CHAPITRE 2

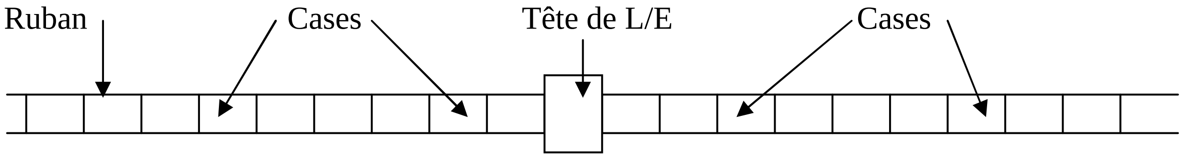
CALCULABILITE

$2^{\text{ème}}$ Partie : LA MACHINE DE TURING

1) DEFINITION :

Une Machine de Turing MT consiste en une entité « mécanique » :

- comportant un ruban (potentiellement) infini dans les deux directions, organisé en cases (ou cellules) de tailles égales où des symboles sont imprimés,
- disposant d'une tête de lecture/écriture (L/E), qui à chaque instant examine une case et peut éventuellement y imprimer un symbole,
- à laquelle est associé à chaque instant un paramètre appelé état interne de la MT.



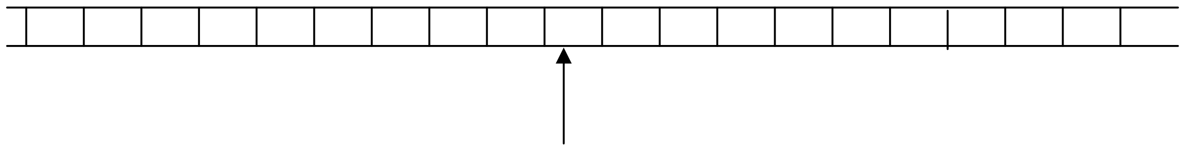
Notation et Conventions :

$S = \{ S_0 , S_1 , S_2 , \ldots, S_n \}$ représente un ensemble fini de symboles.
$E = \{ q_0 , q_1 , q_2 , \ldots, q_f \}$ représente un ensemble fini d'états internes.
S_0 : représente le symbole Blanc : noté 0
S_1 : représente le symbole Barre : noté 1
S_2 : représente le symbole Etoile : noté *
q_0 : représente l'état interne initial
q_f : représente l'état interne final

Initialement toutes les cases du ruban sont à blanc (à 0).
Nous utiliserons par la suite une flèche pour représenter la position de la tête de L/E sur le ruban.

2) FONCTIONNEMENT DE LA MACHINE DE TURING :

Le fonctionnement de la MT à un instant t est déterminé par :
Soient S_i le symbole lu par la tête de L/E et q_j l'état interne dans lequel se trouve la MT.



Trois actions (opérations) peuvent être déclenchées, en dehors de la situation d'arrêt :

- Impression d'un symbole S_r (à la place de S_i) et la MT se place à l ' état q_t.
- Déplacement d'une case à droite et la MT se place à l'état q_t.

- Déplacement d'une case à gauche et la MT se place à l'état q_t.
- Arrêt : aucune action.

L'état interne de la MT et le symbole lu par la tête de L/E détermine donc le début d'une instruction qui sera représentée par un 4 – uplets avec l'une des 3 formes suivantes, associée respectivement à chacune des 3 actions :

- $q_j\, S_i\, S_r\, q_t$ Impression du symbole S_r .
- $q_j\, S_i\, D\, q_t$ Déplacement d'une case à droite .
- $q_j\, S_i\, G q_t$ Déplacement d'une case à gauche .

<u>Remarque</u> :
Le cas où la MT reste à l'arrêt correspond au cas où aucune instruction n'est disponible avec pour paire de tête $q_j\, S_i$ …

Le fonctionnement de la MT est donc entièrement défini par un ensemble d'instructions.
Par ailleurs, nous optons pour une approche déterministe : une seule instruction peut être déclenchée à la fois ; au quel cas dans un ensemble d'instructions nous n'autorisons pas l'existance de 2 instructions possédant une même paire de tête.

<u>EXEMPLE</u> :

S = { 0 , 1 }
E = { q_0 , q_1 , q_2 }

Instructions = { 1 -) $q_0\, 1\, D\, q_0$ 2 -) $q_0\, 0\, 1\, q_1$
3 -) $q_1\, 1 G\, q_1$ 4 -) $q_1\, 0\, D\, q_2$ }

Soit la configuration initiale suivante :

		q_0 ↓				
0….	0	1	1	1	0 …..	0

après Instruction N° 1)

			q_0 ↓			
0….	0	1	1	1	0 …..	0

après Instruction N° 1)

				q_0 ↓		
0….	0	1	1	1	0 …..	0

après Instruction N° 1)

					q_0 ↓	
0….	0	1	1	1	0 …..	0

après Instruction N° 2)

					q_1 ↓	
0….	0	1	1	1	1 …..	0

après Instruction N° 3)

				q_1 ↓		
0….	0	1	1	1	1 …..	0

après Instruction N° 3) $\quad$ 0…. | 0 | 1 | $\overset{q_1}{\downarrow}$ 1 | 1 | 1 ….. 0

après Instruction N° 3) $\quad$ 0…. | 0 | $\overset{q_1}{\downarrow}$ 1 | 1 | 1 | 1 ….. 0

après Instruction N° 3) $\quad$ 0…. | $\overset{q_1}{\downarrow}$ 0 | 1 | 1 | 1 | 1 ….. 0

après Instruction N° 4) $\quad$ 0…. | 0 | $\overset{q_2}{\downarrow}$ 1 | 1 | 1 | 1 ….. 0

Arrêt : configuration finale (aucune instruction ne peut être déclenchée).

3) <u>REPRESENTATION DES ENTIERS NATURELS</u> :

La représentation d'un entier X est notée $\underline{X}$. Concrètement l'entier X est représenté par (x+1) barres, de manière à pouvoir représenter le nombre 0. Donc :

$\underline{0} =_{def}$ 1 $= 1^1$
$\underline{1} =_{def}$ 11 $= 1^2$
$\underline{2} =_{def}$ 111 $= 1^3$
.
.
.
$\underline{n} =_{def}$ 11…11 (n+1 fois)= 1^{n+1}

On convient de plus que 1^0 représente 0 (l'absence de symbole) et que $S^n = S \ldots S$ (n fois) quelque soit le symbole S.

<u>Remarque</u> :

Cette représentation permet de présenter l'exemple précédent de la manière suivante :

$0q_01^30 \longrightarrow 01\,q_01^20 \longrightarrow 01^2q_010 \longrightarrow 01^3q_00 \longrightarrow 01^3q_11 \longrightarrow$

$01^2q_11^2 \longrightarrow 01q_11^3 \longrightarrow 0q_11^40 \longrightarrow 0q_101^40 \longrightarrow 0q_21^40$ Arrêt.

Nous constatons que : $q_01^3 \longrightarrow 0q_21^4$ c-à-d $\underline{2} \longrightarrow \underline{3}$, en fait nous

pouvons montrer que : $\forall\, n \in \mathrm{IN} \quad q_0\underline{n} \longrightarrow q_2\,\underline{n+1}$

4) REPRESENTATION DES N- UPLETS :

Pour représenter les uplets, le symbole Etoile « * » est utilisé pour séparer les nombres ; ainsi :

$(n , m) =_{def} \underline{n} * \underline{m}$
$(n_1 , n_2 , \dots , n_p) =_{def} \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p}$

5) LES FONCTIONS TURING CALCULABLES :

Définition :
Soient F une fonction de $IN^p \longrightarrow IN^q$ et MT une machine de Turing déterminée par (S , E , I) où I est l'ensemble des instructions associées à MT.
La fonction F est dite calculable par la machine de Turing MT si étant donnée la configuration initiale suivante : $q_0 \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p}$, et en appliquant les instructions I de MT, nous arrivons à une situation d'arrêt avec la configuration finale suivante : $q_f \underline{F(n_1 , n_2 , \dots , n_p)}$.

Autrement dit : $q_0 \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_f \underline{F(n_1 , n_2 , \dots , n_p)}$

EXEMP LE 1 :
Déterminer la MT qui calcule la fonction $Z = \lambda n . 0$, c-à-d

$\forall n \in IN \quad q_0\underline{n} \longrightarrow q_f \underline{0}$
ou bien $\quad q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1$

La MT qui calcule la fonction Z est donnée par : MT_Z = (S , E , I) où :
S = { 1 , 0 } ,
E = { q_0 , q_1 , q_2 }
et
I = { 1-) $q_0\, 1 0\, q_1$ Tant que le symbole lu est un 1 , remplacer le par 0 …
2 -) $q_1\, 0 D\, q_0$ …. puis se déplacer à droite
3 -) $q_0\, 0 1\, q_2$ à la rencontre du 0, remplacer le par 1 puis arrêter.
}

EXEMP LE 2 :
Déterminer la MT qui calcule la fonction $S = \lambda n . n+1$, c-à-d

$\forall n \in IN \quad q_0\underline{n} \longrightarrow q_f \underline{n+1}$
ou bien $\quad q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1^{n+2}$

La MT qui calcule la fonction S est donnée par : MT_S = (S , E , I) où :
S = { 1 , 0 } ,

$E = \{ q_0 , q_1 , q_2 \}$
et

$I = \{$ 1-) $q_0\ 1D\ q_0$ Tant que le symbole lu est un 1 , se déplacer à droite
2 -) $q_0\ 01\ q_1$ à la rencontre du 0, remplacer le par 1
3 -) $q_1\ 1G\ q_1$ se déplacer à gauche jusqu'au premier 0
4 -) $q_1\ 0D\ q_2$ se déplacer à droite puis s'arrêter sur le 1 le plus à gauche.
$\}$

EXEMP LE 3 :
Déterminer la fonction F de IN $\longrightarrow$ IN calculée par la MT définie par (S, E , I) où
$S = \{ 1 , 0 \}$,
$E = \{ q_0 , q_1 \}$
et
$I = \{$ 1-) $q_0\ 1G\ q_0$ Se déplacer à gauche
2 -) $q_0\ 01\ q_1$ remplacer le symbole 0 par symbole1 puis s'arrêter.
$\}$

La fonction F recherchée est telle que :
$q_0\underline{n} \longrightarrow q_f\,\underline{F(n)}$?

Déroulons la MT :

- Pour n = 0 :

$00q_010 \longrightarrow 0q_0010 \longrightarrow 0q_1110$ c-à-d $q_0\underline{0} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1\underline{1}$

- Pour n = 1 :

$00q_0110 \longrightarrow 0q_00110 \longrightarrow 0q_11110$ c-à-d $q_0\underline{0} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1\underline{2}$

- Pour n quelconque de IN :

$00q_01^{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow 0q_001^{n+1}0 \longrightarrow 0q_11^{n+2}0$ c-à-d $q_0\underline{n} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1\underline{n+1}$

En conclusion $\forall n \in IN$ $q_0\underline{n} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1\,\underline{n+1}$
La fonction F calculée par MT est donc la fonction S (Vue précédemment).

Remarques Importantes :
1) Une même fonction peut être calculée par plusieurs machine de Turing différentes.
Par exemple, la fonction S est calculée par deux MT différentes (voir exemples 2 et 3).

2) Une même machine de Turing peut calculer plusieurs fonctions différentes.
En effet pour la MT précédente (exemple 3), nous avons :

* $\forall n \in IN$ $q_0\underline{n} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1\,\underline{n+1}$

F1 de IN $\longrightarrow$ IN telle que $F1(n) = S(n) = n+1$

* $\forall (n, m) \in IN^2$ $\quad q_0\underline{n}*\underline{m} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1\, \underline{n+1} * \underline{m}$

F2 de $IN^2 \longrightarrow IN^2$ telle que F2(n,m) = (n+1 ,m)

* ….
* $\forall (n_1, n_2, \dots, n_p) \in IN^p$ $\quad q_0\, \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_f\, \underline{n_1+1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p}$

Fp de $IN^p \longrightarrow IN^p$ telle que Fp $(n_1, n_2, \dots, n_p) = (n_1 + 1, n_2, \dots, n_p)$

6) COMPOSITION DE MACHINES DE TURING :

Théorème :
Soient deux machine de Turing :
- MT1 (S1 , E1 , I1) qui calcule la fonction F1 de INp $\longrightarrow$ INq

- MT2 (S2 , E2 , I2) qui calcule la fonction F1 de INq $\longrightarrow$ INr

telle que S1 = S2 .

Alors la machine de Turing MT (S , E , I) définie par :
S = S1 = S2
E = E1 $\cup$ E'2
I = I1 $\cup$ I'2 $\cup$ { q_{f1} 1 1 q'_{i2} } où

E'2 et I'2 sont obtenus à partir de E2 et I2 en remplaçant chaque q_i par q'_i (renomage des noms des états dans E2 et I2) de manière à ce que E1 $\cap$ E2 = $\varnothing$ et I1 $\cap$ I2 = $\varnothing$,
Permet de calculer la fonction composée (F2 o F1).
La machine MT est considérée comme étant la composition des machines MT1 et MT2 notée : (MT2 o MT1).

Lemme :
Les fonctions de Base : Z , S et P^i_n sont des fonctions calculables par des machine de Turing.