E.S.I. **2009/2010**
1TCA, 1CPA et 1CPB.
Modules : Math1 et Algèbre2.

Applications Linéaires

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif et E et F deux $\mathbb{K}-e.v.$.

I/ Définitions

Définition 1 : L'application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle vérifie :

i/ $\forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y)$ et

ii/ $\forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Remarque 1 : Si f est linéaire, on dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels.

Exemples :

1/ L'application identité de E (notée id_E) est une application linéaire.

2/ L'application : $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda.x \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, est une application linéaire appelée **homotéthie** de rapport λ.

Définitions 2 et Notations : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

- Si f est bijective (resp. injective, surjective), on dit que f est un **isomorphisme (resp. monomorphisme, épimorphisme) d 'espaces vectoriels.**
- Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme de** E.
- Si $E = F$ et f bijective, on dit que f est un **automorphisme** de E.
- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E, F)$.
- L'ensemble des endomorphismes de E est noté $End(E)$.
- L'ensemble des automorphismes de E est noté $Aut(E)$.

Exemples : L'application identité de E (id_E) est un automorphisme de E.

Remarques 2 : Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors :

1/ La condition **(i)** de la définition **(1)** montre que f est un morphisme de groupes, et par conséquent :

$$f(0_E) = 0_F \text{ et } f(-x) = -f(x),\ \forall x \in E.$$

2/ On a par réccurence sur $n \in \mathbb{N}$, que :

pour un n-uplet $(x_1, x_2, \quad, x_n) \in E^n$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \quad, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$: $f\left(\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i f(x_i)$.

Proposition 1 : Soit f une application de E dans F, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i/ f est linéaire.

ii/ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

iii/ $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.

Preuve : Exercice

II/ Structure de $L(E,F)$

Théorème 1 : $(L(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}-e.v.$

Preuve : Exercice

Corollaire 1 : $End(E)$ est un $\mathbb{K}-e.v.$.

Preuve : Evidente.

Remarque 3 : $(End(E),+,\circ)$ est un anneau unitaire (non commutatif en général).

III/ Noyau et Image d'une application linéaire

Proposition 2 : Soit f une application linéaire de E dans F.

1/ Si E' est un $s.e.v.$ de E, alors $f\left(E'\right)$ est un $s.e.v.$ de F.

2/ Si F' est un $s.e.v.$ de F, alors $f^{-1}\left(F'\right)$ est un $s.e.v.$ de E.

Preuve : Exercice.

Définition 3 : Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle :

i/ Noyau de f, le sous-ensemble de E noté : $\ker f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E / f(x) = 0\}$.

ii/ Image de f, le sous-ensemble de F noté : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) / x \in E\}$.

Proposition 3 : Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

i/ $\ker f$ est un $s.e.v.$ de E.

i/ $\operatorname{Im} f$ est un $s.e.v.$ de F.

Preuve : Découle de la proposition 2.

Théorème 2 : Soit f une application linéaire de E dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i/ f injective

ii/ $\ker f = (0)$. $\Rightarrow$ dire $\ker f = 0$

iii/ $\forall x \in E : f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Preuve : Exercice.

Remarque 4 :

1/ Lorsque l'on sait que f est linéaire, on utilise systématiquement **(iii)** pour montrer l'injection de f.

2/ Si $f \in L(E,F)$, il est clair que : $\operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow f$ surjective.

Exercice 1 : Soit : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie par :

$$f(x,y,z) = (2x + y - z, 2x - y + z, 2x + y - z)$$

1/ Montrer que f est une application linéaire.

2/ Trouver une base de $\ker f$ et $\dim \ker f$.

3/ Trouver une base de $\operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.

4/ Vérifier que : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

Exercice 2 : Soit l'application :

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^4 & \\ & (x,y,z) & \mapsto f(x,y,z) = (x + 2y + 3z, y + z, x + z, 2x + y + 3z) \end{array}$$

1/ Montrer que f est linéaire.

2/ Déterminer une base de $\ker f$.

3/ Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

IV/ Familles et Applications Linéaires

Proposition 4 : Soit $f \in L(E,F)$.

1/ L'image par f d'une famille finie liée de vecteurs de E est une famille liée de vecteurs de F .

2/ L'image par f d'une famille génératrice (finie) de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Preuve :

Remarque 5 : Si f est surjective, alors l'image par f d'une famille génératrice (finie) de E est une famille génératrice de F.

Attention : L'image par f d'une famille libre de vecteurs de E n'est pas nécéssairement une famille libre de vecteurs de F .

Exemple : Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, alors $f(e_1, e_2, e_3)$ est liée, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5 : Soit $f \in L(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i/ f injective

ii/ L'image par f de toute famille libre finie de vecteurs de E est une famille libre de vecteurs de F .

Preuve :

Théorème 3 : Supposons que E et F soient de dimensions finies, et soit f une application linéaire de E dans F. Soient $(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n)$ une base de E, alors :

1/ La famille $(f(e_i))_{i=1}^{i=n}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.

2/ f surjective si et seulement si $(f(e_i))_{i=1}^{i=n}$ est génératrice de F.

3/ f injective si et seulement si $(f(e_i))_{i=1}^{i=n}$ est une famille libre de F..

4/ f bijective si et seulement si $(f(e_i))_{i=1}^{i=n}$ est une base de F.

Preuve :

Exemple : Soit l'application linéaire $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & P = a + bX + cX^2 & \mapsto & f(P) = (a+b, a-c, a+c) \end{array}$

f est-elle bijective?

Corollaire 2 : Sous les mêmes hypothèses que le théorème **3**, on a :

1/ f injective $\Rightarrow \dim E \leq \dim F$.

2/ f surjective $\Rightarrow \dim E \geq \dim F$.

Preuve :

Théorème 4 : Etant données une base $B = (e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n)$ de E et une famille $(f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une **unique** application linéaire de E dans F telle que : $\forall i \in [[1,n]] : f(e_i) = f_i$.

Preuve : exercice

Exemple : $B = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $B' = (f_1 = (1,0,0)\,,\ f_2 = (1,1,0))$.

Proposition 6 : Supposons que E est de dimension finie n. Un espace vectoriel G est isomorphe à E (i.e. qu'il existe un isomorphisme entre E et G) ssi $\dim G = n$.

Preuve :

Remarque 6 : Ce résultat montre que deux espaces vectoriels de dimensions finies **différentes** ne peuvent pas être isomorphes.

V/ Rang d'une application linéaire

On suppose dans ce paragraphe que E est de dimension finie.

Définition 4 : Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle **rang** de f, et on note $rg(f)$, la dimension sur $\mathbb{K}$ de $\operatorname{Im} f$, i.e. : $rg(f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$.

Remarque 7 : Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ base de E, alors $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ génératrice de $\operatorname{Im} f$,d'où :

1/ Cette définition a un sens car $\operatorname{Im} f$ serait de dimension finie.

2/ $\dim \operatorname{Im} f = rg(f) = rg\ (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$.

Théorème 5 (Théorème du rang) : Soit f une application linéaire de E dans F. On a la relation suivante :

$$\dim E = \dim \ker f + rgf$$

Preuve : A admettre

Corollaire 3 : Soit f une application linéaire de E dans F, où F est de dimension finie . On a :

i/ $rgf \leq \inf(\dim E, \dim F)$.

ii/ f injective ssi $rg(f) = \dim E$.

iii/ f surjective ssi $rg(f) = \dim F$.

Preuve :

Proposition 7 : Supposons que : $\dim E = \dim F = n$. Soit $f \in L(E, F)$. Les propsitions suivantes sont équivalentes :

i/ f isomorphisme de E sur F.

ii/ f injective.

iii/ f surjective.

iv/ $rg(f) = n$.

Preuve :

Théorème 6 : Supposons que E et F soient de dimensions finies, alors $L(E, F)$ est de dimension finie, de plus : $\dim L(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Preuve : A admettre.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, $B = X^2 + 1$.

A tout Polynôme $P \in E$ on associe le couple du quotient-reste $(Q, R) \in F$ de P par B .

1/ Montrer que l'on a défini ainsi une application linéaire $\varphi : E \to F$.

2/ Déterminer $\ker f$, $\operatorname{Im} f$, $\dim \ker f$, $\dim \operatorname{Im} f$.

3/ Est-ce que φ est un isomorphisme de E sur $\operatorname{Im} \varphi$.