E.S.I. **2010/2011**
1CPA et 1CPB.
Modules : Algèbre1.

Espaces Vectoriels

Dans toute la suite, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps commutatif

I/ Définitions-Propriétés

Définition 1 : Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée "$+$" et d'une application (appelée loi externe) : $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E & \to & E\\ (\alpha,x) & \mapsto & \alpha.x\end{array}\right.$. On dit que $(E,+,.)$ est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (qu'on note $\mathbb{K}-e.v$) si :

i/ $(E,+)$ est un groupe commutatif, et $\forall x,y\in E,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ on a :

ii/ $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$

iii/ $(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$

iv/ $(\alpha.\beta).x=\alpha.(\beta.x)$

v/ $1_{\mathbb{K}}.x=x$

On appelle alors **vecteurs** les éléments de E, et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Remarque 1 : Si α est un scalaire et x un vecteur, on écrit aussi αx au lieu de $\alpha.x$, et pour $\alpha\neq 0$ on peut écrire $\frac{1}{\alpha}.x$ ou $\frac{x}{\alpha}$ au lieu de $\alpha^{-1}.x$.

Exemples :

1/ $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..

2/ $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e.v..et plus généralement $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v.pour $n\in\mathbb{N}^*$.

3/ $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

4/ $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-e.v..

5/ $A(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\ \text{ application}\}:=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6/ Si E,F sont deux $\mathbb{K}$-e.v., alors on peut définir une structure canonique de $\mathbb{K}$-e.v.sur $E\times F$.

Proposition 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $\alpha\in\mathbb{K}$, $x\in E$. Alors :

i/ $0_{\mathbb{K}}.x=0_E$ et $\alpha.0_E=0_E$.

ii/ $-(\alpha.x)=\alpha.(-x)=(-\alpha).x$

iii/ $\alpha.x=0_E\Rightarrow\alpha=0_{\mathbb{K}}$ ou $x=0_E$.

Preuve :

Définition 2 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $V_1,V_2,\ ...,\ V_n$ des vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $V_1,V_2,\ ...,\ V_n$ toute somme : $\alpha_1V_1+\alpha_2V+...+\ \alpha_nV_n=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_{i.V_i}$ où $\alpha_1,\alpha_2,\ ...,\ \alpha_n\in\mathbb{K}$.

Exemples :

1/ Tout nombre complexe est combinaison linéaire à coéfficients réels de 1 et i.

2/ On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs e_1,e_2,e_3.

Plus généralement, tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$.

3/ Tout polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est combinaison linéaire des vecteurs $1, X, X^2, ..., X^n$.

Exercice : On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $v = (1, -1, 1)$, $w = (-2, 1, 1)$. Les vecteurs suivants : $x = (0, -1, 3)$ et $y = (1, -2, 0)$ sont-ils des combinaisons linéaires de v et w?

II/ Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (en abrégé s.e.v.) si la restriction de la loi interne et la restriction de la loi externe de E induisent sur F une structure de $\mathbb{K}$-e.v.

Remarque : Pour les lois induites, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Théorème 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., et F une partie de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1/ F est un sous-espace vectoriel de E.

2/ i/ F est un sous-groupe additif de $(E, +)$

ii/ F est stable pour l'opération externe, i.e. : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F : \lambda x \in F$.

3/ i/ $F \neq \emptyset$

ii/ F est stable pour l'addition, i.e.: $\forall x, y \in F$ on a : $x + y \in F$

iii/ F est stable pour l'opération externe.

4/ i/ $F \neq \emptyset$

ii/ F est stable par combinaison linéaire de couple de vecteurs, i.e.: $\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a : $\alpha x + \beta y \in F$.

5/ i/ $F \neq \emptyset$.

ii/ $\forall x, y \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ on a : $\alpha x + y \in F$.

Preuve :

Remarque 2 : Pour vérifier que $F \neq \emptyset$, il suffit de le vérifier avec 0_E car si $0_E \notin F$ alors F n'est pas un s.e.v..

Remarque 3 : Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel, on montre presque toujours que c'est un s.e.v. d'un espace vectoriel connu à l'aide du théorème ci-dessus, ce qui est bien plus rapide que de revenir à la définition.

Exemples :

1/ $\{0\}$ et E sont des s.e.v. de E appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E.

2/ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = a\}$. F est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?.

3/ Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$; l'ensemble : $\mathbb{K}_n [X] = \{P \in \mathbb{K} [X] / d^\circ P \leq n\}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..

Intersection et Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 2 : Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G deux s.e.v.de E. Alors $F \cap G$ est s.e.v. de E.

Preuve : Exercice

Attention : La réunion de deux s.e.v. de E n'est, en général, pas un s.e.v..

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(\alpha, 0, 0) / \alpha \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(0, \beta, 0) / \beta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 4 : Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F,G deux s.e.v. de E. On appelle **somme** de F et G la partie de E notée $F+G$ et formée des éléments de E qui sont de la forme $x+y$ où $x\in F$ et $y\in G$, en d'autres termes : $F+G=\{x+y/x\in F \text{ et } y\in G\}$.

Proposition 3 : Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F,G deux s.e.v. de E. Alors $F+G$ est un s.e.v. de E.

Preuve :

Remarque 4 : Si $E_1,E_2,...,E_n$ n s.e.v. de E, on définit aussi la somme : $E_1+E_2+...+E_n$ notée $\sum_{i=1}^{n}E_i$ de la manière suivante :

$$E_1+E_2+...+E_n=\sum_{i=1}^{n}E_i=\{x_1+x_2+...+x_n/x_i\in E_i \ \text{ pour } i\in[[1,n]]\}$$

De plus, $\sum_{i=1}^{n}E_i$ est un s.e.v. de E.**(à vérifier).**

Proposition 4-Définition 5 : Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F,G deux s.e.v. de E. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i/ $F\cap G=(0)$

ii/ Si $z=x+y$ avec $x\in F$ et $y\in G$, alors le couple (x,y) est unique.

Dans ce cas, on dira que la somme de F et G est **directe**, et on note : $F\oplus G$.

Si de plus, $F\oplus G=E$, on dit que F et G sont **supplémentaires.**

Preuve :

Exercice : Soient : $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=0 \text{ et } z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/y=0\}$. F et G sont-ils supplémentaires (dans $\mathbb{R}^3$).?

Propriété (très importante) : D'après ce qui précède on a :

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires} \quad &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} F+G=E \\ \text{et} \\ F\cap G=(0) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \ \forall z\in E,\ \exists\,(x,y)\in F\times G \text{ unique} :\ z=x+y \end{aligned}$$

Exercice : Soient : $E=\mathbb{R}_3[X]$, $E_1=\mathbb{R}_1[X]$, $E_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X]/P=X^2Q,\ Q\in\mathbb{R}_1[X]\}$.
Montrer que : $E=E_1\oplus E_2$.

III- Familles Libres - Familles Génératrices - Bases

Dans toute la suite E désigne un un $\mathbb{K}$-e.v..

III-1 Sous-espace engendré par un famille :

Définition 6 -Proposition 5 : Soit A une partie de E, alors il existe un plus petit s.e.v. de E contenant A. On l'appelle **s.e.v. engendré par** A et on le note $Vect(A)$ ou $VectA$ ou $\langle A\rangle$.

Preuve : A admettre

Exemple : Si $A=\varnothing$ alors $\langle A\rangle=\{0\}$.

Corollaire 1 : Si $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, où $x_i \in E$ pour $i \in [[1, n]]$, alors :

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n / \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ pour } i \in [[1, n]]\} \\ &= \left\{ y \in E / \exists (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : y = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . x_i \right\}\end{aligned}$$

Preuve :

Exemples :

1- Dans le $\mathbb{R}$-e.v.$\mathbb{C}$, on a :

$$\langle 1 \rangle = \{\alpha.1 /\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \langle i \rangle = \{\alpha.i /\ \alpha \in \mathbb{R}\} = i.\mathbb{R} \text{ et } \langle 1, i \rangle = \{\alpha.1 + \beta.i /\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$$

2- Dans le $\mathbb{K}$-e.v.$\mathbb{K}[X]$, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle 1, X, ..., X^n \rangle = \left\{\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X^2 + ... + \alpha_n X^n / \text{où } \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ pour } i \in [[0, n]]\right\} = \mathbb{K}_n[X]$$

III-2 Familles Génératrices Finies :

Définition 7 : On dit qu'une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de vecteurs de E est **génératrice de** E, ou que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ **engendre** E si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des éléments $x_1, x_2, ..., x_n$, en d'autres termes :

$$E = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \text{ ou que } \forall x \in E, \exists (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . x_i$$

Exemples :

1/ $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-e.v.$\mathbb{C}$.

2/ $(1, X, ..., X^n)$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-e.v.$\mathbb{K}_n[X]$; pour $n \in \mathbb{N}$.

3/ $(e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1))$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-e.v.$\mathbb{K}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 5 : Si une famille de vecteurs est génératrice, alors toute famille obtenue en permutant ses éléments est aussi génératrice.

Proposition 6 : Soit $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ des vecteurs de E. On a la propriété suivante :

$$x_{n+1} \in \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \textbf{ ssi } \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle = \langle x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \rangle$$

Preuve :

Exemples :

1- Dans $\mathbb{R}_n[X]$: $\langle 1, X, X^3, 2X - X^3 \rangle = \langle 1, X, X^3 \rangle$

2- Dans $\mathbb{R}^2$: $\langle (1, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1) \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$

Remarque 6 : La proposition 6 veut dire qu'à chaque fois, que dans une famille génératrice, il existe un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, on peut l'oter de cette famille. Lorsque cela ne sera plus possible, on dira que cette famille génératrice est **minimal**e.

III-3 Familles Libres Finies :

Définition 8 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'éléments de E.

- On dit que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille **libre** ou que les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont **linéairement indépendants,** si :

$$\forall \left(\alpha_i\right)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n : \left(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . x_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0 \right)$$

- Dans le cas contraire, c'est à dire si l'on peut trouver une famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de scalaires **non tous nuls** vérifiant : $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . x_i = 0$, on dit que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est **liée** ou que les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont **linéairement dépendants.**

Remarque 7 : Si une famille de vecteurs est libre, alors toute famille obtenue en permutant ses éléments est aussi libre.

Remarque 8 : Etudier l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs revient à résoudre l'équation en $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$: $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . x_i = 0$, et deux cas se présentent :

- Si cette équation admet une solution **unique** et **triviale,** alors les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont linéairement indépendants**.**

- Sinon les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont linéairement dépendants.

Exemples : 1- $\varnothing$ est une famille libre, il n'existe pas de combinaisons linéaires à coéfficients non tous nuls.

2- soit $x \in E$, alors : (x) est libre **ssi** $x \neq 0$.

3- Dans le $\mathbb{R}$-e.v.$\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est libre.

4- Dans le $\mathbb{K}$-e.v.$\mathbb{K}_n [X]$, (pour $n \in \mathbb{N}$), la famille $(1, X, ..., X^n)$ est libre.

5- Dans le $\mathbb{K}$-e.v.$\mathbb{K}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1))$ est libre.

Proposition 7 :

1- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

2- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Preuve :

Remarques 9 :

1- Toute famille contenant le vecteur nul 0 est liée.

2- Une famille libre ne peut pas avoir deux vecteurs proportionnels (ou colinéaires), et à fortiori deux vecteurs égaux.

Proposition 8 : Soient $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre et x un vecteur de E. On a la propriété suivante :

$$(x_1, x_2, ..., x_n, x) \text{ est liée } \textbf{ssi } x \in \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \textbf{ ssi } x \text{ est comb. lin. de } x_1, x_2, ..., x_n$$

Preuve :

Proposition 9 : Etant données une famille libre $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E, et deux familles de scalaires $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}$. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . x_i = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i . x_i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \text{pourtout } i \in [[1, n]]$$

III-4 Bases Finies :

Définition 9 : On dit qu'une famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, d'éléments de E est une **base** de E, si c'est une famille libre et génératrice de E.

Exemples : 1- $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$.

2- $(1, j)$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$.

3- $(1, X, ..., X^n)$ est une base du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}_n[X]$, (pour $n \in \mathbb{N}$), appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

4- $B = (e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1))$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est une base du $\mathbb{K}$-e.v.$\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

5- $B = (V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (1, 1, 0), V_3 = (1, 1, 1))$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v.R^3.

Théorème 2 : Soit $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, une famille d'éléments de E. Alors on a :

$$B \text{ est une } \textbf{base} \text{ de } E \textbf{ ssi } \forall x \in E, \exists! (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i.e_i$$

La famille $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$, qui est **unique**, est alors appelée **les composantes** du vecteur x dans **la base** B.

Preuve :

Exemples : 1- Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, les composantes d'un nombre complexe dans la base$(1, i)$, sont ses parties réelle et imaginaire.

2- Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}_n[X]$, $(n \in \mathbb{N})$, les composantes d'un polynôme : $P = \sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i$, dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, sont les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$.

3- Dans le $\mathbb{K}$-e.v.$\mathbb{K}^n$, (pour $n \in \mathbb{N}^*$), les composantes d'un vecteur $x = (x_1, ..., x_n)$, dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, sont les scalaires $x_1, ..., x_n$.

Théorème 3 : (Théorème Fondamental) Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, une famille d'éléments de E. Alors propositions suivantes sont équivalentes :

1- $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ base de E.

2- $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ libre maximale de E (i.e. : toute sur-famille de $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée).

3- $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ génératrice minimale de E (i.e. : toute sous-famille de $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas génératrice).

IV- Espaces Vectoriels de Dimension Finie

Dans toute la suite E désigne un $\mathbb{K}$-e.v..et n un entier naturel non nul.

IV-1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 10 : On dit que E est de **dimension finie,** s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, E est dit de dimension **infinie.**

Exemples :

1- Les espaces $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^n$ sont de dimensions finies.

2- Les espaces $\mathbb{R}[X]$ et $A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont de dimensions infinies.

Théorème 4 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension finie, G une partie génératrice finie de E, et L une partie libre contenue dans G. Alors il existe une partie B qui est une base de E et vérifiant : $L \subset B \subset G$.

Preuve : A admettre.

Corollaire 2 : (Théorème d'existense d'une base)

Tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie E admet une base. Plus précisement, toute famille génératrice finie d'un $\mathbb{K}$-e.v.E admet **au moins** une sous-famille qui est une base.

Preuve : il suffit de prendre : $L = \varnothing$.

Lemme 1 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension finie, G une partie génératrice finie de E, et L une partie libre de E. Alors : $CardL \leq CardG$.

Preuve : A admettre.

Définition 11 - Théorème 5 : (Théorème de la dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments n. L'entier n est appelé **dimension** de E sur $\mathbb{K}$, ou plus simplement dimension de E, il est noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$ (si aucune confusion sur le corps de base n'est à craindre).

Preuve :

Exemples :

1- $\dim \{0\} = 0$.

2- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

3- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

4- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n [X] = n + 1$.

Conséquences : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension finie n. Alors :

1- Toute famille libre a au plus n éléments, en d'autres termes toute famille ayant au moins $n + 1$ éléments est liée.

2- Toute famille génératrice a au moins n éléments.

En d'autres termes : si $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est une famille de p éléments $(p \in \mathbb{N}^*)$, alors :

i/ Si $p > n$, alors la famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est liée.

ii/ Si $p < n$, alors la famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ n'est pas génératrice.

Exemples :

1- Dans $\mathbb{R}^2$; la famille $((1, 1) , (2, 0) , (2, 5))$ est liée.

2- Dans $\mathbb{R}_3 [X]$; la famille $(1, 1 + X, 2 - X + X^2)$ n'est pas génératrice.

Théorème 6 : (Théorème de la base incomplète)

Dans un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension finie E, toute famille libre peut être complétée en une base.

Preuve :

Théorème 7 : (Caractérisation d'une base en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.de dimension finie n, et B une famille d'éléments de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)- B est une base de E.

(ii)- B est une famille libre à n éléments de E.

(iii)- B est une famille génératrice à n éléments de E.

Preuve :

Remarque 10 : Ce résultat fondamental est d'une utilisation courante : pour montrer qu'une famille B à **n** éléments est une **base** d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie n, le plus souvent on prouve que B est une famille **libre** et dans certains cas on prouve qu'elle est génératrice.

Exemple : La famille $(1, j)$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v.$\mathbb{C}$, et plus généralement la famille $(1, \omega)$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v.$\mathbb{C}$, où ω est un nombre complexe non réel.

IV-2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 8 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension finie**, et F un s.e.v. de E. Alors :

(i)- F est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

(ii)- $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$.

(iii)- $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$ si et seulement si $E = F$.

Preuve :

Exercice : Soient $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \text{ t.q. : } x + y + z + t = 0\}$. Trouver une base de F ainsi que sa dimension.

Remarque 11 : Pour déterminer une base d'un $\mathbb{K}$-e.v., on commence presque toujours par trouver une famille génératrice, à partir de laquelle on exhibe une base.

Proposition 12 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de **dimensions finies**, alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et : $\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$.

Preuve : Exercice.

Proposition 13 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et F ,G deux s.e.v. de E. Alors:

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G) .$$

Preuve : A admettre.

Corollaire 3 : Sous les mêmes hypothèses que la proposition 13, on a :

1- $\dim (F \oplus G) = \dim F + \dim G$. De plus, pour $p, m \in \mathbb{N}^*$, si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_m)$ est une base de G alors $(e_1, e_2, ..., e_m)$ est une base de $F \oplus G$.

2- Si $F \oplus G = E$, alors : $\dim E = \dim F + \dim G$, et si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_m)$ est une base de G alors $(e_1, e_2, ..., e_m)$ est une base de E.

Preuve :

Remarque 12 : On a :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} F = E + G \\ \text{et} \\ F \cap G = (0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dim E = \dim F + \dim G \\ \text{et} \\ F \cap G = (0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dim E = \dim F + \dim G \\ \text{et} \\ F + G = E \end{array} \right.$$

IV-3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 12 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et S une famille **finie** de vecteurs de E. On appelle **rang** de S, et on note $rg\,(S\ )$ ou rgS, la dimension sur $\mathbb{K}$ du s.e.v. de E engendré par S. Autrement dit : $rgS = \dim_{\mathbb{K}} \langle S \rangle$.

Proposition 13 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et S une famille finie de vecteurs de E. Le rang de S est égal au cardinal d'une sous-famille **libre maximale** de S. En d'autres termes : Le rang de S est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de S.

Preuve :

Calcul du rang d'une famille de vecteurs (Echelonnement)

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $S = (x_1, x_2, ..., x_p)$, $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs de E.

Pour tout $j \in [[1, p]]$, on pose : $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{ij}.e_i$.

Nous allons décrire une méthode élémentaire de calcul du rang de S, cette méthode utilise principalement deux lemmes :