educa Z

Analyse 1

Chapitre 01

Le corps des nombres Réels

1. Nombres Réels :

1.1 - Construction de l'ensemble des nombres réels :

1.1.1 Definition

Une partie non vide $A \subset \mathbb{Q}$ est dite section dans $\mathbb{Q}$ si elle vérifie la propriété suivante :

$\forall x \in A , \forall x' \in \mathbb{Q} : x' < x \Rightarrow x' \in A$

Une section est dite ouverte si :

$\forall x \in A , \exists x' \in A : x' > x$

1.2 Théorème

Soit A une section ouverte alors :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^* , \exists x \in A \exists x' \notin A : x' - x < \varepsilon$

1.3 Definition

Toute section ouverte sera appelé nombre réel . L'ensemble des nombres réels sera noté $\mathbb{R}$.

1.4 Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$ on appelle valeur absolue de x notée $|x|$ le réel positif définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1.5 Propriétés

- $| a | = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $| a b | = | a | \times | b |$

- Si $b \neq 0$, $|ab| = |a||b|$
- $|x/y| = |x|/|y|$ ($|y| \neq 0$)
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)
- $|a-b| \geqslant ||a| - |b||$ (deuxième inégalité triangulaire, découle de la première)

Dans ce qui suit A est un sous ensemble de $\mathbb{R}$

2 Partie bornée

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et m , M $\in \mathbb{R}$

- **M majore A** pour tout x $\in$A : $x \leq M$ (M est le plus grand élément de A) **N.B** Si M appartient à A alors c'est un maximum
- **m minore A** pour tout x $\in$A : $x \geq m$ (m est le plus petit élément de A) **N.B** Si m appartient à A alors c'est un minimum

2.2 Définition

- On dit que **A est majoré** s'il existe un réel M tel que M majore A .
- On dit que **A est minoré** s'il existe un réel m tel que m minore A .
- Si A est majoré et minoré , on dit qu'il est **borné** .

2.3 Borne supérieure et borne inférieure

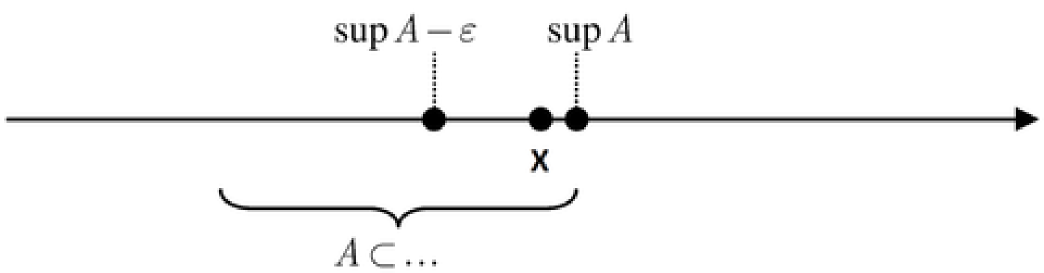
- On dit que s est la borne supérieure de A , notée **Sup(A)** si s est le plus petit majorant de A .
- On dit que t est la borne supérieure de A , notée **Inf(A)** si t est le plus grand minorant de A .

2.3 Théorème

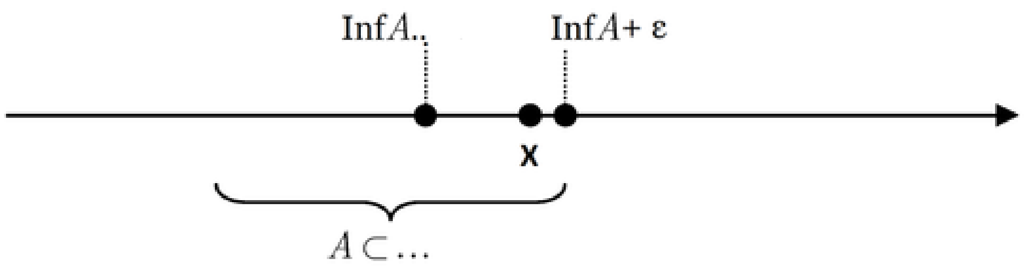
- Si A est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ **non vide** et **majoré**, alors A admet une **borne supérieure .**
- Si A est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ **non vide** et **minoré**, alors A admet une **borne inférieure** .

2.4 Caractérisation des bornes supérieure et inférieure

- $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x \in A\ /\ Sup(A) - \varepsilon \leq\ x \leq Sup(A)$
-



- $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x \in A\ /\ Inf(A) \leq\ x \leq Inf(A) + \varepsilon$



3. Partie entière

3.1 Définition

si x est un réel , il existe un unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq x < m+1$
On l'appelle la partie entière de x , et on la note **[x]** ou **E[x]** .
N.B E[x] est le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à x .
ex : $E[3.2]=3$ car $3 \leq 3.2 < 4$
$E[4]=4$

3.2 Représentation graphique de la fonction « partie entière »