_n$ choisie. Ainsi, F admet bien une limite finie en b ce qui implique la convergence de l'intégrale.

3. Convergence absolue et semi convergence:

Définition: Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert ou semi ouvert I d'extrémités a et b, on dit que l'intégrale de f sur I est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Le critère de comparaison pour les fonctions positives permet de déduire le théorème suivant:

Théorème: S'il existe une fonction φ telle que

$$|f(t)| \leq \varphi(t) \ \forall t \in I \ \text{ et } \int_a^b \varphi(t)dt \ \text{ convergente, alors}$$

$\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

Exemples: 1. $\int_0^1 ln\ t\ sin\ t\ dt$ est absolument convergente. En effet,

$$\int_0^1 |lnt\ sint|\ dt \leq \int_0^1 |lnt|dt,$$

et $\int_0^1 |lnt|dt = -\int_0^1 lntdt$ qui converge d'après un exemple déjà traité.

2. Etude de la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{x} dx.$$

On se place donc sur un intervalle de la forme $[1, a]$, avec $a > 1$, et on fait une intégration par parties:

$$\int_1^a \frac{sint}{t} dt = [\frac{-cost}{t}]_1^a - \int_1^a \frac{cost}{t^2} dt.$$

D'autre part, $$|\int_1^a \frac{cost}{t^2} dt| \leq \int_1^a |\frac{cost}{t^2}| dt \leq \int_1^a \frac{1}{t^2} dt \leq [-\frac{1}{t}]_1^a.$$

Ce qui prouve bien que $\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{x} dx$ est convergente modulo la proposition suivante.

Proposition Si une intégrale converge absolument alors elle converge.

Démonstration La convergence de l'intégrale en a ou en b résulte du critère de Cauchy:

$$|\int_u^v f(t)\, dt| \leq \int_u^v |f(t)| dt,$$

ceci pour tout couple $(u, v) \in I$. Par suite, puisque le critère de Cauchy est vérifié par $|f|$, il sera vérifié par f et donc l'intégrale est convergente.

Remarque importante La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple suivant.

$\int_0^{+\infty} \frac{sin\, t}{t}\, dt$ est convergente sans être absolument convergente. Nous traiterons plus tard cet exemple.

4. Fonctions équivalentes:

Proposition: Soient f et g deux fonctions définies, localement intégrables et qui gardent un même signe constant sur un intervalle $I = [a, b[$. Si f et g sont équivalentes au voisinage de b alors

$$\int_a^b f(t) dt, \text{ et } \int_a^b g(t) dt \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration: On rappelle que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de b s'il existe un voisinage de b de la forme $]b - \eta, b[$ et une fonction ψ définie sur ce voisinage tels que

$$f(t) = g(t)(1 + \psi(t)) \text{ avec } \lim_{t \to b} \psi(t) = 0.$$

Sur un voisinage convenable, et en supposant, par exemple, f et g positives, on a donc

$$\frac{1}{2} g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2} g(t).$$

On voit bien que la convergence pour f implique la convergence pour g et la divergence pour f implique la divergence pour g.

Exemples: 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{tant}} dt \text{ est de même nature que } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

D'après le résultat précédent, il suffit de vérifier que les fonctions f et g définies par

$$f(t) = 1/\sqrt{t} \text{ et } g(t) = 1/\sqrt{tant}$$

sont équivalentes et gardent un signe constant au voisinage de 0 (où se pose le problème de convergence.)

2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} cos \frac{1}{t} dt \text{ est divergente car } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ est divergente.}$$

En effet, les fonctions correspondantes sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Mise en garde: Le résultat précédent n'est plus valable pour les fonctions ne gardant pas un signe constant. On a déjà vérifié que $\int_2^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ converge mais

$$\int_2^{+\infty} \frac{sint}{t}(1+\frac{sint}{lnt})dt \text{ diverge}$$

bien que les fonctions associées soient équivalentes au voisinage de $+\infty$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{sin^2 t}{t\ lnt} dt \text{ est divergente, en effet}$$

$$\frac{sin^2 t}{t\ lnt} \geq \frac{sin^2 t}{(k+1)\pi\ ln((k+1)\pi)} \text{ pour } t \in [k\pi, (k+1)\pi],$$

en sommant les intégrales sur k, on obtient la divergence de l'intégrale qui résulte de la divergence de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi\ ln((k+1)\pi)}. \qquad \text{(Exercice)}$$

La proposition suivante donne d'autres critères qui permettent dans certains cas de traiter rapidement le problème de convergence.

Proposition: 1. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec a fini. On suppose qu'il existe $\alpha \in I\!R$ tel que $\lim_{t \to a}(t-a)^\alpha f(t)$ existe et vaut k.

- Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument.
- Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

2. Soit f une fonction définie et localement intégrable sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $\alpha \in I\!R$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t)$ existe et vaut k.

- Si $\alpha > 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemples: On peut étudier les intégrales de Riemann et de Bertrand à l'aide de ces critères.

$$\text{Pour } \int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt, \quad \text{si } \beta < 1,$$

on peut trouver α avec $\beta < \alpha < 1$ tel que

$$\lim_{t \to 0} t^\alpha \frac{1}{t^\beta} = 0,$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale lorsque $\beta < 1$.

Pour les intégrales de Bertrand, c'est à dire de la forme

$$\int_a^b \frac{1}{t^\beta(|ln\ t|)^\gamma}dt, \text{ avec }]a,b[=]0,1[\text{ ou }]a,b[=]1,\infty[,$$

et si on se place dans le cas $a = 0$ et $b = 1$, on peut donner les valeurs de β et de γ pour lesquelles l'intégrale de Bertrand est convergente. Le cas $a = 1$ et $b = +\infty$ se traite de la même manière. (Exercice.)

5. Intégrales semi convergentes. Règle d'Abel.

Règle d'Abel: Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$, positive, décroissante et telle que $f(t)$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Soit g une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$.

On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [a,+\infty[$, $|\int_a^x g(t)dt| \leq M$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Démonstration Pour montrer la convergence, on va utiliser le critère de Cauchy pour la convergence des intégrales et la deuxième formule de la moyenne. On se place sur un intervalle $[u,v] \subset [a,+\infty[$ et on considère

$$\int_u^v f(x)g(x)dx.$$

D'après la deuxième formule de la moyenne, il existe un point $c \in [u,v]$ tel que

$$\int_u^v f(x)g(x)dx = f(u+)\int_u^c g(x)dx.$$

$$\text{Ainsi } |\int_u^v f(x)g(x)dx| = |f(u+)\ \int_u^c g(x)dx| \leq 2M|f(u+)|.$$

Par suite, si $\varepsilon > 0$, alors pour u assez grand, on aura

$$|\int_u^v f(x)g(x)dx| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy est vérifié et donc l'intégrale est convergente.

Exemples: 1. Nous avons déjà vu que

$$\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$$

est convergente en utilisant une intégration par parties. Le critère d'Abel permet d'aboutir à la même conclusion. En effet, d'une part la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{t}$$

est localement intégrable, positive décroissante et tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$ et d'autre part on établit facilement que

$$|\int_c^d sin\ t\ dt| \leq 2\ ;\ \forall (c,d) \in I\!R^2.$$

Par application de la règle d'Abel, $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente.

Remarque: Cette intégrale n'est pas absolument convergente. Pour voir cela, on se place sur des intervalles de la forme $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$, avec $n \in I\!N$. Pour tout $t \in I_n$, $|\frac{sint}{t}| \geq \frac{1}{(n+1)\pi}|sint|$ et par suite

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{sint}{t}|dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |sint|dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

La dernière inégalité peut être obtenue en distinguant les cas n pair ou n impair, et en intégrant selon le cas $f(t) = sint$ ou $f(t) = -sint$. Enfin, en utilisant la relation de Chasles, on obtient:

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{sint}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

On retrouve la suite harmonique qui diverge.

2. Pour étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} tsin\ (t^3)dt,$$

et afin d'utiliser la règle d'Abel, on fait d'abord un changement de variable en posant $u = t^3$ qui permet d'obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin\ u}{3u^{1/3}} du.$$

On pose $f(u) = \frac{1}{3u^{1/3}}$ et $g(u) = sin\ u$. On a alors la convergence de l'intégrale par application de la règle d'Abel.

6. Comparaison séries-intégrales.

Théorème Soit f une fonction positive, décroissante et localement intégrable sur $[0, +\infty[$. On considère la suite ou série $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $(u_n)_n$ sont de même nature.

Démonstration.

$$\text{On a } \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \int_0^n f(x)dx.$$

Pour voir cela, il suffit de considérer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ comme l'intégrale d'une certaine fonction en escalier, c'est à dire comme somme de surfaces de rectangles. La décroissance de f donne alors la double inégalité précédente.

Ainsi, si l'intégale converge alors la suite est convergente car croissante et majorée. Inversement, si la suite converge alors l'intégrale est majorée. Puisque f est positive, l'intégrale converge.

Exemple

$$\text{La suite } (\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ ln(k)})_n \text{ est divergente.}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ ln(k)} \geq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ ln(x)} dx$$

$$\text{et } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ ln(x)} dx = [ln(|ln(x)|)]_2^{+\infty} = +\infty.$$

Remarque Pour avoir la convergence, une condition nécessaire mais non suffisante est

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

$$\text{En effet } \frac{1}{x} \text{ tend vers 0 mais } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ est divergente.}$$