

Chapitre 14 : Développements limités

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle, et a un point de I .

I Généralités

A) Définitions

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre n en a lorsqu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \dots + \lambda_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

Autrement dit :

Lorsqu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de a :

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \dots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Ou encore lorsqu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \dots + \lambda_n u^n + o(u^n) \text{ au voisinage de } 0.$$

Ainsi, la notion de DL à l'ordre n en a pour $f : x \mapsto f(x)$ revient à la notion de DL à l'ordre n en 0 pour $f : u \mapsto f(a+u)$.

Exemples :

- L'égalité $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ constitue un DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction cosinus.

- On veut un DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de cosinus :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x + o(x^2))\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \end{aligned}$$

- DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x + x^3 \sin x$:

$$\begin{aligned} e^x + x^3 \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \end{aligned}$$

- DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^6}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = 0 + o(x^5) = o(x^5)$$

(Vrai à n'importe quel ordre)

B) Théorème d'unicité des coefficients d'un DL

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un DL à l'ordre n en a , alors les coefficients de ce DL sont déterminés de manière unique, c'est-à-dire que si $\begin{cases} \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \\ \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n \end{cases}$ sont des réels tels que, au voisinage de 0 :

$$f(a+u) = \lambda_0 + u\lambda_1 + \dots + u^n \lambda_n + o(u^n)$$

$$\text{et } f(a+u) = \mu_0 + u\mu_1 + \dots + u^n \mu_n + o(u^n),$$

$$\text{Alors } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$$

Démonstration :

Soient ε, η deux fonctions qui tendent vers 0 telles que :

$$\forall u \in J, \lambda_0 + \lambda_1 u + \dots + \lambda_n u^n + u^n \varepsilon(u) = \mu_0 + \mu_1 u + \dots + \mu_n u^n + u^n \eta(u) \quad (1)$$

$$\text{Où } J = \{u \in \mathbb{R}, a+u \in I\}$$

Alors, en prenant $u = 0$ dans (1), on obtient déjà $\lambda_0 = \mu_0$.

En reportant et en simplifiant par u (si non nul), on obtient :

$$\forall u \in J \setminus \{0\}, \lambda_1 + \dots + \lambda_n u^{n-1} + u^{n-1} \varepsilon(u) = \mu_1 + \dots + \mu_n u^{n-1} + u^{n-1} \eta(u)$$

En faisant tendre u vers 0, on obtient alors $\lambda_1 = \mu_1 \dots$

...on répète l'opération. Donc :

$$\forall u \in J \setminus \{0\}, \lambda_{n-1} + \lambda_n u + u \varepsilon(u) = \mu_{n-1} + \mu_n u + u \eta(u)$$

$$\text{Donc } \lambda_{n-1} = \mu_{n-1}$$

$$\text{Donc } \forall u \in J \setminus \{0\}, \lambda_n + \varepsilon(u) = \mu_n + \eta(u), \text{ donc } \lambda_n = \mu_n.$$

C) Troncature d'un DL

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un DL à l'ordre n en a , alors, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, f admet un DL à l'ordre p en a , obtenu par troncature.

En effet :

- Pour $p = n$, ok

- Sinon, $p < n$:

$$f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \dots + \lambda_p u^p + \underbrace{\lambda_{p+1} u^{p+1} + \dots + \lambda_n u^n + u^n \varepsilon(u)}_{=u^p (\lambda_{p+1} u + \dots + \lambda_n u^{n-p} + u^{n-p} \varepsilon(u))} \\ =u^p \underbrace{(\lambda_{p+1} u + \dots + \lambda_n u^{n-p} + u^{n-p} \varepsilon(u))}_{\rightarrow 0} \\ =o(u^p)$$

II DL et dérivation

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$; f a un DL à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a , et dans ce cas ce DL est $f(a+u) = f(a) + \varepsilon(u)$, où ε tend vers 0 en 0.

En effet :

- Si f est continue en a , alors $f(a+u) - f(a) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$, donc $f(a+u) = f(a) + o(1)$.
- Si f admet un DL à l'ordre 0 en a , il s'écrit $f(a+u) = \lambda_0 + o(1)$, donc $f(a+u) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \lambda_0$, donc f est continue en a , et $f(a) = \lambda_0$.

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$; f admet un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a , et dans ce cas ce DL est $f(a+u) = f(a) + uf'(a) + o(u)$ (1)

En effet :

- Si f admet un DL à l'ordre 1 en a , alors $f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + u\varepsilon(u)$

Donc avec $u = 0$, $\lambda_0 = f(a)$, et pour $u \neq 0$, $\frac{f(a+u) - f(a)}{u} = \lambda_1 + \varepsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} \lambda_1$.

- Si f est dérivable en a , on a vu que l'égalité (1) est vraie.

Attention : il est faux cependant qu'on ait un tel rapport pour les ordres supérieurs à 2.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f admet un DL à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = o(x^2)$$

Donc f admet un DL à l'ordre 1 en 0 qui s'écrit $f(x) = o(x)$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Est-elle deux fois dérivable en 0 ?

$$\text{Pour } x \neq 0, f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$

$$\text{Donc } \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \underbrace{3x \sin \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{pas de limite}}$$

Donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Cependant :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit f de classe C^n sur I . Alors f admet en tout point a de I un DL à l'ordre n , qui est donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(a+u) = f(a) + f'(a)u + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}u^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}u^n + o(u^n)$$

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont la réciproque est de classe C^∞ .

Déterminer $f^{-1}(0), (f^{-1})'(0), (f^{-1})''(0), (f^{-1})'''(0)$.

Déjà f est bijective, de classe C^∞ et de dérivée ne s'annulant pas. Donc f^{-1} est de classe C^∞ .

Comme f^{-1} est de classe C^∞ , elle admet un DL à l'ordre 3 en 0 :

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x), \text{ et } \forall k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, a_k = \frac{(f^{-1})^{(k)}(0)}{k!}.$$

Pour tout réel x , on a :

$$f^{-1}(f(x)) = x = x + o(x^3) \text{ d'une part.}$$

$$\text{et } f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1(x+x^3) + a_2(x+x^3)^2 + a_3(x+x^3)^3 + (x+x^3)^3 \mathcal{E}(x+x^3)$$

$$\text{Soit } f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1x + a_1x^3 + a_2x^2 + o(x^3) + a_3x^3 + o(x^3) + x^3 \underbrace{(1+x^2)^3}_{\substack{\rightarrow 1 \\ =o(x^3)}} \underbrace{\mathcal{E}(x+x^3)}_{\rightarrow 0}$$

$$\text{Donc } f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + (a_1 + a_3)x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Donc } a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1$$

$$\text{Donc } f^{-1}(0) = 0 \quad (f^{-1})'(0) = 1 \quad (f^{-1})''(0) = 0 \quad (f^{-1})'''(0) = 3 \times (-1) = -6$$

III « Opérations sur les DL »

A) « Retour à 0 »

On rappelle que $x \mapsto f(x)$ a un DL à l'ordre n en a si et seulement si $u \mapsto f(u+a)$ a un DL à l'ordre n en 0.

Exemple :

DL à l'ordre 3 en 1 de \exp .

Pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$e^{1+u} = e \times e^u = e + e.u + e \frac{u^2}{2} + e \frac{u^3}{6} + e.u^3 \mathcal{E}(u) \text{ où } \mathcal{E}(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0.$$

B) Somme, produit par un réel

Proposition :

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Si f et g admettent un DL à l'ordre n en a , alors λf et $f + g$ aussi, et les parties principales des DL de λf et $f + g$ sont obtenues en faisant respectivement le produit de la partie principale du DL de f par λ , et en faisant la somme des parties principales des DL de f et g .

Démonstration (sans introduire les notations) :

$$f(a+x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}_{P(x)} + x^n \mathcal{E}(x)$$

$$g(a+x) = \underbrace{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}_{Q(x)} + x^n \eta(x)$$

Donc :

$$f(a+x) + g(a+x) = P(x) + Q(x) + \underbrace{x^n \eta(x)}_{=o(x^n)} + \underbrace{x^n \mathcal{E}(x)}_{=o(x^n)}.$$

Exemple :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\text{Donc } e^x + \cos x = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\text{Et } e^x + 2 \cos x = 3 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

C) Produit de deux DL

Exemple :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin x \sqrt{1+x} &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3)\end{aligned}$$

Proposition :

Si deux fonctions f et g admettent un DL à l'ordre n en a , alors $f \times g$ admet un DL à l'ordre n en a , obtenu en ne conservant que les termes de degré $\leq n$ dans le produit des parties principales (polynomiales) des DL de f et g .

Démonstration (sans introduire les notations) :

$$f(a+x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}_{P(x)} + x^n \varepsilon(x)$$

$$g(a+x) = \underbrace{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}_{Q(x)} + x^n \eta(x)$$

Donc :

$$f(a+x)g(a+x) = P(x)Q(x) + \underbrace{P(x)x^n\eta(x)}_{o(x^n)} + \underbrace{Q(x)x^n\varepsilon(x)}_{o(x^n)} + \underbrace{x^n x^n \varepsilon(x)\eta(x)}_{=o(x^{2n})=o(x^n)}.$$

D) Composition de DL

Exemple :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Donc } e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \underbrace{(-1)^n \varepsilon(x)}_{\rightarrow 0}$$

On a donc obtenu le DL à l'ordre n en 0 de $x \mapsto e^{-x}$.

Théorème :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$

Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$

Si f a un DL à l'ordre n en a , et g un DL à l'ordre n en $f(a)$, alors $g \circ f$ a un DL à l'ordre n en a , donné dans la démonstration.

Démonstration :

$$f(a+x) = \underbrace{\lambda_0}_{f(a)} + \lambda_1x + \lambda_2x^2 + \dots + \lambda_nx^n + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$g(\lambda_0 + u) = \mu_0 + \mu_1u + \mu_2u^2 + \dots + \mu_nu^n + u^n \eta(u) \text{ où } \eta(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned}
g(f(a+x)) &= g(\lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \mathcal{E}(x)}_u) \\
&= \mu_0 + \mu_1(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \mathcal{E}(x)) \\
&\quad + \mu_2(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \mathcal{E}(x))^2 + \dots \\
&\quad + \mu_n(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \mathcal{E}(x))^n \\
&\quad + \underbrace{(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \mathcal{E}(x))^n \eta(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \mathcal{E}(x))}_{\substack{x^n \times \text{termes qui tendent vers } \lambda_i^n \text{ quand } x \rightarrow 0 \\ =o(x^n)}} \xrightarrow{\rightarrow 0}
\end{aligned}$$

On a donc la somme d'un polynôme en x de degré $\leq n$ et d'une fonction négligeable devant x^n .

Exemples :

- DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{\cos x}$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \sqrt{1+u} \text{ avec } u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

$u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + u^3 \eta(u)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} &= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3) - \frac{1}{8}(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))^2 + \frac{1}{16}(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))^3 \\
&\quad + \underbrace{(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))^3 \eta(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))}_{\substack{\rightarrow 0 \\ =o(x^6)}} \\
&= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)
\end{aligned}$$

On remarque qu'on pouvait se contenter de $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2 \eta(u)$

- DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin^3 x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \mathcal{E}(x) \text{ où } \mathcal{E}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$(\sin x)^3 = x^3 (1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \mathcal{E}(x))^3 = x^3 + x^3 \eta(x) \text{ où } \eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

On pouvait là aussi se contenter de $\sin x = x + o(x^2)$

- DL à l'ordre 4 de $x \mapsto e^{\cos x}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{\cos x} = \exp(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = e \exp(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4))$$

$$\text{Or, } e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^2)$$

$$\text{Donc } \exp(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\text{Donc } e^{\cos x} = e - e \frac{x^2}{2} + e \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

E) Inverse

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(a) \neq 0$, et si f a un DL à l'ordre n en a , alors $\frac{1}{f}$ aussi.

Démonstration :

$$f(a+x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x), \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ et } \lambda_0 \neq 0.$$

Comme f a un DL à l'ordre n en a , f a un DL à l'ordre 0 en a , donc f est continue en a , donc, comme $f(a) \neq 0$, f est strictement du signe de $f(a)$ au voisinage de a , donc $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a .

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(a+x)} &= \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + x^n \varepsilon(x)} \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \times \frac{1}{1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots + \mu_n x^n + x^n \eta(x)} \end{aligned}$$

Où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$, et $\eta = \frac{\varepsilon}{\lambda_0}$

On note $g(x) = \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots + \mu_n x^n + x^n \eta(x)$

Alors g a un DL à l'ordre n en 0, et $g(0) = 0$

$u \mapsto \frac{1}{1+u}$ a un DL à l'ordre n en 0, donc, par composition, $x \mapsto \frac{1}{1+g(x)}$ a un DL

à l'ordre n en 0, d'où l'existence.

Rappel :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

Exemples :

- DL à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x}$:

$$1 + \cos x = 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)} \right)$$

$$\text{Or, } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Si on prend $u = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)$, on aura :

$$u^2 = \frac{x^4}{16} + o(x^4)$$

Et $o(u^2) = o(x^4)$ car $u^2 \sim \frac{x^4}{16}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{1}{1 + \cos x} &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4) \right) + \left(\frac{x^2}{16} + o(x^4) \right) + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{48} + o(x^4) \end{aligned}$$

- DL à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{6}$ de $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + u\right) = \sin u \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos u \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} + u)} = \frac{2}{\sqrt{3} \sin u + \cos u} = \frac{2}{\sqrt{3}(u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)) + (1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3))}$$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{3}u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}u^3 + o(u^3)}$$

Or, $\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - v^3 + o(v^3)$

Si on prend $v = \sqrt{3}u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}u^3 + o(u^3)$, on a :

$$v^2 = u^2(\sqrt{3} - \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{6}u^2 + o(u^2))^2 = u^2(3 - \sqrt{3}u + o(u)) = 3u^2 - \sqrt{3}u^3 + o(u^3)$$

$$v^3 = 3\sqrt{3}u^3 + o(u^3)$$

$$o(v^3) = o(u^3) \text{ car } v^3 \sim 3\sqrt{3}u^3$$

Donc $\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} + u)} = 2(1 - \sqrt{3}u + \frac{7}{2}u^2 - \frac{23\sqrt{3}}{6}u^3 + o(u^3))$

IV Primitive, dérivée

A) Primitive

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, admettant un DL à l'ordre n en a .

Si f admet une primitive F sur I , alors F admet un DL à l'ordre $n+1$ en a , obtenu de la manière suivante :

Si $f(a+x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + o(x^n)$,

Alors $F(a+x) = F(a) + \lambda_0 x + \frac{\lambda_1}{2} x^2 + \frac{\lambda_2}{3} x^3 + \dots + \frac{\lambda_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$.

Démonstration :

$$f(a+x) = \underbrace{\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n}_{P(x)} + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Posons $Q(x) = F(a) + \lambda_0 x + \frac{\lambda_1}{2} x^2 + \dots + \frac{\lambda_n}{n+1} x^{n+1}$

Ainsi, $Q' = P$.

On doit donc montrer que $F(a+x) - Q(x) = o(x^{n+1})$.

Notons $J = \{x \in \mathbb{R}, a+x \in I\}$

Soit $x \in J \setminus \{0\}$.

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $t \mapsto F(a+t) - Q(t)$ entre 0 et x , il existe $c_x \in]0, x[$ tel que :

$$(F(a+x) - Q(x)) - \underbrace{(F(a) - Q(0))}_{=0} = \underbrace{(f(a+c_x) - P(c_x))}_{(c_x)^n \varepsilon(c_x)} \times x$$

Ainsi, pour $x \neq 0$:

$$\frac{F(a+x) - Q(x)}{x^{n+1}} = x \times (c_x)^n \varepsilon(c_x) \frac{1}{x^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{c_x}{x}\right)^n}_{\text{borné car } \left|\frac{c_x}{x}\right| \leq 1} \times \underbrace{\varepsilon(c_x)}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ car} \\ c_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}} \rightarrow 0$$

Donc $\frac{F(a+x) - Q(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 0$, donc $F(a+x) - Q(x) = o(x^{n+1})$.

B) Dérivation

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable et admet un DL à l'ordre n en a , et si f' admet un DL à l'ordre $n-1$ en a , alors ce DL est obtenu ainsi :

Si $f(a+x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n + o(x^n)$,

Alors $f'(a+x) = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \dots + n\lambda_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer à f' le théorème précédent.

Attention :

L'hypothèse que f' admet un DL est indispensable :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet un DL à l'ordre 2 en 0, à savoir $f(x) = 0 + o(x^2)$

(Puisque $\frac{f(x)}{x^2} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 0$)

Mais f' n'admet pas de DL à l'ordre 1 en 0 puisque f n'est pas deux fois dérivable en 0, donc f' n'est pas dérivable en 0, donc f n'admet pas de DL à l'ordre 1 en 0.

V Parité

Proposition :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre n en 0, disons

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors :

- Si f est paire, alors les a_{2i+1} sont nuls

- Si f est impaire, alors les a_{2i} sont nuls.

Démonstration :

Ici, I est un intervalle contenant 0 et centré en 0. On a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + \dots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$$

Si f est paire, on a alors $f(x) = f(-x)$, et donc $a_1 = -a_1, \dots$

Si f est impaire, on a alors $f(x) = -f(-x)$, et donc $a_0 = -a_0, \dots$

VI DL à connaître

Toutes les fonctions considérées sont de classe C^∞ au voisinage de 0, elles ont donc un DL à n'importe quel ordre en 0 :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \begin{cases} o(x^{2p}) \\ o(x^{2p+1}) \end{cases}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \begin{cases} o(x^{2p+1}) \\ o(x^{2p+2}) \end{cases}$$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \begin{cases} o(x^{2p}) \\ o(x^{2p+1}) \end{cases}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \begin{cases} o(x^{2p+1}) \\ o(x^{2p+2}) \end{cases}$$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

On en tire plusieurs résultats :

- Déjà, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

D'où, par intégration, $\operatorname{Arctan}(x) = 0 + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

- Mais aussi, par intégration, $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

- Ou encore $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$

D'où $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n})$

Et, par intégration : $\operatorname{Argth}(x) = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

(Qu'on pouvait aussi retrouver en considérant que $\operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$)

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + a_n x^n + o(x^n)$

Avec :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}-1) \times (\frac{1}{2}-2) \times \dots \times (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{1}{2^n n!} \times (-1) \times (-3) \times \dots \times (-(2n-3)) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-3) \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2) \times 2n \times (2n-1)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{2^n n! (2n-1)} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n-1)} \end{aligned}$$

- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \dots + b_n x^n + o(x^n)$

Avec :

$$a_n = \frac{(-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}-1) \times (-\frac{1}{2}-2) \times \dots \times (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \dots = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

- $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \dots + b_n x^{2n} + o(x^{2n})$

- Donc par intégration : $\text{Argsh}(x) = 0 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{5 \times 8} - \dots + \frac{b_n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

- Ou $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots + |b_n| x^{2n} + o(x^{2n})$

D'où, par intégration : $\text{Arcsin}(x) = 0 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{5 \times 8} - \dots + \frac{|b_n|}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

Et $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{5 \times 8} - \dots - \frac{|b_n|}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

- $\tan(x)$: deux méthodes :

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \begin{cases} o(x^5) \\ o(x^6) \end{cases}$

- $\tan x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$

La dérivée de tangente est de classe C^∞ au voisinage de 0, donc admet un DL à l'ordre 4 en 0, et :

$$\tan'x = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4)$$

Or, $\tan'x = 1 + \tan^2 x = 1 + (x + ax^3 + bx^5 + o(x^5))^2 = 1 + x^2 + 2ax^4 + o(x^4)$

Donc, par unicité des coefficients d'un DL :

$$3a = 1 \quad ; \quad 5b = 2a. \text{ Donc } a = \frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{2}{15}$$

VII Applications

A) Recherche de limites, d'équivalents (exemples)

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$? On peut réutiliser les méthodes de Terminale (c'est $\ln'(1)$), ou :

Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Donc, pour $u \neq 0$:

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = 1 - \frac{u}{2} + o(u), \text{ d'où } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

Donc la fonction $f :]0, +\infty[\setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en 1 par la

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$$

valeur 1, et la fonction obtenue admet un DL à l'ordre 1 en 1 :

$$f(1+u) = 1 - \frac{u}{2} + o(u). \text{ Donc } f \text{ est dérivable en 1, et } f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

- Soit f définie sur $I \setminus \{a\}$, où a est un élément de I .

S'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0 privé de 0 :

$f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \dots + \lambda_n u^n + o(u^n)$, alors f est prolongeable par continuité en a (par $f(a) = \lambda_0$), et la fonction obtenue admet un DL à l'ordre n en a .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$?

Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{\tan x - \sin x}{\sin x \times \tan x} = \frac{(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \sim \frac{x}{2}$$

Donc $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

- Le premier terme non nul d'un DL donne un équivalent :

Si $f(x) = \lambda_p x^p + \underbrace{\lambda_{p+1} x^{p+1} + \dots + \lambda_n x^n + o(x^n)}_{o(x^p)}$ (avec $\lambda_p \neq 0$), alors $f(x) \sim \lambda_p x^p$.

- Donner un équivalent en $+\infty$ de $e^{1/x^2} - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Au voisinage de 0, on a :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\sin u = u + o(u^2)$$

Donc $e^u - \cos u - \sin u = u^2 + o(u^2)$

D'où $e^{1/x^2} - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$

B) Dérivée, tangente, position d'une courbe par rapport à une tangente

On suppose que f admet un DL à l'ordre au moins 2 en a :

$$f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \dots + \lambda_n u^n + o(u^n), \text{ où } n \geq 2$$

De ce DL, on tire :

$$f(a) = \lambda_0 \quad ; \quad f'(a) = \lambda_1$$

D'où l'équation de la tangente à C au point A d'abscisse a : $y = \lambda_0 + \lambda_1(x - a)$

La position de C par rapport à la tangente T est donnée par le signe de :

$$\underbrace{f(x) - (\lambda_0 + (x - a)\lambda_1)}_{\Delta(x)} = \lambda_2(x - a)^2 + \dots + o((x - a)^n)$$

Si $\lambda_2 \neq 0$:

$$\Delta(a+u) = u^2(\lambda_2 + \varepsilon(u))$$

Donc $\Delta(x)$ est du signe de λ_2 au voisinage de a .

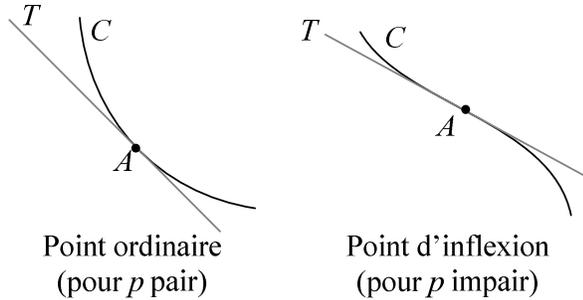
Si $\lambda_2 = 0$, et si on suppose de plus qu'on peut faire un DL jusqu'à un ordre p suffisant de sorte que le coefficient de u^p ne soit pas nul :

$$\Delta(a+u) = \lambda_p u^p + o(u^p) \text{ où } p > 2 \text{ et } \lambda_p \neq 0$$

Soit $\Delta(a+u) = u^p (\lambda_p + \varepsilon(u))$

Donc $\Delta(a+u)$ est du signe de λ_p pour $u > 0$ au voisinage de a et du signe de $(-1)^p \lambda_p$ pour $u < 0$ toujours au voisinage de a .

On a donc, selon la parité de p :



C) Etude locale en $+\infty$.

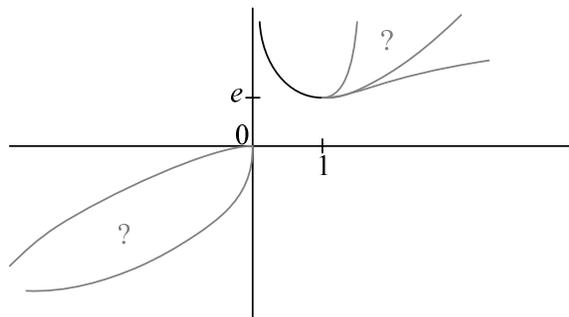
Exemple :

Etude de la fonction $f : x \mapsto xe^{1/x}$

Déjà f est définie sur \mathbb{R}^* , et elle y est de classe C^∞

Et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x}e^{1/x} = e^{1/x} \left(\frac{x-1}{x} \right)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$



Etude en $+\infty$ ou $-\infty$:

Au voisinage de 0 :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon(u)$ où $\varepsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$

Donc $e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ où $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

Donc $f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

Ainsi, l'écart entre la courbe C et la droite D d'équation $D: y = x + 1$ est $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right)$ qui tend vers 0.

La droite D est donc asymptote à C en $\pm \infty$

$$\text{De plus, } f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x} \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) \right)}_{>0 \text{ au voisinage de } \pm \infty}$$

Donc C est au dessus de D en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

Etude à gauche en 0 :

On pose $f(0) = 0$

Ainsi, f est continue à gauche en 0.

$$\text{Pour } x < 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0.$$

Donc f est dérivable à gauche en 0, et $f'_g(0) = 0$